n.V.

OS 65 n.v.

~~388.~~

146

A 233

(4e en anglais)
(7 [illegible])

Die Elemente der Geometrie,

und

der ebenen und sphärischen Trigonometrie,

von

A. M. Legendre,

Mitgliede des Instituts, der Ehrenlegion, der Königl. Londner Societät der Wissenschaften etc.

Aus dem Französischen

nach der eilften Auflage übersetzt

und

mit einigen Anmerkungen begleitet

von

Dr. A. L. Crelle,

Königlich Preussischem Geheimen Ober-Baurathe.

Mit 15 *Kupfertafeln.*

Berlin 1822.

Im Verlage der Maurerschen Buchhandlung.

STRAUBING

K. RECTORAT D. REALSCHULE STRAUBING

131 524 747

Staatl. Bibliothek Passau

Vorrede des Uebersetzers.

Legendres Lehrbuch der Geometrie, der ebenen und sphärischen Trigonometrie, zeichnet sich durch Reichthum des Inhalts, Klarheit, Ordnung und Folgerichtigkeit des Vortrages, Genauigkeit und Strenge der Beweise aus. Es nähert sich unter den französischen Lehrbüchern vorzugsweise dem euclidischen hohen Muster, und trägt unverkennbare Spuren des Strebens nach Vollkommenheit. Könnte auch Manches anders und vielleicht besser seyn, z. B. der Vortrag der Trigonometrie, so enthält doch ohne Zweifel dieses Lehrbuch des Vortrefflichen viel, und ist zum Studium zu empfehlen.

Es fehlt ihm nicht an Eigenthümlichem, worunter der genauere Vortrag der Lehre von der symmetrischen Gleichheit der Körper, der Vortrag der Sätze die den Kreis und die runden Körper betreffen u. s. w. gehört. Vorzüglich aber wird es Denen nützlich seyn, die nicht etwa bey dem Nothdürftigsten stehen bleiben, sondern die Geometrie weiter ergründen wollen. Der Inhalt der Anmerkungen und Anhänge des Verfassers, giebt zum weitern Studium Veranlassung, und zum Nachdenken Stoff. Durch diese Zusätze unterscheidet sich Legendres Lehrbuch besonders vortheilhaft, und es wäre zu wünschen, daſs die Elementarbücher immer solche Zusätze hätten.

Der Unterzeichnete hat es demnach nicht für eine unnütze Bemühung gehalten, dieses Lehrbuch

in das Deutsche zu übersetzen, um es dadurch denjenigen Deutschredenden, welchen solches im Original nicht zugänglich ist, lesbar zu machen.

Der Text ist natürlich bey der Uebersetzung völlig ungeändert geblieben. Bey der einzigen Veränderung der Bezeichnung, die sich der Uebersetzer erlaubte, hat er zur Stelle seine Beweggründe dazu angegeben.

Alles, was ihm seinerseits hin und wieder über den Inhalt zu bemerken nöthig schien, sey es Erläuterung oder Erinnerung, ist, vom Text abgesondert, in einzelnen Bemerkungen beygefügt worden. Von diesen Anmerkungen hat der Uebersetzer zugleich Gelegenheit genommen, über einige von den Puncten des Vortrages, welche die Anmerkungen veranlaſsten, seine eigenthümlichen Ansichten mit-

zutheilen. Diese Ansichten gehören zu denjenigen, die er nunmehr vielleicht bald in einem eigenen Lehrbuche der Geometrie, dessen Ausarbeitung und weitere Vervollkommnung ihn in seinen Mussestunden schon seit einer Reihe von Jahren beschäftigt, im Zusammenhange auseinander zu setzen gedenkt.

Berlin im September 1821.

A. L. Crelle.

Vorrede des Verfassers.

Auf den Rath einsichtsvoller practischer Lehrer, hat sich der Verfasser entschlossen, in dieser eilften Ausgabe die Theorie der Parallelen wiederum ungefähr eben so, wie Euclides abzuhandeln. Daſs dies die Lernenden erleichtert, schien ihm ein überwiegender Beweggrund zu dieser Veränderung, um so mehr, weil die Einwendungen gegen die Parallelentheorie nur erst durch analytische Betrachtungen, wie sie in der zweyten Anmerkung zur Geometrie vorgetragen worden, vollständig gehoben werden können.

Der Beweis des Satzes von Kugelzonen ist nach einer Bemerkung des Herrn Pilatte, Lehrers der Mathematik am Liceo zu Angers, vereinfacht worden.

Endlich ist aus einer von Herrn Cauchy, Ingenieur der Brücken und Wege, neuerlich dem Institut vorgelegten schönen Abhandlung, am Ende der zwölften Anmerkung zur Geometrie, der Beweis des Lehrsatzes genommen, welchen die neunte und

zehnte Erklärung im eilften Buche des Euclides voraussetzen, wodurch man diesen Theil der Elemente vervollkommnet hat.

Dieses sind die vorzüglichsten Veränderungen und Verbesserungen der gegenwärtigen Ausgabe *). Aufserdem ist von Neuem aufs beste für den Druck gesorgt, und die Platten sind aufgefrischt worden.

Wer sich, wenigstens beim ersten Durchlesen, blos auf die ersten Elemente beschränken will, kann die Anmerkungen, Anhänge und überhaupt Alles was mit kleinern Lettern gedruckt ist, übergehen, weil solches entweder weniger unentbehrlich ist, oder zuvor ein weiteres Studium erfordert. Man kann späterhin, wenn man will, darauf zurück kommen, auch nach der Anleitung eines guten Lehrers, das Nothwendigere darunter auswählen.

*) Auch die zehnte enthält dieselben schon.

A. d. Uebers.

Die Elemente der Geometrie.

Erstes Buch.

Die Principien.

Erklärungen.

I. Die Geometrie ist eine Wissenschaft, welche das Maafs und die Ausdehnung zum Gegenstande hat.

Die Ausdehnung hat drey Abmessungen, Länge, Breite und Höhe.

II. Die *Linie* ist eine Länge ohne Breite.

Die Enden einer Linie heissen *Puncte.* Der Punct hat also keine Ausdehnung.

III. *Die gerade Linie* ist der kürzeste Weg von einem Puncte zum andern.

IV. Jede Linie, die weder gerade, noch aus geraden zusammengesetzt ist, heifst *krumm.*

Fig. 1. AB also ist eine grade, ACDB eine *gebrochene* oder aus geraden zusammengesetzte, und ACB eine krumme Linie.

V. *Fläche* ist, was Länge und Breite, aber keine Höhe oder Dicke hat.

VI. *Ebene* heifst eine Fläche, wenn die geraden Linien, welche je zwey beliebige in der Fläche liegende Puncte verbinden, ganz in der Fläche sind.

VII. Jede Fläche, die weder eben noch aus Ebenen zusammengesetzt ist, heifst *krumm.*

VIII. *Körper* heifst, was drey Abmessungen hat.

Fig. 2. IX. Wenn sich zwey gerade Linien AB und AC begegnen, so heifst die geringere oder bedeu-

tendere Gröfse, um welche sie, ihrer Lage nach, von einander entfernt sind, *Winkel*. Der Begegnungs- oder *Durchschnitts-Punct* A ist der *Scheitel* des Winkels; die Linien AB, AC sind seine *Schenkel* oder *Seiten*.

Der Winkel wird zuweilen durch den Buchstaben am Scheitel allein bezeichnet, zuweilen auch durch drey Buchstaben BAC oder CAB, von welchen dann der Buchstabe am Scheitel in der Mitte stehen mufs.

Die Winkel sind, wie alle Gröfsen, der Vermehrung, Verminderung, Vervielfältigung und Theilung Fig. 20. fähig: So ist DCE die Summe der beiden Winkel DCB, BCE; der Winkel DCB der Unterschied der beyden Winkel DCE und BCE.

Fig. 3. X. Wenn die gerade Linie AB eine andere CD so schneidet, dafs die anliegenden Winkel BAC und BAD einander gleich sind, so heifst jeder dieser Winkel ein *rechter*; und die Linie AB wird *Perpendikel* auf CD genannt.

Fig. 4. XI. Jeder Winkel BAC, der kleiner als ein rechter ist, heifst *spitz*; jeder gröfsere Winkel DEF, *stumpf*.

Fig. 5. XII. Zwey Linien heissen *parallel*, wenn sie, in einer und derselben Ebene liegend, sich nicht begegnen, so weit man sie auch verlängert.

XIII. *Ebene Figur* heifst eine, an allen Seiten von Linien begrenzte Ebene.

Fig. 6. Sind die begrenzenden Linien gerade, so heifst der begrenzte Raum *gradelinige Figur*, oder *Vieleck* (*Polygon*); die Linien zusammengenommen, heissen *Umfang* (*Perimeter*) des Vielecks.

XIV. Das Polygon von drey Seiten ist das einfachste von allen; es heifst *Dreyeck*; das vierseitige, *Viereck*; das fünfseitige, *Fünfeck*; das sechsseitige, *Sechseck* etc.

Fig. 7. XV. Ein Dreyeck mit drey gleichen Seiten heifst *gleichseitig;* Fig. 8. mit zwey gleichen Seiten, *gleichschenklig;* Fig. 9. und wenn keine Seite der andern gleich ist, *ungleichseitig.*

Fig. 10. XVI. Das *rechtwinklige* Dreyeck ist dasjenige, welches einen rechten Winkel hat. Die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite heifst *Hypothenuse:* So ist ABC ein in A rechtwinkliges Dreyeck; die Seite BC, ist seine Hypothenuse.

XVII. Bey den Vierecken unterscheidet man Fig. 11. *das Quadrat,* dessen Seiten gleich, und dessen Winkel rechte sind (Siehe den 18ten Satz im 1sten Buch).

Fig. 12. *Das Rechteck,* dessen Winkel rechte sind, ohne dafs alle *) Seiten gleich wären (Siehe eben den Satz).

Fig. 13. *Das Parallelogramm* oder *den Rhombus,* dessen gegenüberliegende Seiten parallel sind.

Fig. 14. *Die Raute* (losange), deren Seiten gleich sind, ohne dafs die Winkel rechte wären.

Fig. 15. Endlich *das Trapez,* an welchem nur zwey Seiten parallel sind.

XVIII. Die Linie, welche die Scheitel zweier, Fig. 42. nicht an einander liegenden Winkel verbindet, wie AC, heifst *Diagonale.*

XIX. Das *gleichseitige* Vieleck ist dasjenige, dessen Seiten gleich sind; das *gleichwinklige,* dessen Winkel gleich sind.

XX. Zwey Vielecke sind *unter einander gleichseitig,* wenn die Seiten des einen, einzeln den Seiten des andern gleich sind, und in beyden nach einerley Ord-

*) Im Original steht „die Seiten" besser wohl — alle Seiten. Denn jedesmal zwey Seiten *müssen* gleich seyn.

A. d. Uebers.

nung auf einander folgen, das heifst, wenn in den Umfängen, nach einerley Richtung fortgehend, die erste Seite des einen der ersten Seite des andern, die zweyte Seite des einen der zweiten Seite des andern, die dritte der dritten Seite gleich ist u. s. w. Aehnliches versteht man unter Vielecke, die unter sich gleichwinklig sind.

In dem einen und dem andern Falle heissen die gleichen Seiten oder die gleichen Winkel, *gleichliegende* oder *homologe* Seiten oder Winkel.

Anmerkung. In den vier ersten Büchern wird von ebenen Figuren oder solchen die Rede seyn, die in einer Ebene beschrieben sind.

Erklärung der Benennungen und Zeichen.

Grundsatz ist ein durch sich selbst klarer Satz.

Lehrsatz ist eine Wahrheit, die mittelst eines Raisonnements, welches man *Beweis* nennt, klar wird.

Aufgabe ist eine gegebene Frage, die eine *Auflösung* erfordert.

Lehnsatz ist eine Wahrheit, die bey dem Beweise eines Lehrsatzes, oder bey der Auflösung einer Aufgabe zur Hülfe genommen wird.

Die gemeinschaftliche Benennung, *Satz*, wird ohne Unterschied für Lehrsätze, Aufgaben und Lehnsätze gebraucht.

Zusatz ist eine Folge aus einem oder mehreren Sätzen.

Anmerkung heifst, was zu einem oder mehreren Sätzen hinzugefügt wird, um ihren Zusammenhang, ihren Nutzen, ihre Beschränkung oder ihre Ausdehnung bemerklich zu machen.

Willkührlicher Satz heifst das, was man in dem Ausdrucke eines Satzes oder in dem Laufe eines Beweises voraussetzt.

Das Zeichen $=$ ist das Zeichen der Gleichheit. Der Ausdruck $A=B$ bedeutet, dafs A gleich B ist.

Um anzuzeigen, dafs A kleiner als B ist, schreibt man $A < B$.

Um anzuzeigen, dafs A gröfser als B ist, schreibt man $A > B$.

Das Zeichen $+$ heifst plus; Es zeigt die Addition an.

Das Zeichen $-$ heifst minus; Es zeigt die Subtraction an. Also bedeutet $A + B$ die Summe der Gröfsen A und B, $A - B$ ihren Unterschied, oder das was übrig bleibt, wenn man B von A hinweg nimmt; Eben so bedeutet $A - B + C$ oder $A + C - B$, dafs A zu C hinzugethan, und B vom Ganzen hinweggenommen werden soll.

Das Zeichen $\times$ zeigt die Multiplication an; So stellt $A \times B$ das Product von A und B vor. Statt des Zeichens $\times$ bedient man sich auch zuweilen blos eines Puncts; $A . B$ ist das Nämliche, wie $A \times B$. Auch drückt man ein Product ohne alles zwischengesetzte Zeichen aus, wie AB. Das letzte darf aber nur dann geschehen, wenn nicht zu gleicher Zeit auch AB etwa den Abstand der Puncte A und B von einander bezeichnen soll.

Der Ausdruck $A \times (B + C - D)$ bedeutet das Product von A in die Gröfse $B + C - D$. Sollte $A + B$ mit $A - B + C$ multiplicirt werden, so müfste man schreiben $(A + B) \times (A - B + C)$. Alles was in Klammern eingeschlossen ist, wird als eine einzige Gröfse betrachtet.

Eine Zahl vor eine Linie oder Gröſse gesetzt, dient zum Multiplicator dieser Linie oder Gröſse; So schreibt man 3 AB, um auszudrücken, daſs die Linie AB dreymal genommen werden soll; um die Hälfte des Winkels A anzuzeigen, schreibt man $\frac{1}{2}$ A.

Das Quadrat der Linie AB wird durch AB^2 bezeichnet; der Cubus derselben durch AB^3. An seinem Orte wird erklärt werden, was Quadrat und Cubus einer Linie bedeuten.

Das Zeichen $\sqrt{}$ zeigt eine auszuziehende Wurzel an. Also ist $\sqrt{2}$ die Quadratwurzel aus 2; $\sqrt{(A \times B)}$ ist die Wurzel aus dem Product $A \times B$, oder die mittlere Proportionale zwischen A und B.

Grundsätze.

1. Zwey Gröſsen, die einer dritten gleich sind, sind einander gleich.
2. Das Ganze ist gröſser als sein Theil.
3. Das Ganze ist der Summe der Theile gleich, in welche es getheilt worden.
4. Von einem Puncte zum andern, kann nur eine grade Linie gezogen werden.
5. Zwey Gröſsen, Linie, Fläche oder Körper, sind gleich, wenn sie, eine auf die andere gelegt, in ihrer ganzen Ausdehnung zusammenfallen.

Erster Satz.

Lehrsatz.

Alle rechte Winkel sind einander gleich.

Fig. 16. Die gerade Linie CD sey auf AB senkrecht und GH auf EF; so wird behauptet, daſs die Winkel ACD und EGH einander gleich sind.

Man mache die 4 Abstände CA, CB, GE und GF einander gleich, so ist der Abstand AB dem Abstande EF gleich und die Linie EF wird so auf AB gelegt werden können, dafs der Punct E in A, und der Punct F in B fällt. Diese so auf einander gelegten beyden Linien werden ganz in einander fallen, weil es sonst zwey grade Linien zwischen A und B geben würde, welches unmöglich ist (4ter Grundsatz). Also wird der in der Mitte zwischen E und F liegende Punct G, in den, in der Mitte zwischen A und B liegenden Punct C fallen. Ist nun auf die Weise die Seite GE auf CA gelegt worden, so behaupte ich, dafs die Seite GH auf CD fallen wird; denn man setze, sie falle, wo möglich, auf eine von CD verschiedene Linie CK, so müfste, weil nach der Voraussezzung (10te Erkl.) EGH = HGF ist, ACK = KCB seyn. Aber der Winkel ACK ist gröfser als ACD, KCB kleiner als BCD; Nun ist nach der Voraussetzung ACD = BCD, also ist ACK gröfser als KCB; folglich kann die Linie GH nicht auf eine von CD verschiedene Linie CK fallen; mithin fällt sie auf CD, und der Winkel EGH auf ACD; folglich sind alle rechte Winkel einander gleich *).

Zweyter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 17. *Jede grade Linie CD, welche einer andern AB begegnet, macht mit ihr zwey anliegende Winkel ACD und BCD, deren Summe zweyen rechten gleich ist.*

*) Beym Euclid ist dieser Satz, Grundsatz. Hier konnte er bewiesen werden, weil der Satz, dafs zwischen zwey Puncten nur eine grade Linie möglich ist, zum Grundsatz gemacht worden. A. d. Uebers.

Man errichte im Punct C auf AB die senkrechte CE. Der Winkel ACD ist die Summe der Winkel ACE und ECD; also ist ACD + BCD die Summe der drey Winkel ACE, ECD und BCD. Der erste dieser drey Winkel ist ein rechter, die beyden andern machen zusammen den rechten BCE aus. Also ist die Summe der beyden Winkel ACD und BCD gleich zweyen rechten.

Erster Zusatz. Wenn der eine von den Winkeln ACD und BCD ein rechter ist, so ist es der andere auch.

Fig. 18. *Zweyter Zusatz.* Wenn die Linie DE auf AB senkrecht ist, so ist auch umgekehrt AB auf DE senkrecht.

Denn, daraus dafs DE auf AB senkrecht seyn soll, folgt, dafs der Winkel ACD seinem anliegenden DCB gleich ist, und dafs beyde rechte sind. Ferner folgt daraus, dafs der Winkel ACD ein rechter ist, auch, dafs sein anliegender ACE ein rechter ist; also sind die Winkel ACE und ACD einander gleich, folglich ist AB auf DE senkrecht.

Fig. 34. *Dritter Zusatz.* Alle auf einander folgenden Winkel BAC, CAD, DAE, EAF, an einer Seite einer graden Linie BF, machen zusammen zwey rechte aus; denn ihre Summe ist der Summe von zwey an einander liegenden Winkeln BAC und CAF gleich.

Dritter Satz.

Lehrsatz.

Zwey gerade Linien, welche zwey Puncte gemein haben, fallen in ihrer ganzen Ausdehnung zusammen und bilden nur eine und dieselbe grade Linie.

Fig. 19. Die gemeinschaftlichen Puncte sollen A und B seyn; so müssen zuerst die beyden Linien von

A bis B nur eine einzige bilden, denn sonst würde es zwey grade Linien zwischen A und B geben, welches unmöglich ist (4ter Grundsatz). Nun setze man, die Linien trennten sich in C, wenn man sie verlängert, und die eine sey CD, die andere CE. Man ziehe durch C eine Linie CF, welche mit CA den rechten Winkel ACF macht. Weil die Linie ACD eine gerade ist, so wird der Winkel FCD ein rechter seyn (2ter Satz, 1ster Zusatz). Und weil ACE eine grade Linie ist, wird auch auf gleiche Weise FCE ein rechter Winkel seyn. Aber der Theil FCE kann nicht dem Ganzen FCD gleich seyn; folglich können sich grade Linien, welche zwey Puncte A und B gemein haben, in keinem Punct ihrer Verlängerung trennen; mithin bilden sie nur eine und dieselbe grade Linie *).

Vierter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 20. *Wenn zwey an einander liegende Winkel ACD und DCB zusammen zweyen rechten gleich sind, so liegen die äufsern Schenkel derselben AC und CB in einer graden Linie.*

Denn wäre CB nicht die Verlängerung von AC, so sey sie CE; Alsdann wird die Summe der Winkel ACD und DCE zweyen rechten gleich seyn müssen, weil ACE eine gerade Linie ist (2ter Satz). Aber nach der Voraussetzung ist auch die Summe der Winkel ACD und DCB zweyen rechten gleich, also würde ACD + DCB = ACD + DCE seyn. Zieht man auf

*) Bey der obigen Erklärung der graden Linie scheint dieser allerdings stringente Beweis möglich und nöthig.

A. d. Uebers.

beiden Seiten den Winkel ACD ab, so bleibt übrig: der Theil DCB, gleich dem Ganzen DCE, welches unmöglich ist; Also ist CB die Verlängerung von AC.

Fünfter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 21. *Allemal wenn sich zwey grade Linien AB und DE schneiden, sind die im Scheitel einander entgegengesetzten Winkel gleich grofs.*

Denn da die Linie DE eine gerade ist, so ist die Summe der Winkel ACD und ACE gleich zweyen rechten; und weil die Linie AB eine gerade ist, so ist auch die Summe der Winkel ACE und BCE gleich zweyen rechten; folglich ist die Summe ACD + ACE der Summe ACE + BCE gleich. Zieht man auf beyden Seiten den nämlichen Winkel ACE ab, so bleibt übrig: der Winkel ACD, gleich dem ihm entgegengesetzten BCE.

Eben so kann man beweisen, dafs der Winkel ACE dem ihm entgegengesetzten BCD gleich ist.

Anmerkung. Die vier Winkel, welche durch zwey sich schneidende grade Linien um den Durchschnittspunct herum gebildet werden, betragen zusammen vier rechte; denn die Winkel ACE und BCE zusammengenommen sind gleich zwey rechten; die beyden andern Winkel ACD und BCD ebenfalls.

Fig. 22. Allgemein, wenn so viel grade Linien CA, CB etc. als man will in einem und demselben Punct C sich schneiden, ist allemal die Summe aller auf einander folgenden Winkel ACB, BCD, DCE, ECF, FCA gleich vier rechten: denn wenn man um den Punct C, mittelst zweyer, in ihm sich schneidender, auf einander senkrechter grader Linien, vier rechte Winkel bildet, so füllen die vier rechten Winkel, eben wie die aufein-

ander folgenden Winkel ACB, BCD etc. den nämlichen Raum (espace) aus *).

Sechster Satz.

Lehrsatz.

Zwey Dreyecke sind einander gleich, wenn sie einen gleichen Winkel zwischen zwey Seiten haben, die, einzeln, in dem einen so groſs sind, als in dem andern.

Fig. 23. Der Winkel A sey dem Winkel D gleich, die Seite AB der Seite DE, die Seite AC der Seite DF, so behaupte ich, daſs die Dreyecke ABC und DEF einander gleich sind.

In der That können diese Dreyecke so auf einander gelegt werden, daſs sie vollkommen zusammenfallen. Denn, wenn man erstlich die Seite DE auf die gleiche Seite AB legt, so wird der Punct D in A und der Punct E in B fallen: weil aber der Winkel D dem Winkel A gleich ist, so wird die Seite DF die Richtung AC bekommen, sobald man DE auf AB legt. Ferner ist DF gleich AC, also wird der Punct F in C fallen, und die dritte Seite EF wird genau die dritte Seite BC decken; folglich ist das Dreyeck DEF dem Dreyeck ABC gleich (5ter Grundsatz).

Zusatz. Daraus, daſs in zwey Dreyecken folgende drey Stücke gleich sind, nämlich, der Winkel A=D

*) Es wäre vielleicht noch besser gewesen, den Beweis eben so zu geben, wie für die Winkel an einer Seite einer graden Linie, oben im 2ten Satze (3ter Zusatz). Denn obgleich es grade nach meiner Ueberzeugung besser und nothwendig ist, den Winkel als eine Raum-Gröſse zu betrachten, (man sehe meine Abhandlung über Parallelentheorien, Berlin, bey Maurer 1816.) so ist doch der Begriff vom Winkelraum hier wohl dem Uebrigen fremd.
A. d. Uebers.

die Seite AB = DE und die Seite AC = DF, kann man schliefsen, dafs auch die übrigen drey Stücke gleich sind, nämlich der Winkel B = E, der Winkel C = F, und die Seite BC = EF.

Siebenter Satz.

Lehrsatz.

Zwey Dreyecke sind gleich, wenn sie eine gleiche Seite zwischen zwey Winkeln haben, die einzeln einander gleich sind.

Fig. 23. Die Seite BC sey der Seite EF, der Winkel B dem Winkel E, und der Winkel C dem Winkel F gleich; so behaupte ich, dafs das Dreyeck DEF dem Dreyeck ABC gleich ist.

Denn, um die Dreyecke auf einander zu legen, werde EF auf die ihr gleiche Seite gelegt. Der Punct E wird auf B, der Punct F auf C fallen. Weil nun der Winkel E dem Winkel B gleich ist, so wird die Seite ED die Richtung BA annehmen; also wird sich der Punct D in irgend einem Puncte der Linie BA befinden. Eben so, weil der Winkel F dem Winkel C gleich ist, wird die Linie FD die Richtung CA bekommen, und der Punct D wird sich in irgend einem Puncte der Seite CA befinden; folglich wird der Punct D, welcher in den beyden Linien BA und CA zugleich seyn soll, in ihren Durchschnittspunct A fallen; folglich fallen die beyden Dreyecke ABC und DEF ganz auf einander und sind einander vollkommen gleich.

Zusatz. Daraus, dafs in zwey Dreyecken folgende drey Stücke einander gleich sind, nämlich: BC = EF, B = E und C = F kann man schliefsen, dafs es die drey übrigen auch sind, nämlich AB = DE, AC = DF und A = D.

Achter Satz.

Lehrsatz.

In jedem Dreyeck ist jede Seite kleiner, als die Summe der beyden übrigen.

Fig. 23. Denn, zum Beyspiel, die grade Linie BC ist der kürzeste Weg von B nach C (3te Erkl.); also ist BC kleiner als BA + AC.

Neunter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 24. *Wenn man von einem Puncte O, im Innern eines Dreyecks ABC, nach den Endpuncten einer Seite BC, die graden Linien OB und OC zieht, so ist die Summe dieser Linien kleiner, als die der beyden Seiten AB und AC.*

Es werde BO verlängert, bis sie die Seite AC in D schneidet; so ist die grade Linie OC kürzer als OD + DC (8ter Satz). Thut man auf beyden Seiten BO hinzu, so hat man $BO + OC < BO + OD + OC$ oder $BO + OC < BD + DC$.

Eben so aber ist $BD < BA + AD$; thut man auf beyden Seiten DC hinzu, so hat man $BD + DC < BA + AC$. Aber es war $BO + OC < BD + DC$; also ist um so mehr $BO + OC < BA + AC$.

Zehnter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 25. *Wenn die beyden Seiten AB und AC des Dreyecks ABC einzeln den beyden Seiten DE und DF des Dreyecks DEF gleich sind, der von den beyden ersten eingeschlossene Winkel BAC aber gröſser ist als der Winkel EDF zwischen den beyden andern, so behaupte ich, daſs die*

dritte Seite BC des ersten Dreyecks gröſser ist, als die dritte Seite EF des andern.

Man mache den Winkel CAG = D, ferner AG = DE und ziehe CG, so werden die Dreyecke GAC und DEF gleich seyn, weil sie, der Construction nach, einen gleichen Winkel zwischen gleichen Seiten haben (6ter Satz); folglich ist CG = EF. Nun können drey Fälle Statt finden, je nachdem der Punct G auſserhalb des Dreyecks ABC, oder in der Seite BC, oder in innerhalb des Dreyecks liegt.

Fig. 25. *Erster Fall.* Die grade Linie GC ist kürzer als GI + IC: die grade Linie AB ist kürzer als AI + IB: also ist GC + AB kleiner als GI + AI + IC + IB oder was das Nämliche ist, GC + AB < AC + BC. Zieht man auf der einen Seite die Linie AB und auf der andern die ihr gleiche Linie AG ab, so bleibt GC < BC: aber GC = EF, also EF < BC.

Fig. 26. *Zweiter Fall.* Wenn der Punct G auf die Seite BC fällt, so ist klar, daſs die Linie GC, oder die ihr gleiche Linie EF kürzer ist als BC.

Fig. 27. *Dritter Fall.* Fällt endlich der Punct G in das Dreyeck ABC, so hat man, vermöge des vorigen, Lehrsatzes AG + GC < AB + BC. Ziehet man auf der einen Seite die Linie AG und auf der andern die ihr gleiche Linie AB ab, so bleibt GC < BC oder EF < BC *).

* Wenn man zu derjenigen Seite DF, die man in die gleiche des andern Dreyecks legt, die kleinere von den beyden correspondirenden Seiten wählt, so kann man die Aufzählung der drey Fälle ersparen. Der Satz kommt dann aber erst später, nachdem derjenige, daſs in jedem Dreyeck der gröſsern Seite der gröſsere Winkel gegenüber steht, und umgekehrt, gelehrt worden ist.

A. d. Uebers.

Anmerkung. Sind umgekehrt die beyden Seiten AB und AC des Dreyecks ABC den beyden Seiten DE und DF des Dreyecks DEF gleich, und ist aufserdem die dritte Seite CB des ersten Dreyecks, gröfser als die dritte Seite EF des zweyten, so behaupte ich, dafs der Winkel BAC des ersten Dreyecks gröfser ist, als der Winkel EDF des zweyten.

Denn wäre dies nicht der Fall, so müfste der Winkel BAC dem Winkel DEF gleich oder kleiner als derselbe seyn. In dem ersten Falle aber wäre die Seite CB der Seite EF gleich (6ter Satz), in dem zweyten wäre CB kleiner als EF. Beydes aber ist gegen die Voraussetzung; folglich ist BAC gröfser als EDF.

Eilfter Satz.

Lehrsatz.

Zwey Dreyecke sind einander gleich, wenn alle drey Seiten in dem einen so grofs sind, als in dem andern.

Fig. 23. Es sey die Seite AB = DE, AC = DF, BC = EF, so behaupte ich, dafs auch die Winkel A = D, B = E, C = F seyn werden.

Denn wäre der Winkel A gröfser als der Winkel D, so würde, weil die Seiten AB, AC den Seiten DE, DF einzeln gleich sind, aus dem vorhergehenden Lehrsatze folgen, dafs die Seite BC gröfser ist als EF; und wäre der Winkel A kleiner als der Winkel D, so würde folgen, dafs die Seite BC kleiner ist als EF; aber BC ist gleich EF; also kann der Winkel A weder gröfser noch kleiner seyn als der Winkel D; mithin ist er demselben gleich. Man beweiset auf eben die Art, dafs der Winkel B = E und der Winkel C = F ist *).

*) Diese Art, die Gleichheit der Dreyecke für den Fall zu beweisen, dafs alle drey Seiten einzeln in dem einen so

Anmerkung. Es ist zu merken, dafs die gleichen Winkel gleichen Seiten gegenüber stehen. So stehen die gleichen Winkel A und D den gleichen Seiten BC und EF gegenüber.

Zwölfter Satz.

Lehrsatz.

In einem gleichschenkligen Dreyecke sind die den gleichen Seiten gegenüberliegenden Winkel einander gleich.

Fig. 28. Die Seite AB sey der Seite AC gleich, so behaupte ich, dafs der Winkel C = B ist.

Man ziehe die Linie AD vom Scheitel A nach der Mitte D der Grundlinie BC, so sind in dem Dreyeck ABD alle drey Seiten einzeln so grofs als in dem Dreyeck ADC, nämlich, AD ist gemeinschaftlich, AB ist gleich AC, nach der Voraussetzung, und BD = DC gemacht, folglich ist vermöge des vorhergehenden Lehrsatzes der Winkel B gleich dem Winkel C *).

Zusatz. Ein gleichseitiges Dreyeck ist auch gleichwinklig, das heifst: es hat gleiche Winkel.

Anmerkung. Die Gleichheit der Dreyecke ABD und ACD beweiset zugleich, dafs der Winkel BAD = DAC und der Winkel BDA = ADC ist, folglich sind die letzten beyden rechte; *folglich steht die Linie aus dem Scheitel eines gleichschenkligen Dreyecks nach der Mitte sei-*

grofs sind als in dem andern, scheint die einfachste und beste. Denn der euclidische Beweis, in der Gestalt wie er auf uns gekommen, ist nicht ganz vollständig und wird weitläuftig, wenn man ihn vollständig macht. Den zehnten Satz hier könnte man sogleich in den eilften hineinziehen.
A. d. Uebers.

*) Beym Euclid geht dieser Satz mit seinem strengen Beweise dem vorigen vorher und zwar vielleicht mit Recht, weil die Voraussetzung eines Mittelpuncts der Basis Anstofs haben könnte. A. d. Uebers.

ner Grundlinie, auf dieser Grundlinie senkrecht, und theilt den Winkel am Scheitel in zwey gleiche Theile.

In einem ungleichseitigen Dreyeck nimmt man jede beliebige Seite zur Grundlinie. Dann ist der Scheitel des Dreyecks der des gegenüberliegenden Winkels. Im gleichschenkligen Dreyeck nimmt man ausschliefslich die Seite zur Grundlinie, welche den beyden andern nicht gleich ist *).

Dreyzehnter Satz.

Lehrsatz.

Umgekehrt, wenn zwey Winkel in einem Dreyeck gleich grofs sind, so sind auch die gegenüberliegenden Seiten einander gleich und das Dreyeck ist gleichschenklig.

Fig. 29. Der Winkel ABC sey gleich ACB, so behaupte ich, dafs die Seite AC der Seite AB gleich ist.

Denn wären diese Seiten nicht gleich, so sey AB die gröfsere von beyden. Man mache BD = AC und ziehe DC. Der Winkel DBC ist nach der Voraussezzung gleich ACB; die beyden Seiten DB und BC sind den beyden Seiten AC und CB gleich, also ist das Dreyeck DBC (6ter Satz) dem Dreyeck ACB gleich. Aber der Theil kann nicht dem Ganzen gleich seyn, mithin können die Seiten AB und AC nicht ungleich seyn, folglich ist das Dreyeck ABC gleichschenklig.

Vierzehnter Satz.

Lehrsatz.

Von zwey Seiten eines Dreyecks ist diejenige die gröfsere, welche dem gröfsern Winkel gegenüber liegt, und um-

*) Dieses hätte wohl müssen etwas früher bemerkt werden.
A. d. Uebers.

gekehrt: von zwey Winkeln eines Dreyecks ist derjenige der grösere, welcher der gröfsern Seite gegenüber liegt.

Fig. 30. *Erstlich.* Der Winkel C sey gröfser als B, so behaupte ich, dafs die dem Winkel C gegenüberliegende Seite AB gröfser ist, als die dem Winkel B gegenüber liegende Seite AC.

Man mache den Winkel BCD = B, so ist in dem Dreyeck BDC, BD = DC (13ter Satz). Aber die grade Linie AC ist kürzer als AD + DC und AD + DC ist gleich AD + DB = AB, also ist AB gröfser als AC.

Zweytens. Die Seite AB sey länger als AC, so behaupte ich, dafs der, der Seite AB gegenüber liegende Winkel C gröfser ist, als der der Seite AC gegenüberliegende Winkel B.

Denn wäre C < B, so würde, vermöge dessen was so eben bewiesen ist, folgen, dafs AB < AC sey, welches gegen die Voraussetzung ist. Wäre C = B, so würde folgen (13ter Satz) dafs AB = AC, welches ebenfalls gegen die Voraussetzung ist; folglich mufs der Winkel C gröfser seyn, als B.

Funfzehnter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 31. *Von einem gegebenen Puncte A, aufser einer graden Linie DE, kann man nach dieser Linie nur eine einzige Senkrechte ziehen.*

Denn man setze: es können zwey, AB und AC, gezogen werden. Man verlängere von diesen beyden die eine AB um eine Gröfse BF = AB und ziehe FC; so ist das Dreyeck CBF dem Dreyeck ABC gleich; denn der Winkel CBF ist ein rechter, eben wie CBA, die Seite CB ist gemeinschaftlich und die Seite BF = AB; also sind die Dreyecke gleich (6ter Satz) und es folgt, dafs der Winkel BCF = BCA. Der Winkel BCA aber ist

nach der Voraussetzung ein rechter, also ist es der Winkel BCF auch. Aber wenn die anliegenden Winkel BCA und BCF zusammen zweyen rechten gleich sind, so mufs die Linie ACF eine grade seyn (4ter Satz), woraus folgen würde, dafs zwischen zwey Puncten, A und F, zwey verschiedene grade Linien, ACF und ABF, gezogen werden können, was unmöglich ist (4ter Grundsatz). Also ist es auch unmöglich, zwey Perpendikel aus einem und demselben Puncte, nach einer und derselben graden Linie zu ziehen.

Fig. 17. *Anmerkung.* In einem und demselben Punct C auf eine Linie AB zwey verschiedene Perpendikel zu errichten, ist ebenfalls unmöglich. Denn wären CD und CE zwey Perpendikel, so würde der Winkel DCB ein rechter seyn eben so wohl als BCE, folglich der Theil dem Ganzen gleich.

Sechzehnter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 31. *Wenn man von einem, aufserhalb einer graden Linie DE liegenden, Puncte A eine Linie AB senkrecht auf jene, und aufserdem verschiedene schräge Linien AE, AC, AD etc. nach verschiedenen Puncten der nämlichen graden Linie zieht, so ist*

1. *die senkrechte Linie AB kürzer als jede schräge;*
2. *die beyden schrägen Linien AC und AE in gleichen Abständen BC und BE von der Senkrechten sind gleich;*
3. *von zwey beliebigen schrägen Linien AC und AD oder AE und AD ist diejenige die längste, welche sich am weitesten von der Senkrechten entfernt.*

Man verlängere die senkrechte AB um eine Gröfse BF = AB und ziehe FC und FD.

Erstlich. Das Dreyeck BCF ist dem Dreyecke BCA gleich, denn der rechte Winkel CBF ist CBA gleich,

die Seite CB ist beyden Dreyecken gemein und die Seite BF = BA, also ist die dritte Seite CF der dritten AC gleich (6ter Satz). Aber die grade Linie ABF ist kürzer als die gebrochene ACF; also ist die Hälfte AB von ABF, kürzer als die Hälfte AC von ACF; also ist erstlich die senkrechte Linie kürzer als jede schräge.

Zweitens. Man setze BE = BC, so ist das Dreyeck ABE gleich dem Dreyeck ABC, denn es ist auch der Winkel ABE = ABC und AB gemeinschaftlich; also sind die Seiten AE und AC gleich; folglich sind zweytens zwey schräge Linien, die sich gleich weit von der Senkrechten entfernen, gleich lang.

Drittens. In dem Dreyecke DFA ist die Summe der Linien AC und CF kleiner, als die Summe der Seiten AD und DF (9ter Satz), also ist die Hälfte AC von ACF kürzer als die Hälfte AD von ADF, folglich sind, drittens, die schrägen Linien, die sich am weitesten von der Senkrechten entfernen, am längsten.

I. *Zusatz.* Die senkrechte Linie mifst die Entfernung eines Puncts von einer Linie, weil sie kürzer ist als jede schräge.

II. *Zusatz.* Von einem und demselben Puncte kann man nach einer und derselben Linie nicht drey *) gleich lange grade Linien ziehen; denn sonst gäbe es auf der nämlichen Seite der Senkrechten zwey gleich lange schräge Linien, welches unmöglich ist.

Siebzehnter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 32. *Wenn man aus dem Punct C in der Mitte einer graden Linie AB die EF senkrecht auf AB errichtet, so ist*

*) Genauer wohl „mehr als zwey."

Erstlich, jeder Punct der Senkrechten von den beyden Endpuncten der Linie AB gleich weit entfernt.

Zweitens. Jeder Punct außerhalb der Senkrechten ist von den nämlichen beyden Endpuncten ungleich weit entfernt.

Denn weil man

Erstlich AC = CB setzt, so entfernen sich die beyden schrägen Linien AD und DB von der senkrechten gleich weit. Deshalb sind sie gleich lang. Eben so verhält es sich mit den beyden schrägen Linien AE, EB, mit den andern AF, FB u. s. w., also ist erstlich jeder Punct der Senkrechten gleich weit von den Endpuncten A und B entfernt.

Zweytens. Es sey I ein Punct außerhalb der Senkrechten, so wird, wenn man IA und IB zieht, eine dieser Linien die Senkrechte in D schneiden, und es ist, wenn man DB zieht, DB = DA. Aber die grade Linie IB ist kürzer als die gebrochene ID + DB und ID + DB ist gleich ID + DA = IA, also ist IB < IA; folglich ist zweytens jeder Punct außerhalb der Senkrechten von den Endpuncten ungleich weit entfernt.

Achtzehnter Satz.

Lehrsatz.

*Zwey rechtwinklichte Dreyecke sind gleich, wenn in dem einen die Hypothenuse und eine Seite so groß sind als in dem andern *).*

*) Dieser Satz gilt allgemeiner und heißt also: zwey Dreyecke sind einander gleich, wenn zwey Seiten und ein anliegender Winkel in dem einen so groß sind als in dem andern, in so fern entweder der gegebene Winkel der größern von den beyden Seiten gegenüber liegt, oder der andere anliegende Winkel in beyden Dreyecken zugleich stumpf oder spitz ist. A. d. Uebers.

Fig. 33. Es sey die Hypothenuse AC = DF und die Seite AB = DE, so behaupte ich, dafs das rechtwinklige Dreyeck ABC dem rechtwinkligen Dreyecke DEF gleich ist.

Die Gleichheit würde offenbar seyn, wenn die dritte Seite BC der dritten EF gleich wäre. Man nehme an, diese Seiten wären, wo möglich, nicht gleich, und BC wäre von beyden die gröfsere. Man mache BG = EF und ziehe AG. Das Dreyeck ABG ist dem Dreyeck DEF gleich, denn der rechte Winkel B ist dem rechten Winkel E gleich, die Seite AB ist gleich DE und die Seite BG = EF. Also sind die Dreyecke gleich (6ter Satz), folglich ist AG = DF. Aber der Voraussetzung nach ist AC = DF, also ist AG = AC. Aber die schräge Linie AC kann nicht gleich der schrägen AG seyn (16ter Satz), weil sie sich weiter von der Senkrechten AB entfernt; folglich ist es unmöglich, dafs BC und EF verschieden sind, mithin ist das Dreyeck ABC dem Dreyeck DEF gleich.

Neunzehnter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 35. *Wenn zwey grade Linien AC und BD auf einer dritten AB senkrecht stehen, so sind sie parallel, das heifst, sie können sich nicht begegnen, so weit man sie auch verlängert.* (12te Erkl.).

Denn könnten sie sich in irgend einem Puncte O begegnen, auf einer oder der andern Seite der Linie AB, so würde es aus einem und demselben Puncte nach einer und derselben graden Linie AB zwey verschiedene Senkrechten OA und OB geben, welches unmöglich ist (15ter Satz) *).

*) Dieser Satz entspricht dem 27sten und 16ten Satze im ersten Buche des Euclides. A. d. Uebers.

Zwanzigster Satz.

Lehnsatz.

Fig. 35. *Wenn die grade Linie BD senkrecht auf AB ist, und eine andere grade Linie AE macht mit AB den spitzen Winkel BAE, so behaupte ich, dafs die graden Linien BD und AE, genugsam verlängert, sich begegnen.*

Von irgend einem in der Richtung von AE liegenden Puncte F werde FG auf AB senkrecht gezogen, so wird der Punct G nicht in A fallen, weil der Winkel FAB kleiner als ein rechter ist. Er kann noch weniger in H auf die Verlängerung von BA fallen, weil es sonst zwey Senkrechte KH und KA aus einem und demselben Puncte K auf die nämliche Linie AH geben würde; also mufs der Punct G, wie es die Figur vorstellt, in die Richtung AB fallen.

Nun nehme man auf der Linie AE einen andern Punct L in einer Entfernung AL von A die gröfser ist als AF und ziehe auf AB die Senkrechte LM, so ist wie vorher zu beweisen, dafs der Punct M weder in G noch in die Richtung GA fallen kann. Er fällt also in die Richtung GA, so dafs der Abstand AM nothwendigerweise gröfser ist als AG.

Ich bemerke, dafs, wenn die Figur sorgfältig gezeichnet (construite) wird und man nimmt AL doppelt so grofs als AF, dafs man AM genau doppelt so grofs als AG finden werde. Eben so, wenn man AL dreymal so grofs nimmt als AI, so wird man AM dreymal so grofs als AG finden. Ueberhaupt wird immer zwischen AM und AG das nämliche Verhältnifs bleiben, wie zwischen AL und AF. Wird dieses Verhältnifs angenommen, so folgt nicht allein, dafs die grade Linie AE, genugsam verlängert, BD begegnen mufs, sondern dafs man auch auf AE die Entfernung des Durchschnittspuncts der beyden Linien angeben kann.

Diese Entfernung wird das vierte Glied des Verhältnisses AG : AB = AF : X seyn.

Anmerkung. Diese Erläuterung, welche auf ein Verhältnifs gegründet worden, das nicht auf Schlüfsen allein beruht, sondern bey welchem man zugleich auf Ausmessungen einer gut gezeichneten Figur verweiset, ist nicht in eben dem Mafse strenge wie andere Beweise der Elementar-Geometrie. Wir geben sie deshalb nur als ein einfaches Mittel, sich von der Wahrheit des Satzes zu überzeugen, und verweisen wegen des strengen Beweises auf die zweyte Anmerkung zu diesen Elementen *).

*) Der 19te und 20ste Satz enthält die Theorie der Parallelen. Der 20ste Satz tritt an die Stelle des berühmten 11ten Axioms des Euclides. Legendre giebt diese Erläuterung des Axioms zwar für keinen geometrischen Beweis, sondern nennt den Satz, *Lehnsatz*, und schlägt ihn als ein Mittel vor, sich empirisch von der Wahrheit des Axioms zu überzeugen. In der That ist derselbe aus der Zeichenkunst entlehnt. Fast aber scheint es besser, die Erläuterung wegzulassen. Denn die Zeichenkunst gründet sich erst auf die Geometrie, folglich entsteht auch nicht einmal der Schein eines Beweises, wenn sich umgekehrt die Geometrie auf die Zeichenkunst berufen will. Auch wird aufserdem in dieser Erläuterung von Proportionen gesprochen, die noch nicht erklärt sind. Daher glaube ich, ist zu rathen, dafs man die Erläuterung übergehe und den Satz mit Euclid als Grundsatz annehme. Denn nur zu leicht ist der Anfänger geneigt etwas für einen geometrischen Beweis zu halten, was im Grunde nur Ueberredung und Täuschung ist.

Legendre hat sich früherhin noch mehr mit der Theorie der Parallelen beschäftigt und einen wirklich geometrischen Beweis des berühmten Axioms zu geben versucht. Die frühern Ausgaben seiner Geometrie enthalten an der obigen Stelle, was er fand. Sein Beweis ist zwar, gleich so vielen andern seiner Art, mifslungen, was auch der Ver-

Ein und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

Fig. 36. *Wenn die innern Winkel CAB und ABD, welche zwey grade Linien AC und BD mit einer dritten AB machen, zusammen zweyen rechten gleich sind, so sind die Linien parallel.*

fasser einsahe, weil er den Beweis zurück nahm, und sich in den neuern Ausgaben der Geometrie wiederum näher an Euclid anschloſs; indessen ist es dennoch wohl der Mühe werth, diesen frühern Beweis kennen zu lernen, weil eines theils die Ideen, wie man es von Legendre gewohnt ist, auch hier ungemein scharfsinnig sind; anderntheils aber, weil dem Verfasser sein Vorhaben gleichsam zur Hälfte wirklich gelungen ist. Darum will ich Legendre's, ältere Ideen über die Parallelen, nach der vor mir liegenden fünften Ausgabe seiner Geometrie, hier einschalten.

Die Parallelen-Theorie besteht nämlich aus zwey Sätzen.

Fig. 1. *Erstlich*: daſs zwey grade Linien AC und BD, die sich schneiden, mit einer dritten EF, an einerley Seite, ungleiche Winkel α und β machen.

Zweytens: daſs sich, umgekehrt, zwey grade Linien AC und BD, die mit einer dritten EF an einerley Seite ungleiche Winkel α und β machen, nothwendig schneiden müssen.

Der erste Satz wird strenge bewiesen nach (Euclid 1stes Buch 16ter Satz). Der zweyte Satz ist Euclid's eilftes Axiom, dessen Beweis fehlt und seit Euclid vergebens gesucht wird.

Diese beyden Sätze lassen sich auf folgende andre beide reduciren, nämlich

Erstlich: daſs sich zwey grade Linien, die mit einer dritten an einerley Seite gleiche Winkel machen, nirgend schneiden können, oder parallel sind, und

Zweytens, daſs zwey grade Linien, wenn sie sich nirgend schneiden, oder parallel sind, mit einer dritten, an einerley Seite, gleiche Winkel machen müssen.

Der erste dieser beyden andern Sätze folgt unmittelbar aus dem ersten der beyden obigen; denn schnitten sich die

Von der Mitte G der Linie AB ziehe man die grade EGF auf AC senkrecht, so behaupte ich, daſs diese nämliche grade Linie auch auf BD senkrecht seyn wird. Denn, der Voraussetzung nach, ist GAE + GBD gleich zweyen rechten. Die Summe von GBF und GBD ist ebenfalls gleich zweyen rechten (2ter Satz). Zieht man also GBD auf beyden Seiten ab, so bleibt GAE = GBF.

Linien, so würden sie, nach dem obigen ersten Satze, mit der dritten ungleiche Winkel machen, gegen die Voraussetzung.

Der zweyte Satz folgt eben so unmittelbar aus dem zweyten obigen; denn machten die Linien mit der dritten ungleiche Winkel, so schnitten sie sich, zufolge des Axioms, gegen die Voraussetzung.

Die veränderten Sätze kommen nun beyde in dem Satze vor, daſs die Summe der Winkel in jedem Dreyecke zweyen rechten gleich ist. Denn es sey

Fig. 2. DCE = ABC so ist DC mit AG parallel, vermöge des ersten Satzes. Ist aber DC mit AB parallel, so ist FAG = FCD, vermöge des zweyten Satzes, oder, weil die Scheitelwinkel FAG und BAC gleich sind, BAC = ACD, woraus folgt, daſs A + B + C = zwey rechten ist, weil ACB + ACD + DCE zwey rechte ausmachen. Kann man daher umgekehrt beweisen, daſs die drey Winkel eines Dreyecks zusammen zwey rechten gleich sind, so hat man, weil der erste der beyden obigen Sätze strenge erwiesen werden kann, den Beweis des zweyten oder des Axioms. Hiervon ist Legendre ausgegangen und sucht also zu beweisen, daſs die drey Winkel in einem Dreyeck zusammen gleich zwey rechten sind.

Dieser Beweis ist da, sobald man zeigen kann, daſs die Summe der drey Winkel im Dreyeck weder gröſser noch kleiner seyn kann als zwey rechte.

Das erste zeigt Legendre also:

Fig. 3. ABC sey das gegebene Dreyeck und ACD eine gerade Linie. Man mache CE = AC, DCE = BAC und DC = AB, so ist das Dreyeck DCE dem Dreyeck ABC gleich (6ter Satz), wäre nun BAC + ABC + BCA > 2 ϱ

Nun sind die Scheitelwinkel AGE und BGF einander gleich. Also haben die beyden Dreyecke AGE und BGF eine gleiche Seite zwischen zwey gleichen Winkeln. Folglich sind sie einander gleich (7ter Satz); mithin ist der Winkel BFG = AEG. Aber dieser Winkel ist, der Voraussetzung nach, ein rechter, also sind die graden Linien AC und BD auf eine und dieselbe

(ϱ bedeute einen rechten Winkel) so wäre BAC + ABC + BCA > BCA + DCE + BCD, weil die letzten drey Winkel zusammen gleich zwey rechten sind. Nimmt man also auf der einen Seite den Winkel BCA, auf der andern den Winkel BAC = DCE weg, so bleibt

$$ABC > BCD.$$

Da eben die Winkel ABC und BCD von gleichen Seiten BC = BC und AB = CD eingeschlossen sind, so folgt daraus, daſs

$$BD < AC$$

ist (9ter Satz). Man mache auf dieselbe Weise das Dreyeck EFG dem Dreyeck CDE oder ABC gleich, so wird eben so gezeigt, daſs DF < CE oder < AC und zwar ist auch nothwendig DF = BD weil Δ BCD = Δ DEF. Eben das läſst sich von FH, HK zeigen, so weit man will. Der Unterschied von BD und AC mag nun so klein seyn als man will, so kann doch ein beliebiges Vielfaches desselben, welches der Unterschied der ganzen Linie BDFHK von der Linie AI seyn würde, jede Gröſse erreichen, und folglich gröſser werden als die Summe der beyden Linien am Ende, AB und IK; folglich würde, unter der Voraussetzung, daſs A + B + C > 2ϱ seyn kann, worauf alles dieses beruht, die gebrochene Linie ABKI kürzer seyn können, als die grade AI. Da dieses unmöglich ist (3te Erkl.), so ist auch die Voraussetzung unmöglich. Folglich kann die Summe der drey Winkel eines Dreyecks *nicht gröſser* seyn als zwey rechte.

Um zu zeigen daſs auch die Summe der drey Winkel eines Dreyecks *nicht kleiner* seyn kann als zwey rechte,

Fig. 4. lege man, sagt Legendre, an die, dem kleinsten Winkel A eines gegebenen Dreyecks, gegenüberliegende

grade Linie EF senkrecht, folglich sind sie parallel (19ter Satz).

Zwey und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

Fig. 36. *Wenn die innern Winkel BAI und ABD,*

Seite BC ein Dreyeck DBC, welches ABC gleich ist, auf die Weise, daſs man DBC = BCA und DCB = CBA macht, und ziehe durch D eine beliebige grade Linie, die die verlängerten AB und AC z. B. in E und F schneidet. Wäre nun die Summe der drey Winkel in dem Dreyeck ABC kleiner als zwey rechte, und zwar $= 2\varrho - \delta$, so wäre auch die Summe der Winkel von DBC $= 2\varrho - \delta$, weil die Dreyecke einander gleich sind. Da nun die Summe der drey Winkel in jedem der beyden übrigen Dreyecke DEB und FDC, wie vorhin bewiesen, wenigstens nicht gröſser seyn kann als zwey rechte, so ist die Summe der 12 Winkel in allen vier Dreyecken der Figur höchstens

$$\left.\begin{array}{l} 4\varrho \\ +2\varrho-\delta \\ +2\varrho-\delta \end{array}\right\} = 8\varrho - 2\delta$$

Nun ist die Summe der 3 Winkel an jedem der drey Puncte B, C, D, $= 2\varrho$. Zieht man diese 9 Winkel, die also zusammen 6ϱ ausmachen, von jenen 12 Winkeln ab, so bleiben die 3 Winkel A, E und F des Dreyecks AEF übrig, die also höchstens $= 2\varrho - 2\delta$ sind. Daraus folgt, daſs wenn die 3 Winkel in dem kleinen Dreyecke ABC um δ weniger betragen als zwey rechte, die drey Winkel in dem gröſsern AEF schon um das doppelte, 2δ, von zwey rechten verschieden sind. Wiederholte man also die Zusammensetzung, so würden die Winkel in einem noch gröſsern Dreyecke von zwey rechten schon um 4δ abweichen u. s. w. So klein aber auch δ seyn mag, so kann ein beliebiges Vielfaches desselben doch jede beliebige Gröſse und also selbst 2ϱ übersteigen, woraus folgen würde, daſs die Summe der Winkel eines hinreichend groſsen Dreyecks = 0 oder selbst weniger als 0 seyn können. Da dieses unmöglich ist, so ist auch die Voraussetzung, daſs die Winkel im

welche zwey grade Linien AI und BD mit einer dritten AB machen, zusammen kleiner sind als zwey rechte, so schneiden sich die Linien AI und BD, verlängert, nothwendig.

Man ziehe AC, so, daſs der Winkel CAB dem Winkel ABF gleich sey; das heiſst so, daſs die beyden Winkel CAB und ABD zusammen zwey rechte ausmachen, und vollende die Zeichnung, wie beym vori-

Dreyeck kleiner seyn können als zwey rechte, unmöglich.

Also könnte die Summe der drey Winkel eines Dreyecks weder gröſser noch kleiner seyn als zwey rechte, woraus folgen würde, daſs sie zwey rechten gleich ist. Dadurch wäre also zugleich das euclidische eilfte Axiom bewiesen.

Die erste Hälfte dieses legendrischen Beweises, nämlich, daſs die Winkel in einem Dreyeck zusammen nicht gröſser seyn können als zwey rechte, ist unstreitig vollkommen strenge, wenigstens, wenn man die legendrischen Definitionen der graden Linie, des Winkels u. s. w. zuläſst. Diese Hälfte von dem Beweise des Axioms ist also Herrn Legendre wirklich gelungen. Der andre Theil aber hat eine schwache Stelle, nämlich da, wo verlangt wird, daſs durch E eine grade Linie EDF gezogen werden soll, die E und F zugleich schneidet. Denn daſs eine grade Linie z. B. durch E und D gezogen werden könne, leidet zwar keinen Zweifel, aber daſs eine solche Linie zugleich die andere Linie AF schneiden werde, muſs erst bewiesen werden, und der Beweis erfordert, wenn man auf den Grund geht, wiedernm das Axiom selbst. Also ist eigentlich nichts gewonnen. Legendre erkennt auch die Schwäche der erwähnten Stelle, denn er fügt in einer Anmerkung hinzu, man solle zum Winkel EAF den kleinsten des Dreyecks ABC wählen, um die Möglichkeit, daſs eine Linie durch D die beyden EA und FA zugleich schneiden könne, *fühlbarer* zu machen (afin de rendre plus *sensible* la possibilité qu' une ligne etc.). Allein die Fühlbarkeit ist wohl nicht hinreichend, sondern man bedarf des *Beweises*.

Es scheint, daſs alle Bemühungen, den Euclid auf euclidische Weise zu ergänzen, vergeblich sind, und daſs es

gen Satze. Weil der Winkel AEK ein rechter ist, so ist die Senkrechte AE kürzer als die schräge Linie AK; also ist in dem Dreyeck AEK der, der Seite AE gegenüberliegende, Winkel AKE kleiner als der rechte Winkel AEK, welcher der Seite AK gegenüber liegt (14ter Satz). Also ist der, dem Winkel AKE gleiche, Winkel IKF kleiner als ein rechter; also müssen sich die Linien KI und FD verlängert nothwendig schneiden (20ster Satz).

Anmerkung. Wenn die Linien AM und BD mit AB zwey Winkel BAM und ABD machten, deren Summe gröfser als zwey rechte wäre, so würden sich die Linien AM und BD nicht *über* sondern *unter* AB schneiden. Denn die beyden Winkel BAM und BAN sind zwey rechte, eben wie die beyden Winkel ABD und ABF; also sind diese vier Winkel zusammen gleich

grade der glänzendste Beweis von der tiefen Einsicht und dem grofsen Scharfsinn des alten Meisters ist, den Satz als Grundsatz gegeben und erkannt zu haben, dafs sich derselbe, nach seinen Ansichten, nicht beweisen lasse.

Indessen darf und mufs daraus doch meines Erachtens nicht geschlossen werden, dafs der Satz überhaupt keines Beweises fähig sey. Denn sonst hätte beynahe die ganze Geometrie, weil sie gröfstentheils auf der Parallelentheorie beruht, keinen festen Grund. Das eilfte Axiom kann, nach meiner Ueberzeugung, allerdings bewiesen werden, sobald man den Winkel und den Parallelraum als *Raumgröfsen* definirt. (Man sehe defshalb meine oben erwähnte Abhandlung über Parallelentheorien.) Diese Definition nicht zuzulassen wäre nicht billig, denn die Begriffe derselben sind noch klarer als selbst manche euclidische Definitionen, z. B. die der graden Linie, des Winkels etc. die wohl auch nicht viel mehr als Worte sind.

Legendre folgt Euclid, daher ist sein zwanzigster Satz nur Grundsatz, oder Satz ohne Beweis.

A. d. Uebers.

vier rechten. Aber die Summe der beyden Winkel BAM und ABD beträgt mehr als zwey rechte, also beträgt die Summe der beyden übrig bleibenden Winkel BAN und ABF weniger als zwey rechte; folglich müssen sich die beyden graden Linien AN und BF verlängert nothwendig schneiden.

Zusatz. Durch einen Punct A kann man nur eine einzige Parallele mit einer gegebenen Linie BD ziehen. Denn es giebt nur eine einzige Linie AC, für welche die Summe der beyden Winkel BAC und ABD zweyen rechten gleich ist; diese ist die verlangte Parallele. Für jede andere Linie AI oder AM würde die Summe der innern Winkel kleiner oder gröfser als zwey rechte seyn; folglich würde jede andere Linie die BD schneiden *).

Drey und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

Fig. 37. *Wenn zwey grade Linien AB und CD, welche parallel sind, von einer dritten EF geschnitten werden, so ist die Summe der innern Winkel AGO und GOC zwey rechten gleich.*

Denn wäre sie kleiner oder gröfser, so würden sich die graden Linien AB und CD auf einer oder der andern Seite der dritten begegnen (22ster Satz).

Erster Zusatz. Wenn der Winkel GOC ein rechter ist, so ist auch der Winkel AGO ein rechter; also ist jede Linie, die auf einer der Parallelen senkrecht steht, auch auf der andern senkrecht.

Zweyter Zusatz. Weil die Summe von AGO und GOC zweyen rechten gleich ist, und die Summe von

*) Der 22ste Satz hätte füglich mit dem 20sten zusammen gezogen werden können. A. d. Uebers.

GOD und GOC auch, so erhält man, wenn man auf der einen und der andern Seite GOC abzieht, AGO = GOD. Ferner ist AGO = BGE und GOD = COF (5ter Satz). Also werden die vier spitzen Winkel AGO, BGE, GOD, COF einander gleich seyn; eben so die vier stumpfen Winkel AGE, BGO, GOC, DOF. Auch ist zu bemerken, daſs, wenn man einen der vier spitzen Winkel zu einem der vier stumpfen hinzuthut, die Summe allemal zwey rechten gleich ist.

Anmerkung. Die vorhin genannten Winkel bekommen Paarweise verschiedene Namen. Die Winkel AGO und GOC heiſsen *innere Gegenwinkel.* Die Winkel BGO und GOD *heiſsen* eben so; die Winkel AGO und GOD heiſsen *innere Wechselwinkel* (*alternes - internes*). Eben so nennt man die Winkel BGO und GOC. Endlich heiſsen die Winkel EGB und GOD, oder EGA und GOC *Neigungswinkel* (*internes - externes*), und die Winkel EGB und COF oder AGE und DOF, *äuſsere Wechselwinkel* (*alternes - externes*). Nach dieser Bestimmung sind folgende Sätze schon bewiesen.

Erstlich. Innere Gegenwinkel betragen zusammen zwey rechte.

Zweytens. Innere und äuſsere Wechselwinkel, desgleichen Neigungswinkel, sind einander gleich.

Umgekehrt, wenn im zweyten Falle zwey gleichnamige Winkel gleich sind, so kann man schlieſsen, daſs die Linien, auf welche sie sich beziehen, parallel sind. Es sey z. B. AGO = GOD, so ist, weil GOC + GOD gleich zwey rechten ist, auch AGO + GOC gleich zwey rechten; folglich sind die Linien AG und CO parallel (21ster Satz).

Vier und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

Fig. 38. *Zwey Linien AB und CD, die mit einer dritten EF parallel sind, sind auch unter einander parallel.*

Man ziehe die Linie PQR, welche sie schneidet, senkrecht auf EF. Weil AB mit EF parallel ist, so ist PR auch auf AB senkrecht (1ster Zusatz 23ster Satz). Desgleichen ist PR auf CD senkrecht, weil CD mit EF parallel ist. Also sind AB und CD auf einer und derselben graden Linie PQ senkrecht; folglich sind sie parallel (19ter Satz).

Fünf und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

Zwey Parallelen sind überall gleich weit von einander entfernt.

Fig. 39. Es mögen die beyden Parallelen AB und CD gegeben seyn. Man errichte auf AB in zwey beliebigen Puncten die beyden Senkrechten EG und FH, so sind dieselben zugleich auf CD senkrecht (23ster Satz). Ich behaupte ferner, dafs diese graden Linien gleich lang seyn werden.

Denn man ziehe GF, so werden die Winkel GFE und FGH, in Rücksicht auf die Parallelen AB und CD, als Wechselwinkel, einander gleich seyn (Anmerkung zum 23sten Satz). Desgleichen weil die graden Linien EG und FH auf einer und derselben Linie AB senkrecht und folglich unter einander parallel sind, werden die Winkel EGF und GFH in Rücksicht auf die Parallelen GE und FH, ebenfalls als Wechselwinkel, einander gleich seyn. Folglich haben die beyden Dreyecke EFG und FGH eine gemeinschaftliche Seite FG an zwey Winkeln liegend, die einzeln einander gleich sind,

Mithin sind diese Dreyecke einander gleich (7ter Satz). Folglich ist die Seite EG, welche das Maaſs der Entfernung der Parallelen AB und CD im Puncte E ist, der Seite FH gleich, welche die Entfernung dieser nämlichen Parallelen im Punct F miſset.

Sechs und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

Fig. 40. *Wenn die Seiten zweyer Winkel BAC und DEF nach der nämlichen Seite hin einzeln parallel sind, so sind die Winkel einander gleich.*

Man verlängere, wenn es nöthig ist, DE, bis sie AC in G begegnet. Der Winkel DEF ist gleich dem Winkel DGC, weil EF mit GC parallel ist (23ster Satz). Der Winkel DGC ist gleich dem Winkel BAC, weil DG mit AC parallel ist. Also ist der Winkel DEF dem Winkel BAC gleich.

Anmerkung. In diesem Satze ist die Bedingung gemacht, daſs die Seite EF nach der nämlichen Seite hin liege, wie AC, und ED nach der nämlichen Seite hin, wie AB; dieses ist deshalb nöthig, weil sonst, wenn man EF nach H hin verlängerte, die Seiten des Winkels DEH mit den Seiten des Winkels BAC parallel seyn würden, ohne daſs die Winkel einander gleich wären. In diesem Falle würden der Winkel DEH und der Winkel BAC, zusammen zwey rechte ausmachen.

Sieben und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

In jedem Dreyeck ist die Summe der drey Winkel gleich zweyen rechten.

Fig. 41. ABC sey ein beliebiges Dreyeck. Man verlängere die Seite CA nach D hin, und ziehe im Punct A die grade Linie AE parallel mit BC.

Wegen der Parallelen AE und CB werden die Winkel ACB und DAE, in Rücksicht auf CAD, als Neigungswinkel, gleich seyn; desgleichen werden die Winkel ABC und BAE, in Rücksicht auf AB, als Wechselwinkel, gleich seyn. Folglich wird die Summe der drey Winkel des Dreyecks ABC eben so grofs seyn als die Summe der drey Winkel CAB, BAE und EAD; folglich wird diese Summe gleich zwey rechten seyn (3ter Zusatz 2ter Satz).

Erster Zusatz. Wenn zwey Winkel eines Dreyecks gegeben sind, oder auch nur blos ihre Summe, so wird man den dritten Winkel finden, wenn man die Summe jener beyden Winkel von zwey rechten abzieht.

Zweyter Zusatz. Wenn zwey Winkel eines Dreyecks zweyen Winkeln eines andern Dreyecks einzeln gleich sind, so wird der dritte Winkel des ersten Dreyecks dem dritten des andern gleich *), und die Dreyecke werden unter einander gleichwinklig seyn.

Dritter Zusatz. Kein Dreyeck kann mehr als einen rechten Winkel haben; denn hätte es zwey, so wäre der dritte Null. Noch weniger also kann ein Dreyeck mehr als einen stumpfen Winkel haben.

Vierter Zusatz. In jedem rechtwinkligen Dreyeck ist die Summe der beyden spitzen Winkel einem rechten gleich.

Fünfter Zusatz. Jedes gleichseitige Dreyeck ist auch gleichwinklig (12ter Satz). Jeder Winkel desselben ist zwey Drittheilen eines rechten gleich; so dafs sich, wenn der rechte Winkel zur Einheit der Winkel ange-

*) Dieses für sich allein ist auch schon der Fall, wenn nur die Summe zweyer Winkel in einem Dreyeck so grofs ist als in einem andern. A. d. Uebers.

nommen wird, der Winkel des gleichseitigen Dreyecks durch $\frac{2}{3}$ ausdrücken läfst.

Fig. 41. *Sechster Zusatz.* In jedem Dreyeck ABC ist der äufsere Winkel BAD, der Summe der beyden innern entgegengesetzten, B und C, gleich. Denn AE ist parallel mit BC. Der Theil BAE ist dem Winkel B gleich, der andre Theil DAE ist dem Winkel C gleich.

Acht und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

Die Summe aller innern Winkel eines Vielecks beträgt so viel mal zwey rechte, als die Zahl der Seiten Einheiten hat, weniger zwey.

Fig. 42. ABCDE sey das gegebene Vieleck. Zieht man aus dem Scheitel eines und desselben Winkels A, nach den Scheiteln aller entgegengesetzten Winkel, die Diagonalen AC, AD, AE, etc. so ist leicht zu sehen, dafs dadurch das Vieleck in fünf Dreyecke getheilt wird, wenn es sieben Seiten hat, in sechs Dreyecke, wenn es acht Seiten, und überhaupt in so viel Dreyecke, als es Seiten hat, weniger zwey; denn diese Dreyecke können so betrachtet werden, als hätten sie den Punct A zum gemeinschaftlichen Scheitel, und die verschiedenen Seiten des Vielecks, mit Ausnahme der beyden, welche den Winkel A einschliefsen, zu Grundlinien. Man sieht zugleich, dafs die Summe der Winkel aller dieser Dreyecke von der Summe der Winkel des Vielecks nicht verschieden ist. Also ist diese letzte Summe gleich so viel mal zwey rechten Winkeln, als Dreyecke vorhanden sind, das heifst, als die Zahl der Seiten des Vielecks Einheiten hat, weniger zwey.

Erster Zusatz. Die Summe der Winkel eines Vierecks ist gleich zwey rechten Winkeln, multiplicirt mit

4 — 2, welches vier rechte Winkel ausmacht. Sind also alle Winkel eines Vierecks einander gleich, so ist jeder einem rechten gleich, welches die 17te Erklärung rechtfertigt, wo vorausgesetzt wurde, daſs im Fall eines Rechtecks oder Quadrats, die vier Winkel eines Vierecks rechte sind.

Zweyter Zusatz. Die Summe der Winkel eines Fünfecks ist gleich zwey rechten Winkeln, multiplicirt mit 5 — 2, welches sechs rechte Winkel ausmacht. Ist also ein Fünfeck gleichwinklig, so ist jeder Winkel gleich dem fünften Theile von sechs rechten, oder gleich $\frac{6}{5}$ eines rechten Winkels.

Dritter Zusatz. Die Summe der Winkel eines Sechsecks ist gleich $2 \times (6 - 2)$, oder 8 rechten Winkeln. Im gleichwinkligen Sechseck ist also jeder Winkel gleich dem sechsten Theile von acht rechten Winkeln, oder gleich $\frac{4}{3}$ eines rechten Winkels, und so weiter.

Fig. 43. *Anmerkung.* Wenn man diesen Satz auf Vielecke anwenden will, die *einspringende* Winkel haben, so muſs man jeden einspringenden Winkel als einen solchen betrachten, der gröſser ist als zwey rechte. Aber um alle Schwierigkeiten zu vermeiden, werden wir für jetzt nur Vielecke mit *ausspringenden* Winkeln betrachten, welche man *convexe Vielecke* nennen kann. Ein convexes Vieleck ist ein solches, dessen Umfang jede mögliche grade Linie nur in zwey Puncten schneidet.

Neun und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

Die gegenüberliegenden Seiten eines Parallelogramms sind einander gleich. Eben so die gegenüber liegenden Winkel.

Fig. 44. Man ziehe die Diagonale BD. Die beyden Dreyecke ADB und DBC haben die Seite BD gemeinschaftlich; aufserdem ist wegen der Parallelen AD und BC, der Winkel ADB = DBC (23ster Satz) und wegen der Parallelen AB und CD, der Winkel ABD = BDC; also sind die beyden Dreyecke ADB und DBC einander gleich (7ter Satz); folglich ist die dem Winkel ADB gegenüberliegende Seite AB, der dem Winkel DBC gegenüberliegenden Seite DC gleich. Aehnlicherweise ist die dritte Seite AD der dritten Seite BC gleich; folglich sind die gegenüberliegenden Seiten eines Parallelogramms gleich.

Zweytens folgt aus der Gleichheit der nämlichen Dreyecke, dafs der Winkel A dem Winkel C gleich ist, desgleichen, dafs der Winkel ADC, welcher aus den beyden Winkeln ADB und BDC besteht, dem Winkel ABC gleich ist, welcher aus den beyden Winkeln DBC und ABD besteht; mithin sind die gegenüberliegenden Winkel eines Parallelogramms gleich.

Zusatz. Folglich sind zwey Parallelen AB und CD, die zwischen zwey andern Parallelen AD und BC liegen, einander gleich.

Dreyssigster Satz.

Lehrsatz.

Fig. 44. *Wenn in einem Viereck ABCD die gegenüberliegenden Seiten gleich sind, so dafs AB = CD und AD = BC, so sind die gleichen Seiten parallel und die Figur ist ein Parallelogramm.*

Denn man ziehe die Diagonale BD, so werden in den beyden Dreyecken ABD und BDC, alle drey Seiten einzeln gleich seyn; folglich werden die Dreyecke gleich seyn; mithin ist der der Seite AB gegenüber-

liegende Winkel ADB, dem der Seite CD gegenüberliegenden Winkel DBC gleich; folglich ist die Seite AD mit BC parallel (23ster Satz). Aus gleichen Gründen ist AB mit CD parallel; folglich ist das Viereck ABCD ein Parallelogramm.

Ein und dreyssigster Satz.

Lehrsatz.

Fig. 44. *Wenn in einem Viereck zwey gegenüberliegende Seiten AB und CD gleich und parallel sind, so sind auch die andern beyden Seiten gleich und parallel, und die Figur ABCD ist ein Parallelogramm.*

Man ziehe die Diagonale BD. Weil AB mit CD parallel ist, so sind die Wechselwinkel ABD und BDC einander gleich (23ster Satz). Ferner ist die Seite AB = DC, die Seite DB aber ist gemeinschaftlich; mithin ist das Dreyeck ABD dem Dreyeck DBC gleich (6ter Satz); folglich ist die Seite AD = BC, und der Winkel ADB = DBC, also AD mit BC parallel; folglich ist die Figur ABCD ein Parallelogramm.

Zwey und dreyssigster Satz.

Lehrsatz.

Die beyden Diagonalen eines Parallelogramms theilen sich wechselseitig in zwey gleiche Theile.

Fig. 45. Denn vergleicht man das Dreyeck ADO mit dem Dreyeck COB, so findet man, dafs die Seite AD = CB, der Winkel ADO = CBO (23ster Satz), und der Winkel DAO = OCB; folglich sind diese beyden Dreyecke einander gleich (7ter Satz); mithin ist die dem Winkel ADO gegenüberliegende Seite AO gleich der dem Winkel OBC gegenüberliegenden Seite OC; folglich ist auch DO = OB.

Anmerkung. In der Raute (losange) sind die Seiten AB und BC einander gleich; folglich sind in den Dreyecken AOB und OBC alle drey Seiten einzeln gleich; mithin sind die Dreyecke selbst einander gleich; woraus folgt: dafs der Winkel AOB = BOC, und dafs sich folglich die beyden Diagonalen einer Raute unter rechten Winkeln schneiden.

Zweytes Buch.

Vom Kreise und dem Maafse der Winkel.

Erklärungen.

Fig. 46. I. *Der Kreisumfang* ist eine krumme Linie, deren sämmtliche Puncte gleich weit von einem Puncte innerhalb entfernt sind, welcher *Mittelpunct* heifst.

Der Kreis ist der, von jener krummen Linie begrenzte Raum.

Anm. Man verwechselt zuweilen im gemeinen Leben den Kreis mit seinem Umfange; es ist aber leicht, sich genauer auszudrücken, wenn man sich erinnert, dafs der Kreis eine *Fläche* ist, welche Länge und Breite hat, während der Umfang nur aus einer *Linie* besteht.

II. Jede vom Mittelpunct nach dem Umfange gezogene grade Linie heifst *Radius* oder *Halbmesser*; jede grade Linie, welche durch den Mittelpunct geht, und an beyden Enden vom Kreisumfange begrenzt ist, heifst *Durchmesser.*

Nach dieser Erklärung des Kreises, sind alle Halbmesser gleich lang; alle Durchmesser sind ebenfalls gleich lang, und dem doppelten Halbmesser gleich.

III. Einen Theil des Kreisumfanges wie FHG, nennt man *Bogen.*

Die Sehne eines Bogens ist die grade Linie FG, welche seine beyden Enden verbindet.

IV. *Abschnitt* heifst die Fläche oder der Theil eines Kreises, welcher zwischen dem Bogen und der Sehne liegt.

Anm. Zu der nämlichen Sehne FG gehören allemal zwey Bogen FHG und FEG, folglich auch zwey Abschnitte; aber man versteht allemal den kleinern, wenn nicht ausdrücklich der andere bestimmt wird.

V. *Ausschnitt* heiſst der Theil des Kreises, welcher zwischen einem Bogen DE und zwey Halbmessern CD und CE liegt, die nach den Enden des Bogens gezogen sind.

Fig. 47. VI. Man nennt eine Linie in den Kreis *eingeschrieben*, wenn ihre Enden in dem Kreisumfange liegen, wie AB.

Ein Winkel heiſst *eingeschrieben*, wenn sein Scheitel, wie der des Winkels BAC, in dem Kreisumfange liegt, seine Schenkel aber Sehnen sind.

Ein Dreyeck heiſst *eingeschrieben*, wenn die Scheitel seiner drey Winkel B, A, C in dem Kreisumfange liegen.

Im allgemeinen heiſst eine Figur *eingeschrieben*, wenn die Scheitel aller ihrer Winkel in dem Kreisumfange liegen; auch sagt man dann: der Kreis sey *um* die Figur beschrieben.

Fig. 48. VII. *Secante* heiſst eine Linie, welche den Kreisumfang in zwey Puncten schneidet.

VIII. *Tangente* heiſst eine Linie, welche nur einen Punct mit dem Umfange gemein hat, wie CD *).

*) Beym Kreise ist diese Erklärung der Tangenten allenfalls passend; allein für andere krumme Linien giebt es auch grade, die, obgleich sie nur einen Punct mit der krummen gemein haben, dennoch keinesweges Tangenten sind. Daher ist es vielleicht besser, die allgemeine Erklärung der Tangente, daſs sie diejenige grade Linie sey, zwischen welcher und der krummen keine andere grade Linie gezogen werden könne, ohne die krumme zu schneiden, auch auf die Kreistangente anzuwenden.

Der gemeinschaftliche Punct M, heifst der Berührungspunct.

IX. Eben so sind zwey Kreisumfänge *berührende*, wenn sie nur einen Punct gemein haben *).

Fig. 160. X. Ein Vieleck heifst *um* den Kreis beschrieben; wenn alle seine Seiten Tangenten des Umfanges sind; in diesem Falle sagt man: der Kreis sey in das Vieleck *eingeschrieben*.

Erster Satz.

Lehrsatz.

Fig. 49. *Jeder Durchmesser AB theilt den Kreis und seinen Umfang in zwey gleiche Theile.*

Denn wenn man die Figur AEB auf AFB legt, indem man AB zur gemeinschaftlichen Grundlinie macht: so mufs die krumme Linie AEB genau auf die krumme Linie AFB fallen, weil sonst, in der einen oder der andern, Puncte seyn müfsten, die vom Mittelpuncte ungleich weit abstehen, der Erklärung des Kreises zuwider.

Zweyter Satz.

Lehrsatz.

Jede Sehne ist kleiner als der Durchmesser.

Fig. 49. Denn, wenn man von den Enden der Sehne AD, die Halbmesser AC und CD zieht, so ist die grade Linie AD kürzer als AC + CD oder AD < AB.

Zusatz. Also ist die längste grade Linie, die sich in einen Kreis beschreiben läfst, der Durchmesser.

*) Hier findet eine ähnliche Bemerkung statt, wie zu VIII.

Dritter Satz.

Lehrsatz.

Eine grade Linie kann einen Kreisumfang in nicht mehr als zwey Puncten schneiden.

Denn schnitte sie ihn in drey Puncten, so würden diese drey Puncte gleich weit vom Mittelpunct entfernt seyn; folglich würde es drey gleich lange grade Linien von einem und demselben Puncte nach einer und derselben graden Linie geben, welches unmöglich ist. (1stes Buch 16ter Satz.)

Vierter Satz.

Lehrsatz.

In einem und demselben Kreise, oder in gleichen Kreisen, liegen gleiche Bogen über gleichen Sehnen, und umgekehrt, gleiche Sehnen unter gleichen Bogen.

Fig. 50. Wenn der Halbmesser AC, dem Halbmesser EO und der Bogen AMD dem Bogen ENG gleich ist; so behaupte ich, die Sehnen AD und EG sind gleich.

Denn weil der Durchmesser AB dem Durchmesser EF gleich ist; so kann der Halbkreis AMBD genau auf den Halbkreis ENGF gelegt werden, und die krumme Linie AMDB fällt ganz in die krumme Linie ENGF.

Man nahm aber an, der Theil AMD sey dem Theile ENG gleich; also wird der Punct D auf den Punct G fallen; folglich ist die Sehne AD der Sehne EG gleich.

Wenn wiederum der Halbmesser AC = EO, und umgekehrt die Sehne AD = EG ist, so behaupte ich, daſs die Bogen AMD und ENG gleich sind.

Denn man ziehe die Halbmesser CD und OG, so sind alle drey Seiten des Dreyecks ACD einzeln, denen des Dreyecks EOG gleich, nämlich AC = EO, CD = OG und AD = EG, folglich sind diese Dreyecke gleich (1s B. 11r S.); mithin ist der Winkel ACD = EOG. Legt man aber den Halbkreis ADB, auf den ihm gleichen Halbkreis EGF, so ist klar, daſs, weil der Winkel ACD = EOG, der Halbmesser CD, auf den Halbmesser OG, und der Punct D auf den Punct G fallen müsse; folglich ist der Bogen AMD, dem Bogen ENG, gleich.

Fünfter Satz.

Lehrsatz.

In einem und demselben Kreise, oder in gleichen Kreisen, liegt unter einem gröſsern Bogen eine gröſsere Sehne, und umgekehrt über einer gröſsern Sehne ein gröſserer Bogen, jedoch in der Voraussetzung, daſs die Bogen kleiner als Halbkreise sind.

Fig. 50. Denn der Bogen AH, sey gröſser als AD. Man ziehe die Sehnen AD, AH, und die Halbmesser CD, CH; so sind die beyden Seiten AC und CH des Dreyecks ACH, den beyden Seiten AC und CD des Dreyecks ACD gleich; der Winkel ACH aber ist gröſser als ACD, also ist die dritte Seite AH gröſser als die dritte Seite AD (1s B. 10r S.); folglich die Sehne, welche unter einem gröſsern Bogen liegt, die gröſsere.

Umgekehrt, wenn die Sehne AH gröſser seyn soll als AD, folgt aus den nämlichen Dreyecken, daſs der Winkel ACH gröſser ist als ACD, also der Bogen AH gröſser als AD.

Anmerkung. Wir nehmen die Bogen kleiner an als den Halbkreis. Wären sie gröſser, so würde das

Entgegengesetzte statt finden: die Sehne würde kleiner seyn, wenn der Bogen gröfser ist, und umgekehrt. Zum Beyspiel, wenn der Bogen AKBD gröfser ist, als AKBH, so ist die Sehne AD des ersten kleiner als die Sehne AH des zweyten.

Sechster Satz.

Lehrsatz.

Fig. 51. *Der Halbmesser CG, welcher auf der Sehne AB senkrecht steht, theilt solche, nebst dem zu ihr gehörigen Bogen, in zwey gleiche Theile.*

Man ziehe die Halbmesser CA und CB, so sind diese Halbmesser in Beziehung auf die senkrechte Linie CD zwey gleich lange schräge Linien. Sie entfernen sich also gleich weit von der senkrechten (1s B. 16r S.); folglich ist AD = DB.

Sodann ist CG mitten auf AB senkrecht, weil AD = DB; folglich ist jeder Punct dieser senkrechten von den Enden A und B gleich weit entfernt (1s B. 17r S.). G ist einer dieser Puncte, also ist AG = BG. Wenn aber die Sehne AG der Sehne BG gleich ist, so ist auch der Bogen AG dem Bogen BG gleich (4r Satz); folglich theilt der auf der Sehne AB senkrechte Halbmesser CG den zu ihr gehörigen Bogen im Puncte G in zwey gleiche Theile.

Anmerkung. Der Mittelpunct C, die Mitte D der Sehne AB, und die Mitte G des zu dieser Sehne gehörigen Bogens sind drey Puncte, welche in einer und derselben, auf der Sehne senkrechten, graden Linie liegen. Zur Bestimmung der Lage einer graden Linie sind aber schon zwey Puncte hinreichend; also geht eine grade Linie, wenn sie zwey der erwähnten Puncte enthält, allemal nothwendig durch den dritten und ist auf der Sehne senkrecht.

Auch folgt, dafs die auf die Mitte einer Sehne senkrecht gezogene grade Linie, durch den Mittelpunct des Kreises, und durch die Mitte des zu der Sehne gehörigen Bogens geht.

Denn diese senkrechte Linie ist keine andere als die aus dem Mittelpunct des Kreises auf die Sehne gezogene, weil beyde durch den Mittelpunct der Sehne gehen.

Siebenter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 52. *Durch drey nicht in grader Linie liegende Puncte A, B, C, kann man immer einen Kreisumfang legen; aber nur einen.*

Man ziehe AB und BC, und theile diese beyden graden Linien in zwey gleiche Theile, mittelst der senkrechten DE und FG, so behaupte ich, dafs sich diese senkrechten in irgend einem Puncte O schneiden.

Denn die Linien DE und FG müssen sich nothwendig schneiden, wenn sie nicht parallel sind. Angenommen, sie wären parallel, so würde die auf DE senkrechte Linie AB auch auf FG senkrecht (1s B. 23r S.), und der Winkel K würde ein rechter seyn müssen. Aber BK, die Verlängerung von BD, ist von BF verschieden, weil die drey Puncte A, B und C nicht in gerader Linie liegen sollen; folglich würde es aus einem und demselben Puncte auf die nämliche Linie zwey senkrechte BF und BK geben, welches unmöglich ist (1s B. 15r S.); folglich müssen sich die Perpendikel DE und FG allemal in irgend einem Puncte O schneiden.

Nun ist der Punct O, weil er in der senkrechten DE liegt, von A und B gleich weit entfernt (1s B. 17r S.). Der nämliche Punct aber, weil er zu der

Senkrechten FG gehört, ist auch von B und C gleich weit entfernt; folglich sind die drey Entfernungen OA, OB und OC einander gleich; mithin geht der um den Mittelpunct O mit dem Halbmesser OB beschriebene Kreisumfang durch die drey gegebenen Puncte A, B, C.

Dadurch ist bewiesen, dafs man durch drey gegebene, nicht in grader Linie liegenden Puncte immer einen Kreisumfang legen könne. Ich behaupte ferner, dafs nur ein einziger Kreisumfang durch die drey Puncte gelegt werden kann.

Denn könnte ein zweyter Kreisumfang durch die drey Puncte A, B und C gehen, so könnte erstlich sein Mittelpunct nicht aufser der Linie DE liegen (1s B. 17r S.), weil er sonst von A und B ungleich weit entfernt seyn würde. Er könnte zweytens eben so wenig aufser der Linie FG liegen, aus dem nämlichen Grunde; folglich müfste er nothwendig immer in den beyden Linien DE und FG zugleich liegen. Zwey grade Linien können sich aber nur in einem Puncte schneiden, folglich kann durch drey gegebene Puncte nur ein Kreisumfang gehen.

Zusatz. Zwey Kreisumfänge können sich nur in zwey Puncten schneiden: denn hätten sie drey Puncte gemein, so würden sie einen und denselben Mittelpunct haben, und folglich nur einen und denselben Kreisumfang bilden.

Achter Satz.

Lehrsatz.

Gleiche Sehnen sind gleichweit vom Mittelpuncte entfernt, und von zwey ungleichen Sehnen ist die kleinste vom Mittelpuncte am weitesten entfernt.

Fig. 53. I. Es sey die Sehne AB = DE: Man halbire diese Sehnen mittelst der senkrechten Linien CF und CG, und ziehe die Halbmesser CA und CD.

In den rechtwinkligen Dreyecken CAF und DCG sind die Hypothenusen gleich lang, und die Seite AF, weil sie die Hälfte von AB ist, kommt der Seite DG gleich, welche die Hälfte von DE seyn soll; folglich sind diese Dreyecke gleich (1s B. 18r S.) und die dritte Seite CF ist der dritten Seite CG gleich; folglich sind erstlich zwey gleiche Sehnen AB und DE gleich weit vom Mittelpunct entfernt.

II. Die Sehne AH sey gröfser als DE, so wird der Bogen AKH gröfser seyn als der Bogen DME (5ter Satz). Auf dem Bogen AKH nehme man den Theil ANB = DME, ziehe die Sehne AB und fälle CF senkrecht auf diese Sehne, CI aber senkrecht auf AH, so ist klar, dafs CF gröfser ist als CO, und CO gröfser als CI (1s B. 16r S.); also ist um so mehr CF > CI. Es ist aber CF = CG, weil die Sehnen AB und DE gleich sind. Also ist CG > CI; folglich ist von zwey ungleichen Sehnen die kleinste vom Mittelpunct am weitesten entfernt.

Neunter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 54. *Die auf dem Halbmesser CA am Ende desselben senkrechte grade Linie BD, ist eine Tangente des Kreisumfanges.*

Denn jede schräge Linie CE, ist länger als die senkrechte CA (1s B. 16r S.); folglich liegt jeder Punct E aufser dem Kreise; mithin hat die Linie BD nur allein den Punct A mit dem Kreise gemein; folglich ist BD eine Tangente (8te Erkl.).

Anmerkung. Man kann durch einen gegebenen Punct A, nur eine einzige Tangente an den Kreisumfang ziehen; denn könnte man noch eine zweyte ziehen, so würde dieselbe nicht mehr senkrecht auf dem Halbmesser seyn; in Rücksicht auf diese neue Tangente würde also der Halbmesser eine schräge Linie seyn, und die aus dem Mittelpunct auf sie senkrecht gezogene grade Linie würde kürzer als CA seyn. Die vermeintliche zweyte Tangente würde also in den Kreis hineintreten, und folglich vielmehr eine Secante seyn.

Zehnter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 55. *Zwischen zwey Parallelen AB und DE liegen vom Kreisumfange gleiche Bogen MN und PQ.*

Es können drey Fälle Statt finden.

I. Wenn die beyden Parallelen Secanten sind, so ziehe man den Halbmesser CH senkrecht auf die Sehne MP; er wird zugleich senkrecht auf der Parallele NQ von MP seyn (1s B. 23r S.); folglich wird der Punct H zu gleicher Zeit die Mitte der Bogen MHP und NHQ seyn (6ter Satz). Also wird der Bogen MH = HP, und der Bogen NH = HQ seyn, woraus folgt: MH — NH = HP — HQ, das heifst MN = PQ.

Fig. 56. II. Wenn eine von den beyden Parallelen eine Secante, die andere eine Tangente ist, so ziehe man im Berührungspunct H den Halbmesser CH. Dieser Halbmesser wird auf der Tangente DE, und zugleich auf deren Parallele MP senkrecht seyn (9ter Satz); weil aber CH auf der Sehne MP senkrecht ist, so ist der Punct H die Mitte des Bogens MHP; folglich sind die Bogen MH und HP zwischen den Parallelen AB und DE gleich.

III. Endlich, wenn die Parallelen DE und IL beyde Tangenten sind, die eine in H, die andere in K, so ziehe man die Secante AB mit ihnen parallel. Dann ist vermöge des eben bewiesenen Satzes, MH = HP und MK = KP, also der ganze Bogen HMK = HPK. Auch sieht man, daſs jeder dieser Bogen die Hälfte des Kreisumfanges ist.

Eilfter Satz.

Lehrsatz.

Wenn sich zwey Kreisumfänge in zwey Puncten schneiden, so steht die grade Linie durch ihre Mittelpuncte auf der Sehne senkrecht, welche die Durchschnittspuncte verbindet, und theilt dieselbe in zwey gleiche Theile.

Fig. 57 und 58. Denn die Linie AB, welche die Durchschnittspuncte verbindet, ist eine, beyden Kreisen gemeinschaftliche Sehne. Errichtet man auf dieser Sehne eine Linie senkrecht, so muſs sie durch beyde Mittelpuncte C und D gehen (6ter Satz). Durch zwey Puncte kann aber nur eine grade Linie gezogen werden; also ist die grade Linie, welche durch die Mittelpuncte geht, zugleich durch die Mitte der gemeinschaftlichen Sehne auf ihr senkrecht.

Zwölfter Satz.

Lehrsatz.

Wenn die Entfernung der Mittelpuncte zweyer Kreise kleiner als die Summe der Halbmesser ist, der gröſsere Halbmesser aber zugleich kleiner als die Summe des kleinern und der Entfernung der Mittelpuncte ist, so schneiden sich die Kreisumfänge.

Fig. 57 und 58. Denn, damit das Schneiden Statt finde, muſs das Dreyeck CAD möglich seyn: Es muſs

(Fig. 57) also nicht allein CD $<$ AC + AD, sondern auch der (Fig. 58) gröfsere Halbmesser AD $<$ AC + CD seyn. Sobald das Dreyeck CAD gezeichnet werden kann, werden sich offenbar die aus den Mittelpuncten C und D beschriebenen Kreisumfänge in A und B schneiden.

Dreyzehnter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 59. *Wenn die Entfernung CD der Mittelpuncte zweyer Kreise der Summe ihrer Halbmesser CA und AD gleich ist, so werden sich die Kreise äufserlich berühren.*

Es ist klar, dafs sie den Punct A gemein haben werden, aber auch nur diesen Punct; denn um *zwey* Puncte gemeinschaftlich zu haben, müfste die Entfernung der Mittelpuncte kleiner als die Summe der Halbmesser seyn.

Vierzehnter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 60. *Wenn die Entfernung der Mittelpuncte zweyer Kreise dem Unterschiede ihrer Halbmesser CA und AD gleich ist, so werden sich die Kreise innerhalb berühren.*

Zuerst ist klar, dafs sie den Punct A gemeinschaftlich haben werden, aber auch nur diesen; denn wäre es anders, so müfste der gröfsere Halbmesser AD kleiner als die Summe des Halbmessers AC, und der Entfernung der Mittelpuncte seyn (12ter Satz), welches nicht der Fall ist.

Zusatz. Wenn sich also zwey Kreise äusserlich oder innerlich berühren, so liegen die Mittelpuncte und der Berührungspunct in einer und derselben graden Linie.

Fig. 59 und 60. *Anmerkung.* Alle Kreise, deren Mittelpuncte auf der Linie CD liegen, und welche durch

den Punct (Fig. 59 und 60) A gehen, berühren sich; sie haben nur den einen Punct A gemeinschaftlich. Und wenn man aus dem Puncte A die Linie AE auf CD senkrecht zieht, so wird die grade Linie AE eine, den beyden Kreisen gemeinschaftliche Tangente seyn.

Funfzehnter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 61. *In einem und demselben Kreise, oder in gleichen Kreisen schliessen gleiche Winkel ACB und DCE, deren Scheitel im Mittelpuncte liegen, gleiche Bogen AB und DE vom Umfange ein. Umgekehrt, wenn die Bogen AB und DE gleich sind, so sind auch die Winkel ACB und DCE gleich.*

Denn I. können die Winkel ACB und DCE, wenn sie gleich sind, auf einander gelegt werden; und weil ihre Schenkel gleich lang sind, so ist klar, daſs der Punct A in D, und der Punct B in E fallen wird. Dann aber muſs auch der Bogen AB auf den Bogen DE fallen; denn fielen die Bogen nicht in einem zusammen, so würde es, in dem einen oder dem andern, Puncte in ungleichen Entfernungen vom Mittelpuncte geben, welches unmöglich ist; folglich ist der Bogen AB = DE.

II. Wenn AB = DE seyn soll, so behaupte ich, daſs der Winkel ACB dem Winkel DCE gleich ist; denn wären diese Winkel einander nicht gleich, so sey ACB der gröſsere, und ACI = DCE. Alsdann ist, vermöge des vorhin bewiesenen Satzes AI = DE; aber der Voraussetzung nach ist AB = DE; folglich würde seyn AI = AB, oder der Theil dem Ganzen gleich, welches unmöglich ist; folglich ist der Winkel ACB = DCE.

Sechszehnter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 62. *Wenn sich in einem und demselben Kreise, oder in gleichen Kreisen, zwey Winkel am Mittelpuncte ACB und DCE wie zwey ganze Zahlen verhalten, so verhalten sich die eingeschlossenen Bogen AB und DE wie die nämlichen Zahlen, und man hat die Proportion*

Winkel ACB : Winkel DCE = Bogen AB : Bogen DE *).

Man setze zum Beyspiel, daſs sich die Winkel ACB und DCE, wie 7 zu 4 verhalten, oder, was daſselbe ist. man setze, der Winkel M, welcher zum gemeinschaftlichen Maaſse dient, sey siebenmal in dem Winkel ACB, und viermal in dem Winkel DCE enthalten. Da die Theile des Winkels ACm, mCn, nCp etc., Dcx, xCy etc., unter einander gleich sind, so werden die Theile des Bogens Am, mn, np etc., Dx, xy etc., einander ebenfalls gleich seyn (15ter Satz); folglich wird sich der ganze Bogen AB zum ganzen Bogen DE wie 7 zu 4 verhalten. Es ist aber klar, daſs der Beweis immer Statt findet, wenn man auch statt 7 und 4 beliebige andere Zahlen annimmt. Kann man also nur das Verhältniſs der Winkel ACB und DCE in ganzen Zahlen ausdrücken, so werden sich die Bogen AB und DE allemal wie die Winkel ACB und DCE verhalten.

*) Es wäre vielleicht gut gewesen, vorher eine Erklärung der Proportion zu geben, ehe sie gebraucht wird, um so mehr, weil der Begriff der Proportion auſserdem entbehrlich ist. Denn z. B. hier könnte der Satz so ausgedrückt werden: In einem und demselben Kreise, oder in gleichen Kreisen, sind zwey Bogen und die zugehörigen Winkel am Mittelpuncte von einander Gleichvielfache.

A. d. Uebers.

Anmerkung. Umgekehrt: wenn sich die Bogen AB und DE, wie ganze Zahlen verhalten, werden sich auch die Winkel ACB und DCE wie die nämlichen Zahlen verhalten, und es wird immer seyn ACB: DCE = AB : DE; denn die Theile des Bogens, Am, mn etc., Dx, xy etc., sind gleich, und die Theile des Winkels, ACm, mCn etc., Dcx, xCy etc. ebenfalls.

Siebzehnter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 63. *Jedes beliebige Verhältniſs der Winkel ACB und ACD ist immer dasjenige der Bogen AB und AD, welche zwischen ihren Schenkeln liegen, und aus ihren Scheiteln mit gleichen Halbmessern beschrieben sind.*

Man lege den kleinern Bogen auf den gröſsern. Fände das Behauptete nicht Statt, so würde sich der Winkel ACB zum Winkel ACD verhalten wie der Bogen AB zu irgend einem gröſsern oder kleinern Bogen, als AD. Angenommen zu einem gröſsern AO, so wird seyn:

Winkel ACB : Winkel ACD = Bogen AB : Bogen AO.

Nun werde der Bogen AB in gleiche Theile getheilt, deren jeder kleiner ist als DO, so wird wenigstens ein Theilungspunct zwischen D und O fallen. Derselbe sey I. Man ziehe CI, so werden sich die Bogen AK, AI wie zwey ganze Zahlen verhalten, und es wird also vermöge des vorigen Lehrsatzes seyn:

Winkel ACB : Winkel ACI = Bogen AB : Bogen AI.

Man vergleiche die beyden obigen Proportionen mit einander und bemerke, daſs die Vorderglieder gleich sind, so folgt, daſs die hintern Glieder proportional seyn müssen, und daſs sich also verhält:

Winkel ACD : Winkel ACI = Bogen AO : Bogen AI.

Aber der Bogen AO ist gröfser als der Bogen AI: es müfste also auch, wenn die Proportion Statt fände, der Winkel ACD gröfser als der Winkel ACI seyn: er ist aber im Gegentheil kleiner; also ist es unmöglich, dafs sich der Winkel ACB zum Winkel ACD verhalte, wie der Bogen AB zu einem gröfsern Bogen als AD.

Durch ein gleiches Raisonnement läfst sich beweisen, dafs das vierte Glied der Proportion auch nicht kleiner seyn kann, als AD. Es ist also genau gleich AD, und es findet die Proportion Statt

Winkel ACB : Winkel ACD = Bogen AB : Bogen CD *).

Zusatz. Weil der Winkel am Mittelpuncte eines Kreises, und der zwischen seinen Schenkeln liegende Bogen so in Verbindung stehen, dafs, wenn der eine in irgend einem Verhältnifs zu oder abnimmt, der andere in dem nämlichen Verhältnifs gröfser oder kleiner wird, so ist man berechtigt, eine dieser Gröfsen zum Maafse der andern anzunehmen. Wir werden also fortan den Bogen AB zum Maafse des Winkels ACB gebrauchen. Bey der Vergleichung der Winkel unter einander ist nur zu beobachten, dafs die Bogen, welche

*) Der Beweis, dafs zwey Gröfsen, von welchen gezeigt worden, dafs sie sich wie zwey andere verhalten, im Fall beyde Paare von Gröfsen ein gemeinschaftliches Maafs haben, eben dieses Verhältnifs auch noch in dem Falle behalten, wenn sie incommensurabel sind, darf gewifs niemals übergangen werden. Der Beweis kommt in der Geometrie öfter vor, und man könnte die Wiederholung desselben ersparen, wenn man den Satz allgemein zeigte.
A. d. Uebers.

ihnen zum Maafse dienen, mit gleichen Halbmessern beschrieben seyn müssen; denn dieses setzen alle obigen Sätze voraus.

Erste Anmerkung. Es scheint zwar viel natürlicher, eine Gröfse durch eine andere Gröfse ihrer Art zu messen, und folglich passend alle Winkel auf den rechten zu beziehen. Wenn der rechte Winkel die Einheit des Maafses wäre, so würde ein spitzer Winkel durch eine Zahl ausgedrückt werden können, die zwischen 0 und 1 liegt, ein stumpfer Winkel durch eine Zahl zwischen 1 und 2. Aber diese Art die Winkel zu messen ist nicht practisch bequem, deshalb hat man es besser gefunden, die Winkel durch die zugehörigen Kreisbogen auszudrücken, weil es nämlich leicht ist, Bogen zu beschreiben, die gegebenen Bogen gleich sind, und aus andern Gründen. Obgleich dieses Messen der Winkel durch Kreisbogen in gewisser Art indirect ist, so ist es dennoch leicht, dadurch auf das directe und absolute Maafs zu kommen; denn vergleicht man den Bogen, welcher zum Maafse eines Winkels dient, mit dem vierten Theile des Kreisumfanges, so findet man das Verhältnifs des gegebenen Winkels zu einem rechten, welcher das absolute Maafs ist *).

Zweyte Anmerkung. Alles was in den drey letzten Sätzen von der Vergleichung der Winkel mit ihren Bogen gesagt worden, findet auch bey der Vergleichung der Ausschnitte mit ihren Bogen Statt. Denn die Aus-

*) Es ist unbestimmt, wenn man einen Winkel durch eine Zahl von *Graden* bezeichnet, in sofern nicht ausdrücklich dabey gesagt wird, in wie viel Grade der rechte Winkel getheilt werden soll. Ein Grad ist eine gänzlich willkührliche Gröfse und der rechte Winkel, kann mit gleichem Recht in 100 oder in jede beliebige andere Zahl von Graden getheilt werden, als in 90.

schnitte sind gleich, wenn es die Winkel sind, und verhalten sich allgemein wie die Winkel; die beyden Ausschnitte ACB und ACD in einem und demselben Kreise, oder in gleichen Kreisen, verhalten sich wie die Bogen AB und AD, die ihre Grundlinien sind.

Man sieht daraus, dafs die Kreisbogen, welche zum Maafse der Winkel dienen, zugleich das Maafs der verschiedenen Ausschnitte in einem und demselben Kreise, oder in gleichen Kreisen, abgeben.

Achtzehnter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 64 und 65. *Der eingeschriebene Winkel BAD hat zum Maafs die Hälfte des Bogens BD zwischen seinen Schenkeln.*

Man setze zuerst, der Mittelpunct des Kreises liege innerhalb des Winkels BAD. Man ziehe den Durchmesser (Fig. 64.) AE und die Halbmesser CB und CD. Der äufsere Winkel BCE am Dreyeck ABC, ist der Summe der beyden innern CAB und ABC gleich (1s B. 23r S.). Da nun das Dreyeck BAC gleichschenklig, also der Winkel CAB = ABC ist, so ist der Winkel BCE doppelt so grofs als BAC. Der Winkel BCE als Winkel vom Mittelpunct hat zum Maafse den Bogen BE, also hat der Winkel BAC die Hälfte von BE zum Maafse. Aus dem nämlichen Grunde wird der Winkel CAD die Hälfte von ED zum Maafse haben, also wird BAC + CAD oder BAD die Hälfte von BE + ED seyn, oder die Hälfte von DB zum Maafse haben.

Man setze zweytens, der Mittelpunct C liege aufser dem Winkel BAD; alsdann wird der Winkel BAE, wenn man den Durchmesser AE zieht, die Hälfte von BE zum Maafse haben, und der Winkel DAE die Hälfte von DE; folglich wird ihr Unterschied BAD zum

Maaſse die Hälfte von BE, weniger der Hälfte von ED, oder die Hälfte von BD haben.

Folglich wird jeder eingeschriebene Winkel die Hälfte des Bogens zwischen seinen Schenkeln zum Maaſse haben.

Fig. 66. *Erster Zusatz.* Alle in einem und demselben Abschnitt eingeschriebene Winkel BAC, BDC etc. sind gleich; denn sie haben alle die Hälfte des nämlichen Bogens BOC zum Maaſse.

Fig. 67. *Zweyter Zusatz.* Jeder in den Halbkreis beschriebene Winkel BAD, ist ein rechter; denn er hat zum Maaſse die Hälfte des halben Kreisumfanges BOD, also den vierten Theil des Umfanges.

Um das Nämliche anders zu beweisen, ziehe man den Halbmesser AC, so ist das Dreyeck BAC gleichschenklig, also der Winkel BAC = ABC; das Dreyeck CAD ist ebenfalls gleichschenklig, also der Winkel CAD = ADC; folglich ist BAC + CAD oder BAD = ABD + ADB. Wenn aber die beyden Winkel B und D des Dreyecks ABD zusammen dem dritten BAD gleich sind, so betragen alle drey Winkel zusammen das Doppelte des Winkels BAD. Sie sind aber zusammen gleich zwey rechten; folglich ist der Winkel BAD ein rechter.

Fig. 66. *Dritter Zusatz.* Jeder Winkel BAC, welcher in einen Abschnitt eingeschrieben worden, der gröſser ist als der Halbkreis, ist ein spitzer Winkel, denn er hat zum Maaſse die Hälfte des Bogens BOC, welcher kleiner ist als der halbe Umfang.

Und jeder Winkel, welcher in einem Abschnitte beschrieben worden, der kleiner ist als der halbe Umfang, ist ein stumpfer Winkel, denn er hat zum Maaſse die Hälfte des Bogens BAC, welcher gröſser ist als der halbe Umfang.

Fig. 68. *Vierter Zusatz.* Die in einem eingeschriebenen Vierecke ABCD einander gegenüberliegenden Winkel A und C betragen zusammen zwey rechte Winkel; denn der Winkel BAD hat zum Maaſse die Hälfte des Bogens BCD; der Winkel BCD hat zum Maaſse die Hälfte des Bogens BAD; also haben die Winkel BAD und BCD zusammen die Hälfte des ganzen Umfanges zum Maaſse; folglich ist ihre Summe zweyen rechten gleich.

Neunzehnter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 69. *Der von einer Tangente und einer Sehne eingeschlossene Winkel BAC hat zum Maaſse die Hälfte des Bogens AMDC zwischen seinen Schenkeln.*

Man ziehe im Berührungspuncte A den Durchmesser AD, so ist der Winkel BAD ein rechter (9ter Satz). Er hat zum Maaſse die Hälfte des halben Umfanges AMD; der Winkel DAC hat zum Maaſse die Hälfte von DC: also hat BAD + DAC, oder BAC, die Hälfte von AMD zusammen mit der Hälfte von DC, oder die Hälfte des ganzen Bogens AMDC zum Maaſse.

Man würde auf die nämliche Art beweisen, daſs der Winkel CAE die Hälfte des Bogens AC zwischen seinen Schenkeln zum Maaſse hat.

Aufgaben zum ersten und zweyten Buche.

Erste Aufgabe.

Fig. 70. *Die grade Linie AB in zwey gleiche Theile zu theilen.*

Man beschreibe aus den Puncten A und B, mit einem Halbmesser, der gröſser ist als die Hälfte von AB, zwey Kreisbogen, die sich in D schneiden; der Punct D wird von den Puncten A und B gleich weit entfernt seyn. Eben so suche man unter oder über der Linie AB einen zweyten Punct E, der gleich weit von A und B entfernt ist. Durch die beyden Puncte D und E ziehe man die Linie DE, so behaupte ich, daſs DE die Linie AB in C in zwey gleiche Theile theilet.

Denn da die beyden Puncte D und E jeder von den Enden A und B gleich weit entfernt sind, so müssen sie sich beyde in der Senkrechten über der Mitte von AB befinden. Durch zwey Puncte kann aber nur eine einzige grade Linie gehen, also wird die Linie DE jene Senkrechte selbst seyn, welche die Linie AB im Puncte C in zwey gleiche Theile theilt.

Zweyte Aufgabe.

Fig. 71. *Durch einen in der Linie BC gegebenen Punct A, auf diese Linie eine andere senkrecht zu ziehen.*

Man nehme zwey Puncte B und C in gleicher Entfernung von A, beschreibe aus ihnen mit einem Halbmesser, der gröſser ist als BA, zwey Bogen die sich in D schneiden, und ziehe AD, so wird diese die gesuchte Senkrechte seyn.

Denn der Punct D, welcher von B und C gleich weit entfernt ist, gehört zu der Senkrechten in der Mitte über BC; also ist AD diese Senkrechte.

Anmerkung. Dafselbe Verfahren dient, um einen rechten Winkel BAD, in einem gegebenen Puncte A, über einer gegebenen Linie BC zu beschreiben.

Dritte Aufgabe.

Fig. 72. *Von einem, aufser der graden Linie BD, gegebenen Puncte A, eine Senkrechte auf BD zu fällen.*

Aus dem Puncte A beschreibe man mit einem hinreichend grofsen Halbmesser einen Bogen, welcher die Linie BD in den beyden Puncten B und D schneidet; dann suche man einen Punct E, der gleich weit von B und D entfernt ist, und ziehe AE, so wird diese die gesuchte Senkrechte seyn.

Denn die beyden Puncte A und E sind jeder gleich weit von den Puncten B und D entfernt; folglich ist die Linie AE mitten auf BD senkrecht.

Vierte Aufgabe.

Fig. 73. *In dem Puncte A der Linie AB einen Winkel zu beschreiben, der dem gegebenen Winkel K gleich ist.*

Aus K beschreibe man mit einem willkührlichen Halbmesser den Bogen IL, den die beyden Schenkel des Winkels begrenzen. Aus dem Puncte A beschreibe man mit einem, KI gleichen Halbmesser AB, den unbestimmten Bogen BO. Man nehme alsdann einen, der Sehne LI gleichen Halbmesser, und beschreibe mit demselben aus B einen Bogen, welcher den unbestimmten Bogen BO in D schneidet, und ziehe AD, so wird der Winkel DAB dem gegebenen Winkel K gleich seyn.

Denn die beyden Bogen BD und LI haben gleiche Halbmesser und Sehnen; folglich sind sie gleich (2s B. 4r S.); folglich ist der Winkel BAD = IKL.

Fünfte Aufgabe.

Fig. 74. *Einen gegebenen Bogen oder Winkel, in zwey gleiche Theile zu theilen.*

Erstlich. Wenn der Bogen AB in zwey gleiche Theile getheilt werden soll, so beschreibe man aus den Puncten A und B mit einerley Halbmesser zwey Bogen, welche sich in D schneiden. Durch D und den Mittelpunct C ziehe man CD, welche den Bogen AB in E in zwey gleiche Theile theilen wird.

Denn die beyden Puncte C und D sind beyde gleich weit von den Enden der Sehne AB entfernt; also ist die Linie CD auf dieser Sehne in ihrer Mitte senkrecht; folglich theilt sie den Bogen AB im Puncte E in zwey gleiche Theile.

Zweytens. Soll der Winkel ACB in zwey gleiche Theile getheilt werden, so fange man damit an, aus dem Scheitel C den Bogen AB zu beschreiben, und verfahre sodann weiter, wie oben. Es ist klar, dafs die Linie CD, den Winkel ACB in zwey gleiche Theile theilen wird.

Anmerkung. Man kann auf die nämliche Weise jede der Hälften AE und EB wieder halbiren; also durch fortgesetzte Theilung einen gegebenen Winkel oder Bogen in vier, acht, sechzehn u. s. w. gleiche Theile theilen.

Sechste Aufgabe.

Fig. 75. *Durch einen gegebenen Punct A, eine Parallele mit der gegebenen Linie BC zu ziehen.*

Aus dem Puncte A, beschreibe man mit einem hinreichend grofsen Halbmesser den unbestimmten Bogen EO. Aus dem Puncte E, beschreibe man mit dem nämlichen Halbmesser den Bogen AF, mache ED = AF und ziehe AD, welche die verlangte Parallele seyn wird.

Denn wenn man AE zieht, so ist leicht zu sehen, dafs die Wechselwinkel AEF und EAD gleich sind; folglich sind die Linien AD und EF parallel (1s B. 23r S.).

Siebente Aufgabe.

Fig. 76. *Aus zwey gegebenen Winkeln eines Dreyecks, den dritten zu finden.*

Man ziehe die unbestimmte Linie DEF; und mache im Puncte E den Winkel DEC = A, und den Winkel CEH = B. Der übrig bleibende Winkel HEF wird der verlangte dritte Winkel seyn; denn diese drey Winkel sind zusammen zweyen rechten gleich.

Achte Aufgabe.

Fig. 77. *Mit zwey gegebenen Seiten B und C eines Dreyecks und dem Winkel A, den sie einschliefsen, das Dreyeck zu beschreiben.*

Nachdem die unbestimmte Linie DE gezogen worden, mache man im Puncte D den Winkel EDF gleich dem gegebenen Winkel A, hernach aber DG = B, DH = C, und ziehe GH, so wird DGH das verlangte Dreyeck seyn.

Neunte Aufgabe.

Mit einer gegebenen Seite und zwey gegebenen Winkeln eines Dreyecks das Dreyeck zu beschreiben.

Die beyden gegebenen Winkel werden entweder diejenigen beyden seyn, welche an der gegebenen Seite

liegen, oder ein anliegender und ein gegenüberstehender; im letzten Falle suche man den dritten (7te Aufg.) Fig. 78. so hat man ebenfalls die beyden anliegenden. Nun ziehe man die der gegebenen Seite gleiche grade Linie DE, und mache im Puncte D den Winkel EDF gleich einem der anliegenden Winkel, und im Puncte E den Winkel DEG gleich dem andern; die beyden Linien DF und EG werden sich in H schneiden, und DEH wird das verlangte Dreyeck seyn.

Zehnte Aufgabe.

Fig. 79. *Mit den drey gegebenen Seiten A, B, C eines Dreyecks das Dreyeck zu beschreiben.*

Man mache DE gleich der Seite A; aus dem Puncte E beschreibe man mit einem Halbmesser, welcher der zweyten Seite B gleich ist, einen Bogen; aus dem Puncte D beschreibe man mit der dritten Seite C ebenfalls einen Bogen, welcher den ersten in F schneidet, und ziehe DF und EF, so ist DEF das verlangte Dreyeck.

Anmerkung. Wenn eine der Seiten gröfser wäre als die Summe der beyden andern, so würden sich die Bogen nicht schneiden; dagegen ist die Auflösung allemal möglich, wenn die Summe zweyer Seiten gröfser ist als die dritte.

Eilfte Aufgabe.

Fig. 81 und 82. *Mit zwey gegebenen Seiten A und B eines Dreyecks, und dem der Seite B gegenüberliegenden Winkel C das Dreyeck zu beschreiben.*

Es finden zwey Fälle Statt.

Erstlich. Wenn der Winkel C ein rechter oder stumpfer ist, so mache man den Winkel EDF gleich dem Winkel C und DE = A. Aus dem Puncte E be-

schreibe man mit einem Halbmesser, welcher der Seite B gleich ist, einen Bogen, welcher die Linie DF in F schneidet, und ziehe EF, so wird DEF das verlangte Dreyeck seyn.

In diesem ersten Falle mufs die Seite B gröfser als die Seite A seyn, denn der Winkel C ist der gröfseste Winkel des Dreyecks, weil er ein rechter oder stumpfer ist, folglich mufs die gegenüberliegende Seite auch die gröfseste seyn.

Fig. 81. *Zweytens.* Das Verfahren ist das nämliche, wenn der Winkel C spitz und B gröfser ist als A. DEF ist das verlangte Dreyeck.

Fig. 82. Aber wenn der Winkel C spitz ist, so ist die Seite B kleiner als die Seite A. Alsdann schneidet der, aus E mit dem Halbmesser EF = B beschriebene, Bogen die Seite DF in zwey Puncten F und G, welche auf einer und derselben Seite von D liegen; mithin finden zwey Dreyecke DEF und DEG Statt, welche beyde der Aufgabe genug thun.

Anmerkung. Die Aufgabe würde in allen den Fällen unmöglich seyn, wo die Seite B kleiner als das Perpendikel aus E auf DF wäre.

Zwölfte Aufgabe.

Fig. 83. *Mit zwey gegebenen Seiten A und B eines Parallelogramms und dem Winkel C welchen sie einschliefsen; das Parallelogramm zu beschreiben.*

Man ziehe die Linie DE = A, und mache in D den Winkel EDF = C. Dann mache man DF = B und beschreibe zwey Bogen, den einen aus dem Puncte F mit einem Halbmesser FG = DE, den andern aus dem Puncte E mit einem Halbmesser EG = DF. Nach dem Puncte G, wo sich diese beyden Bogen schneiden, ziehe

man FG und EG, so wird DEGF das verlangte Parallelogramm seyn.

Denn vermöge der Construction sind die entgegengesetzten Seiten gleich, folglich ist die Figur ein Parallelogramm (1s B. 30r S.). Dieses Parallelogramm aber hat hier die beiden gegebenen Seiten und den gegebenen Winkel.

Zusatz. Wenn der gegebene Winkel ein rechter ist, so wird die Figur ein Rechteck seyn. Sind ferner die Seiten gleich groſs, so wird sie ein Quadrat seyn.

Dreyzehnte Aufgabe.

Den Mittelpunct eines gegebenen Kreises, oder eines gegebenen Kreisbogens zu finden.

Fig. 84. Man nehme in dem gegebenen Kreisumfange oder Bogen willkührlich drey Puncte A, B und C an, und ziehe AB und BC, oder stelle sich diese Linien gezogen vor. Man theile solche in zwey gleiche Theile vermittelst der senkrechten Linien DE und FG, so wird der Punct O, in welchem sich die letztern schneiden, der gesuchte Mittelpunct seyn.

Anmerkung. Das nämliche Verfahren dient, um einen Kreisumfang durch drey gegebene Puncte A, B und C zu legen; desgleichen um einen Kreisumfang zu beschreiben, in welchen das Dreyeck ABC eingeschrieben ist.

Vierzehnte Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punct eine Tangente an einen gegebenen Kreis zu ziehen.

Fig. 85. Wenn der gegebene Punct A in dem Kreisumfange selbst liegt, so ziehe man den Halbmesser CA, und AD senkrecht auf CA, so ist AD die verlangte Tangente (2s B. 9r S.).

Fig. 86. Liegt der Punct A aufserhalb des Kreises, so verbinde man ihn mit dem Mittelpuncte durch die grade Linie CA; man halbire CA in O, und beschreibe aus O mit dem Halbmesser OC einen Kreisumfang, welcher den gegebenen Umfang im Punct B schneidet. Man ziehe AB, so ist diese Linie die verlangte Tangente.

Denn wenn man CB zieht, so ist der Winkel CBA, weil er in einem Halbkreise liegt, ein rechter (2s B. 18r S.); also ist die Linie AB auf dem Ende des Halbmessers CB senkrecht; folglich ist sie eine Tangente.

Anmerkung. Man sieht, dafs, wenn der Punct A aufserhalb des Kreises liegt, immer zwey gleiche Tangenten AB und AD durch denselben gezogen werden können. Sie sind deshalb einander gleich, weil in den rechtwinkligen Dreyecken CBA und CDA die Hypothenuse CA gemeinschaftlich, und die Seite CB = CD ist, weshalb diese Dreyecke gleich sind (1s B. 18r S.), woraus folgt, dafs AD = AB, und zugleich der Winkel CAD = CAB.

Funfzehnte Aufgabe.

Fig. 87. *Einen Kreis in ein gegebenes Dreyeck ABC zu beschreiben.*

Man theile die Winkel A und B in zwey gleiche Theile, mittelst der Linien AO und BO, welche sich in O schneiden; aus dem Puncte O ziehe man OD, OE und OF auf die drey Seiten des Dreyecks senkrecht; so behaupte ich, dafs diese drey senkrechte Linien einander gleich sind; denn, vermöge der Construction, ist der Winkel DAO = OAF, und der rechte Winkel ADO = AFO, folglich ist der dritte Winkel AOD dem dritten AOF gleich. Ferner ist die Seite AO beiden Dreyecken AOF und AOD gemein, und die, an dieser

gleichen Seite liegenden Winkel sind gleich, folglich sind diese beiden Dreyecke gleich; folglich ist DO = OF. Eben so läfst sich beweisen, dafs die beiden Dreyecke BOD und BOE gleich sind. Also ist auch OD = OE; folglich sind die drey senkrechten Linien OD, OE und OF unter einander gleich.

Beschreibt man nun aus dem Punct O, mit dem Halbmesser OD, einen Kreis, so ist klar, dafs dieser Kreisumfang in das Dreyeck ABC wird eingeschrieben seyn; denn die auf dem Ende des Halbmessers OD senkrechte Seite AB ist eine Tangente. Eben dies sind die Seiten BC und AC.

Anmerkung. Die drey Linien, welche die Winkel eines Dreyecks halbiren, schneiden sich in einem und demselben Puncte.

Sechzehnte Aufgabe.

Fig. 88 und 89. *Ueber einer gegebenen Linie AB einen Kreisabschnitt zu beschreiben, welcher einen gegebenen Winkel C fasset, das heifst, einen Abschnitt von der Art, dafs alle darin eingeschriebenen Winkel dem gegebenen Winkel C gleich sind.*

Man verlängere AB nach D hin, und mache im Puncte B den Winkel DBE = C. Man ziehe BO senkrecht auf BE und GO auf AB in dessen Mitte senkrecht. Aus dem Durchschnittspunct O beschreibe man mit dem Halbmesser OB einen Kreis, so wird AMB der verlangte Abschnitt seyn.

Denn weil BF auf dem Ende des Halbmessers OB senkrecht ist, so ist BF eine Tangente, und der Winkel ABF hat zum Maafse die Hälfte des Bogens AKB (2s B. 19r S.). Ferner hat auch der Winkel AMB, als eingeschriebener Winkel, zum Maafse die Hälfte des Bogens AKB; folglich ist der Winkel AMB = ABF =

EBD = C; mithin sind alle in den Abschnitt AMB eingeschriebenen Winkel dem gegebenen Winkel C gleich.

Anmerkung. Wäre der gegebene Winkel ein rechter, so würde der gesuchte Abschnitt ein über dem Durchmesser AB beschriebener Halbkreis seyn.

Siebzehnte Aufgabe.

Fig. 90. *Das Verhältniſs zwischen zwey gegebenen graden Linien AB und CD in Zahlen zu finden, wenn diese beiden Linien unter sich ein gemeinschaftliches Maaſs haben.*

Man trage die kleinere Linie CD auf die gröſsere AB so oft es angeht, z. B. zweymal. Es bleibe der Rest BE.

Man trage den Rest BE auf die Linie CD so oft es angeht, z. B. einmal. Es bleibe der Rest DF.

Man trage den zweiten Rest DF auf den ersten BE so oft es angeht, z. B. einmal. Es bleibe der Rest BG.

Man trage den dritten Rest BG auf den zweyten DF, so oft er darin enthalten ist.

So fahre man fort, bis man auf einen Rest kommt, welcher in den vorigen grade aufgeht.

Alsdann ist dieser letzte Rest das gemeinschaftliche Maaſs der gegebenen Linien, und man findet, wenn man ihn zur Einheit annimmt, leicht den Werth der vorhergehenden Reste, also zuletzt den Werth der beiden gegebenen Linien, woraus sich ihr Verhältniſs in Zahlen berechnen läſst.

Findet man z. B. daſs GB grade zweymal in FD enthalten ist, so ist GB das gemeinschaftliche Maaſs der beiden gegebenen graden Linien. Es sey BG = 1, so ist FD = 2. Aber EB enthält FD einmal, und dann GB; also ist EB = 3; CD enthält einmal EB, und dann

FD; also ist CD = 5; endlich enthält AB, CD zweymal, nebst EB; also ist AB = 13: folglich ist das Verhältnifs der beiden Linien AB und CD das von 13 zu 5. Nähme man die Linie CD zur Einheit, so würde die Linie AB = $\frac{13}{5}$ seyn; und nähme man die Linie AB zur Einheit, so wäre die Linie CD = $\frac{5}{13}$.

Anmerkung. Das Verfahren ist das nämliche welches die Arithmetik lehrt, um den gemeinschaftlichen Divisor zweyer Zahlen zu finden; dafselbe bedarf also keines besondern Beweises.

Es ist möglich, dafs man nie einen Rest findet, welcher in den ihm vorhergehenden grade enthalten ist, so weit man auch das Verfahren fortsetzt. Alsdann haben die beiden Linien kein gemeinschaftliches Maafs, und sind, was man nennt, *incommensurabel.* Man wird ein Beyspiel davon weiter unten bey dem Verhältnifs der Diagonale zur Seite eines Quadrats sehen. In diesem Fall also ist das Verhältnifs in Zahlen nicht zu finden: läfst man aber den letzten Rest weg, so wird man ein mehr oder weniger sich *näherndes* Verhältnifs haben, je nachdem man die Operation mehr oder weniger fortgesetzt hat.

Achtzehnte Aufgabe.

Fig. 91. *Das gemeinschaftliche Maafs zweyer gegebenen Winkel, wenn sie ein solches haben, und daraus ihr Verhältnifs in Zahlen zu finden.*

Man beschreibe mit gleichen Halbmessern die Bogen CD und EF, welche zum Maafse der Winkel dienen. Dann verfahre man bey der Vergleichung dieser Bogen CD und EF wie in der vorigen Aufgabe. Ein Bogen kann nämlich auf einen andern vom nämlichen Halbmesser getragen werden, eben wie eine grade Linie auf eine andere. Auf die Weise gelangt man

zum gemeinschaftlichen Maafs der Bogen CD und EF, wenn sie ein solches haben und zu ihrem Verhältnifs in Zahlen. Dieses Verhältnifs wird das nämliche seyn, welches den gegebenen Winkeln zukommt (2s B. 17r S.), und wenn DO das gemeinschaftliche Maafs der Bogen ist, so ist DAO dasjenige der Winkel.

Anmerkung. Man kann auf die Weise den absoluten Werth eines Winkels finden, wenn man nämlich den Bogen, der sein Maafs ist, mit dem ganzen Umfange vergleicht; z. B., wenn sich der Bogen CD zum Umfange wie 3 zu 25 verhält, so wird der Winkel A, $\frac{3}{25}$ von vier rechten oder $\frac{12}{25}$ von einem rechten Winkel betragen.

Auch die zu vergleichenden Bogen können möglicherweise kein gemeinschaftliches Maafs haben. Alsdann findet man für die Winkel nur ein Verhältnifs, welches sich mehr oder weniger dem wahren nähert, je mehr oder weniger man das Verfahren fortgesetzt hat *).

*) Meines Erachtens gehören geometrische *Aufgaben* nicht in einen Lehrbegriff der Geometrie. Dieser mufs, glaube ich, die abstracten Sätze, welche die geometrischen oder idealen Linien und Flächen betreffen, rein enthalten, und die Anwendung der Sätze auf Linien oder Flächen, die man ziehet oder zeichnet, und die eigentlich gar keine Linien und Flächen sind, sondern Körper, sogar vermeiden, damit der Lernende auch nicht einmal die Gelegenheit zu der Vermuthung finde, dafs die abstracten Sätze von den idealen Linien und Flächen zum Theil auf solchen Anwendungen *beruhen*, oder ihrer *bedürfen*. Sind die Lehrsätze zum Theil wirklich auf die Aufgaben gebaut, und beyde mit einander gleichsam verflochten, wie beim Euclid, so sind die Aufgaben selbst eigentlich zum Theil Lehrsätze, und man kann das, was in ihnen Lehrsatz ist, von dem übrigen trennen. Folgen aber die Aufgaben abgesondert auf die

Lehrsätze, wie hier, so dünkt mich, sind sie nicht an ihrem Ort, sondern werden besser den Anweisungen, die sich ausschlieſslich mit den verschiedenen Anwendungen der Geometrie, z. B. auf die Zeichenkunst, auf die Feldmeſskunst, auf die beschreibende Geometrie u. s. w. beschäftigen, überlassen; um so mehr, weil die Auflösung der Aufgaben mit Lineal und Cirkel, welche die reine Geometrie, ohne Rücksicht auf erleichternde Instrumente zu geben pflegt, zuweilen nicht einmal practisch, sondern mit schicklicheren Instrumenten leichtere und bessere Auflösungen möglich sind.

A. d. Uebers.

Drittes Buch.

Vom Verhältnifs der Figuren.

Erklärungen.

I. Ich nenne Figuren *gleich grofs* wenn sie gleichen Inhalt haben.

Zwey Figuren können gleich grofs, obgleich sehr unähnlich seyn; z. B., ein Kreis und ein Quadrat, ein Dreyeck und ein Rechteck u. s. w. können gleich grofs seyn.

Die Benennung, *gleiche* Figuren bleibt denjenigen vorbehalten, welche, wenn sie auf einander gelegt werden, in allen ihren Puncten zusammen fallen. Solche Figuren z. B. sind zwey Kreise von gleichen Halbmessern, zwey Dreyecke, deren Seiten einzeln gleich sind u. s. w.

II. Zwey Figuren heissen *ähnlich,* wenn ihre Winkel einzeln gleich, und ihre *ähnlich-liegenden* (homologen) Seiten proportional sind. Unter ähnlich-liegenden Seiten versteht man diejenigen, welche in beiden Figuren eine gleiche Lage haben, oder welche an gleichen Winkeln liegen. Die gleichen Winkel heifsen *ähnlich-liegende* (homologe) Winkel. Zwey gleiche Figuren sind immer ähnlich, aber zwey ähnliche Figuren können sehr ungleich seyn.

III. In zwey verschiedenen Kreisen nennt man *ähnliche Bogen, Ausschnitte und Abschnitte* solche, welche gleiche Winkel am Mittelpuncte haben.

Fig. 92. So z. B. ist der Bogen BC dem Bogen DE, der Ausschnitt ABC dem Ausschnitt ODE u. s. w. ähnlich, wenn der Winkel A dem Winkel O gleich ist.

Fig. 93. IV. Die *Höhe* eines Parallelogramms ist die senkrechte Linie EF, welche den Abstand zweyer, zu Grundlinien angenommenen, einander gegenüberstehenden Seiten AB und CD misset.

Fig. 94. V. Die *Höhe* eines Dreyecks ist die senkrechte Linie AD aus dem Scheitel irgend eines Winkels A auf die gegenüberliegende Seite BC, welche Seite alsdann die Grundlinie ist.

Fig. 95. VI. Die *Höhe* eines Trapezes ist die senkrechte Linie EF, zwischen seinen parallelen Seiten AB und CD.

VII. *Inhalt* (aire) oder die Fläche einer Figur sind fast gleichbedeutende Ausdrücke. Inhalt bezeichnet insbesondere die Flächengröfse der Figur, in sofern sie von andern Flächen gemessen oder mit ihnen verglichen wird.

Anmerkung. Um diesen und die folgenden Abschnitte wohl zu verstehen, mufs man die Lehre von den Proportionen inne haben, wegen welcher wir auf die Lehrbücher der Arithmetik und Algebra verweisen. Wir wollen hier nur eine Bemerkung machen, die nöthig ist, um den wahren Sinn der Sätze zu fafsen und alle Dunkelheit aus den Behauptungen und Beweisen zu entfernen.

In der Proportion $A : B = C : D$ ist bekanntlich das Product der äufsern Glieder $A \times D$ dem Product der mittlern $B \times C$ gleich.

Dieser Satz ist für Zahlen gewifs. Nicht minder ist er es für alle andere Gröfsen, in sofern sie sich in Zahlen ausdrücken lassen, oder man in Zahlen sie ausgedrückt sich vorstellt, welches letztere aber immer geschehen kann. Z. B. wenn A, B, C, D Linien sind, so kann man immer annehmen, dafs eine von diesen vier Linien, oder irgend eine fünfte, wenn man will, das ge-

meinschaftliche Maafs der übrigen oder die Einheit sey. Alsdann stellen A, B, C, D gewisse Zahlen von Einheiten vor, und zwar ganze, gebrochene, commensurable oder incommensurable Zahlen, und das Verhältnifs zwischen den Linien A, B, C, D ist ein Verhältnifs zwischen Zahlen.

Das Product der Linie A und D, welches man auch *das Rechteck unter denselben* nennt, ist also nichts anders als eine gewifse Zahl von Linieneinheiten, die in A enthalten sind, multiplicirt mit einer andern in B enthaltenen Zahl von Linieneinheiten, und man sieht leicht, dafs dieses Product demjenigen gleich seyn kann und mufs, welches die Linien B und C geben *).

Die Gröfsen A und B können von irgend einer Art, z. B. Linien, die Gröfsen C und D, von irgend einer andern Art, z. B. Flächen seyn. Alsdann müssen diese Gröfsen immer als Zahlen betrachtet werden. A und B enthalten alsdann Linieneinheiten, C und D Flächeneinheiten, und das Product $A \times D$ ist eine Zahl, eben wie das Product $B \times C$.

Ueberhaupt müssen bey allen Operationen mit Verhältnissen die Glieder derselben immer als Zahlen betrachtet werden, jede in ihrer Art **). Alsdann haben die Operationen und Schlüsse keine Schwierigkeit.

Einige unserer Beweise sind auf einfache Regeln der Algebra gegründet, welche sich weiter auf bekannte Grundsätze stützen. So z. B. wenn $A = B + C$ ist,

*) Aber welches die Einheit zu dem Product zweyer Linien sey, zeigt sich erst weiter unten. Sie ist das Quadrat der Linieneinheit. A. d. Uebers.

**) Dieses ist wohl nicht ganz deutlich; denn Zahlen sind nicht von verschiedener Art. Zum Theil verursacht die beschwerliche und überflüfsige Lehre von den Proportionen diese Dunkelheit. A. d. Uebers.

und man multiplicirt jedes Glied mit einer und derselben Gröſse M, so folgt daraus $A \times M = B \times M + C \times M$; desgleichen wenn $A = B + C$ und $D = E - C$ ist, und man rechnet diese Gröſsen zusammen, so folgt, nachdem $+ C$ und $- C$, welche sich aufheben, weggelassen worden, $A + D = B + E$ u. s. w. Alles dieses ist an sich klar; entsteht aber irgendwo eine Schwierigkeit, so darf man nur die Lehrbücher der Algebra nachschlagen und solchergestalt das Studium der beiden Wissenschaften verbinden *).

Erster Satz.

Lehrsatz.

Parallelogramme von gleichen Höhen und Grundlinien sind gleich groſs.

*) Daſs der Begriff der Zahl und die Rechenkunst in der Geometrie, schon von den ersten Elementen an, unentbehrlich sind, ist unleugbar. Daher scheint es der Natur der Sache gemäſs, die Rechenkunst in ihrem ganzen weiten Umfange, überall wo sie nützlich seyn kann, ungescheut in der Geometrie anzuwenden. Das rein Geometrische, was der eigentlichen Rechenkunst nicht bedarf, ist von dem Uebrigen scharf geschieden. Es ist ungefähr das, was Legendre's erste beiden Bücher der Geometrie enthalten. Sobald man zu der Untersuchung der Gröſse und Aehnlichkeit der Figuren fortschreitet, ist die Rechenkunst nothwendig. Sucht man über diese Grenze hinaus noch weiter ohne Rechnung fertig zu werden, so thut man gewöhnlich nicht wohl. Die Rechenkunst benimmt nicht allein der Strenge der Beweise Nichts, sondern sie erhöht sie, weil sie abstracter ist. Gegentheils erleichtert sie gewöhnlich die Untersuchung, und zwar je weiter man kommt, das heiſst, je zusammengesetzter die Fälle werden, immer mehr. Es ist also gut, in der Geometrie die Rechenkunst so viel als möglich und nicht etwa so wenig als möglich anzuwenden, weil die abstracte Vorstellung und das leich-

Fig. 96. AB sey die gemeinschaftliche Grundlinie zweyer Parallelogramme ABCD und ABEF. Weil sie gleiche Höhen haben sollen, so müssen die obern Grundlinien DC und FE in einer und derselben mit AB parallelen Linie liegen. Aber nach der Natur der Parallelogramme ist AD = BC und AF = BE; eben so ist DC = AB und FE = AB, also DC = EF; folglich sind, wenn man DC und FE von der nämlichen Linie DE abzieht, die Reste CE und DF einander gleich.

Daraus folgt, dafs die Dreyecke DAF und CBE unter einander gleiche Seiten haben, und folglich gleich sind (1s B. 11r S.).

Zieht man aber das Dreyeck ADF von dem Viereck ABED ab, so bleibt das Parallelogramm ABEF übrig, und zieht man das Dreyeck CBE von dem nämlichen Viereck ABED ab, so bleibt das Parallelogramm ABCD übrig; folglich sind die beiden Parallelogramme ABCD und ABEF, welche gleiche Grundlinien und Höhen haben, einander gleich.

Fig. 97. *Zusatz.* Jedes Parallelogramm ABCD ist einem Rechteck ABEF von gleicher Grundlinie und Höhe gleich.

Zweyter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 98. *Jedes Dreyeck ABC ist die Hälfte eines Parallelogramms ABCD von der nämlichen Grundlinie und Höhe.*

Denn die Dreyecke ABC und ACD sind gleich (1s B. 31r *S.*).

teste Mittel zum Zweck gewöhnlich die klareren und folglich die bessern sind. A. d. Uebers.

Erster Zusatz. Also ist ein Dreyeck ABC die Hälfte des Rechtecks BCEF, welches die nämliche Grundlinie BC, und die nämliche Höhe AO hat; denn das Rechteck BCEF ist dem Parallelogramm ABCD gleich.

Zweyter Zusatz. Alle Dreyecke von gleichen Grundlinien und Höhen sind gleich grofs.

Dritter Satz.

Lehrsatz.

Zwey Rechtecke von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien.

Fig. 99. ABCD und AEFD sollen Rechtecke seyn, welche die gemeinschaftliche Höhe AD haben; so behaupte ich, dafs sie sich wie ihre Grundlinien verhalten.

Man setze zuerst, dafs die Grundlinien unter sich commensurabel sind, und sich z. B. wie 7 zu 4 verhalten, so wird, wenn man AB in 7 gleiche Theile theilt, AE vier dieser Theile enthalten. Man ziehe durch jeden Theilungspunct eine grade Linie auf die Grundlinie senkrecht, so entstehen sieben kleinere Rechtecke welche einander gleich sind, weil sie gleiche Grundlinien und Höhen haben. Das Rechteck ABCD wird sieben dieser kleinern Rechtecke enthalten, während AEFD deren viere enthält; folglich verhält sich das Rechteck ABCD zu dem Rechteck AEFD wie 7 zu 4, oder wie AB zu AE. Der Beweis bleibt der nämliche für jedes andere Zahlenverhältnifs; folglich ist für jedes beliebige Verhältnifs, so lange es commensurabel ist

$$ABCD : AEFD = AB : AE.$$

Fig. 100. Nun setze man, zweytens, die Grundlinien AB und AE unter sich wären incommensurabel, so behaupte ich, dafs dennoch

ABCD : AEFD = AB : AE

ist. Denn fände dieses Verhältnifs nicht Statt, so würde das vierte Glied gröfser oder kleiner seyn müssen als AE, während die drey ersten die nämlichen bleiben. Angenommen, es sey gröfser und

ABCD : AEFD = AB : AO

so theile man die Linie AB in gleiche Theile, die kleiner sind als EO, alsdann fällt nothwendig wenigstens ein Theilungspunct I zwischen E und O. Durch diesen Punct ziehe man IK auf AI senkrecht, so wird, vermöge des oben bewiesenen Satzes, weil jetzt die Grundlinien AB und AI unter sich commensurabel sind,

ABCD : AIKD = AB : AI

seyn. Nach der Voraussetzung sollte seyn

ABCD : AEFD = AB : AO.

In diesen beyden Verhältnissen sind die Vorderglieder dieselben; folglich müssen die Hinterglieder proportional seyn, woraus folgt:

AIKD : AEFD = AI : AO.

AO aber ist gröfser als AI, also müfste, damit die Proportion möglich sey, das Rechteck AEFD gröfser seyn als AIKD. Es ist aber im Gegentheil kleiner; also ist das Verhältnifs unmöglich. Folglich kann sich ABCD nicht zu AEFD verhalten wie AB zu einer Linie, die gröfser ist als AE.

Eben so wird bewiesen, dafs das vierte Glied der Proportion nicht kleiner seyn kann als AE; folglich ist es gleich AE.

Zwey Rechtecke ABCD und AEFD von gleichen Höhen verhalten sich also immer wie ihre Grundlinien AB und AE, welches auch das Verhältnifs dieser Grundlinien seyn mag.

Vierter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 101. *Zwey beliebige Rechtecke ABCD und AEGF verhalten sich wie die Producte ihrer Grundlinien in die Höhen, so daſs ABCD : AEGF = AB $\times$ AD : AE $\times$ AF.*

Man bringe die Rechtecke in eine solche Lage, daſs die Winkel in A einander gegenüberliegen, und verlängere die Seiten GE und CD bis sie sich in H schneiden. Die beiden Rechtecke ABCD und AEHD haben gleiche Höhe AD; also verhalten sie sich wie ihre Grundlinien AB und AE. Die Rechtecke AEHD und AEGF haben ebenfalls gleiche Höhe AE; also verhalten sie sich wie ihre Grundlinien AD und AF; folglich hat man die beiden Proportionen

$$ABCD : AEHD = AB : AE$$
$$AEHD : AEFG = AD : AF.$$

Man multiplicire sie Glied um Glied, und bemerke, daſs das Mittelglied AEHD, als gemeinschaftlicher Multiplicator des Vorder- und Hintergliedes, weggelassen werden kann, so erhält man

$$ABCD : AEFG = AB \times AD : AE \times AF.$$

Anmerkung. Also kann man zum Maaſse eines Rechtecks das Product seiner Grundlinie in die Höhe nehmen, in sofern man nämlich darunter ein Product zweyer Zahlen versteht, und zwar der Zahlen der Linieneinheiten in der Grundlinie und Höhe.

Dieses Maaſs ist übrigens kein absolutes, sondern nur ein relatives; es setzt voraus, daſs man auf dieselbe Weise ein anderes Rechteck misset, indem man seinen Seiten die nämliche Linieneinheit giebt; man erhält dadurch ein zweytes Product, und das Verhält-

nifs der beiden Producte ist demjenigen der Rechtecke gleich, zufolge des oben bewiesenen Satzes.

Wenn z. B. die Grundlinie des Rechtecks A drey, und die Höhe zehn Linieneinheiten enthält, so wird dieses Rechteck durch die Zahl 3 × 10 oder 30 vorgestellt. Diese Zahl bedeutet an und für sich nichts; aber wenn man ein zweytes Rechteck B nimmt, dessen Grundlinie zwölf, und dessen Höhe sieben Einheiten enthält, so läfst sich dieses zweyte Rechteck durch die Zahl 7 × 12 oder 84 ausdrücken. Daraus folgt dann, dafs sich die beiden Rechtecke unter einander wie 30 zu 84 verhalten. Nähme man also z. B. das Rechteck A zur Einheit des Flächenmaafses an, so würde das Rechteck B, $\frac{84}{30}$ zum absoluten Maafse haben; das heifst, es würde $\frac{84}{30}$ Flächeneinheiten enthalten.

Am besten und gewöhnlichsten ist es, das *Quadrat* zur Flächeneinheit zu nehmen, und zwar dasjenige Quadrat, dessen Seite die Längeneinheit ist; alsdann wird das Maafs, welches relativ war, zu einem absoluten: z. B. die Zahl 30, durch welche wir das Rechteck A ausdrückten, bezeichnet 30 Flächeneinheiten (Fig. 102.) oder 30 Quadrate, deren Seiten der Einheit gleich sind, wie es die 102te Figur vorstellt.

Zuweilen wird in der Geometrie das Product zweyer Linien mit *dem Rechteck unter denselben* verwechselt. Der Ausdruck Product ist sogar in die Arithmetik übergegangen, um das Product zweyer ungleichen Zahlen zu bezeichnen, so wie auch der Ausdruck Quadrat für das Product einer Zahl in sich selbst.

Die Quadrate der Zahlen 1, 2, 3 u. s. w. sind 1, 4, 9 u. s. w.; das Quadrat über einer doppelten Linie ist also viermal, über einer dreyfachen, neunmal so

(Fig. 103.) grofs als das Quadrat über der einfachen u. s. w. *).

Fünfter Satz.

Lehrsatz.

Der Inhalt eines beliebigen Parallelogramms ist gleich dem Producte seiner Grundlinie in seine Höhe.

Fig. 97. Denn das Parallelogramm ABCD ist so grofs als das Rechteck ABEF von der nämlichen Höhe und Grundlinie BE (1r S.). Dieses aber hat zum Maafs AB $\times$ BE (4r S.), also ist AB $\times$ BE der Inhalt des Parallelogramms ABCD.

Zusatz. Parallelogramme von gleicher Grundlinie, verhalten sich wie ihre Höhen, und Parallelogramme von gleichen Höhen wie die Grundlinien. Denn wenn A, B und C drey beliebige Gröfsen sind, so ist allgemein $A \times C : B \times C = A : B$.

Sechster Satz.

Lehrsatz.

Der Inhalt eines Dreyecks ist gleich dem Producte seiner Grundlinie in die Hälfte seiner Höhe **).

Fig. 104. Denn das Dreyeck ABC ist die Hälfte des Parallelogramms ABCE, welches die nämliche Grundlinie BC und die nämliche Höhe AD hat (2r S.). Aber die Fläche jenes Parallelogramms ist $= BC \times AD$ (5r S.) also ist die Fläche des Dreyecks $= \frac{1}{2} BC \times AD$ oder $BC \times \frac{1}{2} AD$.

*) Die sorgfältige Entwicklung dieser Sätze giebt ein Beyspiel von Klarheit und Genauigkeit des Verfassers im Vortrage. A. d. Uebers.

**) Genauer wohl: Der Inhalt eines Dreyecks ist gleich der Hälfte des Products seiner Grundlinie in seine Höhe. A. d. Uebers.

Zusatz. Zwey Dreyecke von der nämlichen Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien, und zwey Dreyecke von der nämlichen Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen.

Siebenter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 105. *Der Inhalt des Trapezes ABCD ist gleich seiner Höhe EF, multiplicirt mit der halben Summe seiner parallelen Grundlinien AB und CD.*

Durch den Punct I, in der Mitte der Seite CB, ziehe man KL mit der entgegengesetzten Seite AD parallel, und verlängere DC bis sie KL schneidet.

In den Dreyecken IBL und ICK ist die Seite IB = IC, der Construction nach; der Winkel LIB ist gleich CIK, und der Winkel IBL = ICK, weil CK und BL parallel sind (1s B. 23r S.); also sind diese Dreyecke gleich (1s B. 7r S.); mithin ist das Trapez ABCD dem Parallelogramme ADKL gleich, und hat zum Maafse EF ⋈ AL.

Es ist aber AL = DK, und weil das Dreyeck IBL dem Dreyecke KCI gleich ist, die Seite BL = CK; folglich ist AB + CD = AL + DK = 2 AL. Also ist AL die halbe Summe der Grundlinien AB und CD; also ist endlich der Inhalt des Trapezes ABCD gleich der Höhe EF, multiplicirt mit der halben Summe der Grundlinien AB und CD, welches sich so ausdrücken läfst: $ABCD = EF \times \left(\frac{AB + CD}{2}\right)$ *).

*) Dieser Satz läfst sich kürzer beweisen. Denn man ziehe eine der beiden Diagonalen (Fig. 5.) des Trapezes, AC, so entstehen zwey Dreyecke ABC und CDA, deren Inhalt zusammen dem Inhalte des Trapezes gleich ist. Der Inhalt des Dreyecks ABC aber ist ½ AB ⋈ EF, und der Inhalt des

Anmerkung. Wenn man durch den Punct I in der Mitte von BC, IH mit der Grundlinie AB parallel zieht, so wird auch der Punct H in der Mitte von AD liegen; denn die Figur AHIL ist ein Parallelogramm, eben wie DHIK, weil die entgegengesetzten Seiten parallel sind: es ist also AH = IL und DH = IK. Aber es ist IL = IK, weil die Dreyecke BIL und CIK gleich sind. Also ist AH = DH.

Es ist zu merken, daſs die Linie $HI = AL = \frac{AB + CD}{2}$ ist; also kann auch der Inhalt des Trapezes durch $EF \times HI$ ausgedrückt werden. Der Inhalt ist also gleich der Höhe des Trapezes, multiplicirt mit der Linie welche die Mitten der nicht parallelen Seiten verbindet.

Achter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 106. *Wenn eine Linie AC in zwey Theile AB und BC getheilt wird, so enthält das Quadrat über der ganzen Linie AC das Quadrat über dem Theil AB, das Quadrat über dem andern Theil BC, und zweymal das Rechteck unter den beiden Theilen AB und BC; welches sich so ausdrücken läſst:* AC^2 *oder* $(AB + BC)^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \times BC$.

Dreyecks CDA gleich $\frac{1}{2} DC \times EF$, also der Inhalt des Trapezes $= \frac{1}{2} AB \times EF + \frac{1}{2} DC \times EF = EF \times \left(\frac{AB + CD}{2}\right)$. Ist dieser Beweis hier etwan deshalb nicht zugelassen worden, um den algebraischen Satz, daſs $\frac{1}{2} AB \times EF + \frac{1}{2} DC \times EF = EF \times \left(\frac{AB + CD}{2}\right)$ ist, zu vermeiden, so zeigt sich daran nur, daſs ein Beweis leicht weitläuftig werden kann, wenn man den Sätzen der Rechenkunst auszuweichen sucht.

A. d. Uebers.

Man zeichne das Quadrat ACDE, und mache AF = AB, ziehe FG parallel mit AC, und BH parallel mit AE.

Das Quadrat ACDE ist jetzt in vier Theile getheilt: der erste Theil ABIF ist das Quadrat über AB, weil man AF = AB gemacht hat; der zweyte Theil IGDH ist das Quadrat über BC; denn weil AC = AE und AB = AF ist, so ist die Differenz AC — AB der Differenz AE — AF gleich, welches giebt BC = EF. Aber wegen der Parallelen ist IG = BC, und DG = EF; folglich ist HIGD gleich dem Quadrat über BC. Werden diese beiden Theile vom ganzen Quadrat abgezogen, so bleiben die beiden Rechtecke BCGI und EFIH, welche jedes AB $\times$ BC zum Maafse haben, übrig; folglich ist das Quadrat über AC u. s. w.

Anmerkung. Dieser Satz kommt mit der algebraischen Entwicklung des Quadrats einer zweytheiligen Gröſse überein, welche sich so ausdrücken läſst:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Neunter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 107. *Wenn die Linie AC der Unterschied zweyer Linien AB und BC ist, so enthält das Quadrat über AC dasjenige über AB, und das andere über BC, weniger zweymal das Rechteck unter AB und BC; das heiſst, es ist:* AC^2 *oder* $(AB - BC)^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC.$

Man beschreibe das Quadrat ABIF und mache AE = AC. Man ziehe ferner CG mit BI, und HK mit AB parallel und vollende das Quadrat EFLK.

Die beiden Rechtecke CBIG und GLKD haben beide AB $\times$ BC zum Maafse: zieht man sie von der ganzen Figur ABILKEA, welche den Inhalt $AB^2 + BC^2$

hat, ab, so bleibt das Quadrat ACDE übrig; folglich (wie oben).

Anmerkung. Dieser Satz kommt mit der algebraischen Formel

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

überein.

Zehnter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 108. *Das Rechteck unter der Summe und Differenz zweyer Linien ist gleich dem Unterschiede der Quadrate dieser Linien. Also ist:*

$$(AB + BC) \times (AB - BC) = AB^2 - BC^2.$$

Man beschreibe über AB und AC die Quadrate ABIF und ACDE. Man verlängere AB um BK = BC, und vollende das Rechteck AKLE. Die Grundlinie AK dieses Rechtecks ist die Summe der beiden Linien AB und BC; seine Höhe ist der Unterschied der nämlichen Linien; folglich ist das Rechteck AKLE = (AB + BC) × (AB − BC). Aber dieses Rechteck ist aus den beiden Theilen ABHE und BHLK zusammengesetzt, und der Theil BHLK ist dem Rechteck EDGF gleich, weil BH = DE und BK = EF; also ist AKLE = ABHE + EDGF. Aber diese beiden Theile machen zusammen das Quadrat ABIF weniger dem Quadrat DHIG aus, welches letztere das Quadrat über BC ist; also ist $(AB + BC) \times (AB - BC) = AB^2 - BC^2$.

Anmerkung. Dieser Satz kommt mit der algebraischen Formel

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

überein *).

*) Die drey Sätze 8, 9 und 10 können, meines Erachtens, füglich wegbleiben; denn wenn einmal bewiesen worden, daſs

Eilfter Satz.

Lehrsatz.

Das Quadrat über der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreyecks, ist gleich der Summe der Quadrate über den andern beiden Seiten.

die Zahl derjenigen Quadrate über der Maaſs Einheit, die sich in der Fläche eines Parallelogramms befinden, das heiſst, der Inhalt des Parallelogramms, gleich ist dem Product der Zahlen der Maaſse Einheit in der Grundlinie und Höhe, daſs also, z. B. der Inhalt des Quadrats über a durch a^2, der Inhalt des Rechtecks unter a und b durch a b ausgedrückt werden könne; so folgt unmittelbar, daſs sich der Inhalt des Quadrats über $a+b$ durch $(a+b)^2$, der Inhalt des Quadrats über $a-b$ durch $(a-b)^2$, der Inhalt des Rechtecks unter $a+b$ und $a-b$ durch $(a+b)(a-b)$ ausdrücken lasse. Daſs nun $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ist, läſst sich algebraisch, oder abstract, kürzer zeigen, als geometrisch. Die Bedeutung der einzelnen Theile der entwickelten Gröſsen aber kann man in der Figur nach Belieben aufsuchen. Es ist nicht einzusehen, welchen wesentlichen Nutzen das *Versinnlichen* von Sätzen der Rechenkunst haben sollte. Wäre das Sinnliche in der Mathematik besser als das Abstracte, so wäre es auch z. B. besser, mit Rechenpfennigen oder mit Steinchen zu rechnen, als mit Zahlen. Daſs aber ein solches Versinnlichen nicht besser sey als die Abstraction, folgt schon daraus, daſs sich ein Satz abstract um so viel leichter behandeln läſst, je verwickelter er ist. Die sinnliche Nachweisung durch die Figur wird gewöhnlich bald so schwierig, daſs sie bey weiten dunkler ist als die analytische, z. B. bey dem cartesischen Lehrsatze, und in der Regel immer mehr, je weiter man kommt. Deshalb ist es rathsam, die abstracte Methode schon an den einfachern Sätzen zu üben und nicht erst, wenn man ohne sie nicht weiter kommen kann.

A. d. Uebers.

Fig. 109. ABC sey ein, in A rechtwinkliges, Dreyeck. Nachdem die Quadrate über den drey Seiten beschrieben worden, ziehe man aus dem rechten Winkel auf die Hypothenuse die senkrechte Linie AD, und verlängere sie bis in E. Ferner ziehe man die Diagonalen AF und CH.

Der Winkel ABF ist aus dem Winkel ABC und dem rechten Winkel CBF zusammengesetzt; der Winkel CBH aus dem nämlichen Winkel ABC, und dem rechten Winkel ABH; also ist der Winkel ABF = HBC. Aber, als Seiten eines und desselben Quadrats, sind AB und BH, BF und BC einander gleich; also haben die Dreyecke ABF und HBC einen gleichen Winkel zwischen gleichen Seiten: folglich sind sie gleich (1s B. 6r S.).

Das Dreyeck ABF ist aber die Hälfte des Rechtecks BDEF, (oder kürzer bezeichnet, des Rechtecks BE), weil es die nämliche Grundlinie BF, und die nämliche Höhe BD hat. Eben so ist das Dreyeck HBC die Hälfte des Quadrats AH; denn weil der Winkel BAC ein rechter ist, eben wie der Winkel BAL, so bilden AC und AL eine grade, mit HB parallele, Linie: folglich haben das Dreyeck HBC und das Quadrat AH die gemeinschaftliche Grundlinie BH, und die gemeinschaftliche Höhe AB; folglich ist das Dreyeck die Hälfte des Quadrats.

Es ward aber schon bewiesen, dafs das Dreyeck ABF so grofs ist als das Dreyeck HBC; folglich ist das Rechteck BDEF, welches dem doppelten Dreyeck ABF an Inhalt gleich ist, so grofs als das Quadrat AH, welches dem zweifachen Dreyeck HBC an Inhalt gleicht. Eben so kann bewiesen werden, dafs das Rechteck CDEG so grofs ist als das Quadrat AI; aber die beiden Rechtecke BDEF und CDEG machen zu-

sammen das Quadrat BCGF aus; also ist das Quadrat BCGF über der Hypothenuse, gleich der Summe der Quadrate über den andern beiden Seiten, oder $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Erster Zusatz. Folglich ist das Quadrat des einen Schenkels eines rechten Winkels gleich dem Quadrat der Hypothenuse, weniger dem Quadrat des andern Schenkels; welches sich so ausdrücken läſst:

$$AB^2 = BC^2 - AC^2.$$

Fig. 118. *Zweyter Zusatz.* Es sey ABCD ein Quadrat, AC seine Diagonale; das Dreyeck ABC ist alsdann rechtwinklig und gleichschenklig; also ist $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2AB^2$; folglich ist das Quadrat über der Diagonale AC eines Quadrats, gleich dem zweyfachen Quadrat über der Seite AB.

Diese Eigenschaft läſst sich sinnlich darstellen, wenn man durch die Puncte A und C Parallelen mit BD, und durch die Puncte B und D Parallelen mit AC zieht: alsdann entsteht ein neues Quadrat EFGH, welches Quadrat das von AC ist. Aber, wie man sieht, enthält EFGH acht Dreyecke, deren jedes ABE gleich ist, während ABCD nur vier derselben enthält; also ist das Quadrat EFGH doppelt so groſs als das Quadrat ABCD.

Weil $AC^2 : AB^2 = 2 : 1$ so findet man, wenn man die Quadratwurzel auszieht, $AC : AB = \sqrt{2} : 1$, *folglich ist die Diagonale eines Quadrats im Verhältniſs zu seiner Seite incommensurabel.*

Dieser Satz wird bey einer andern Gelegenheit weiter entwickelt werden.

Fig. 109. *Dritter Zusatz.* Es wurde bewiesen, daſs das Quadrat AH so groſs ist als das Rechteck BDEF. Wegen der gemeinschaftlichen Höhe BF, verhält sich

aber das Quadrat BCGF zu dem Rechteck BDEF, wie die Grundlinie BC zur Höhe BD; also ist

$$BC^2 : AB^2 = BC : BD,$$

das heifst: *das Quadrat der Hypothenuse verhält sich zum Quadrat einer der Schenkel des rechten Winkels, wie die Hypothenuse selbst zu ihrem an dieser Seite liegenden Abschnitte.* Abschnitt heifst hier das, mittelst des Perpendikels aus dem rechten Winkel auf die Hypothenuse, von dieser abgeschnittene Stück; BD ist der Abschnitt welcher an der Seite AB liegt, DC der Abschnitt an der Seite AC; wie oben würde man auch haben

$$BC : AC^2 = BC : CD$$

Vierter Zusatz. Die Rechtecke BDEF und DCGE verhalten sich, weil sie einerley Höhe haben, wie ihre Grundlinien BD und CD. Da nun die Rechtecke so grofs sind als die Quadrate AB^2 und AC^2, so ist

$$AB^2 : AC^2 = BD : DC,$$

das heifst: *die Quadrate der beiden Schenkel eines rechten Winkels verhalten sich wie die an diesen Schenkeln liegenden Abschnitte der Hypothenuse.*

Zwölfter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 110. *Wenn in einem Dreyeck ABC der Winkel spitz ist, so ist das Quadrat der gegenüberliegenden Seite kleiner als die Summe der Quadrate der Seiten, welche den Winkel C einschliefsen, und wenn man AD auf BC senkrecht zieht, so ist der Unterschied gleich dem doppelten Rechteck BD $\times$ CD, so dafs*

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\,BC \times CD.$$

Es finden zwey Fälle statt.

Erstlich. Wenn das Perpendikel innerhalb des Dreyecks ABC liegt, so ist BD = BC — CD, und folg-

lich (9r S.), $BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \times CD$. Addirt man auf beiden Seiten AD^2, und erwägt, dafs in den rechtwinkligen Dreyecken ABD und ADC, $AD^2 + BD^2 = AB^2$ und $AD^2 + DC^2 = AC^2$ ist, so erhält man $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times CD$.

Zweytens. Fällt das Perpendikel aus dem Dreyecke ABC hinaus, so erhält man $BD = CD - BC$, und folglich (9r Satz) $BD^2 = CD^2 + BC^2 - 2CD \times BC$. Rechnet man auf beiden Seiten AD^2 hinzu, so folgt daraus

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times CD.$$

Dreyzehnter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 111. *Wenn in einem Dreyecke ABC der Winkel C stumpf ist, so ist das Quadrat der gegenüberliegenden Seite AB gröfser als die Summe der Quadrate der Seiten, welche den Winkel C einschliefsen, und wenn man AD senkrecht auf BC zieht, so ist der Unterschied gleich dem doppelten Rechteck $BC \times CD$, folglich ist*

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC \times CD.$$

Das Perpendikel kann nicht in das Dreyeck fallen; denn fiele es z. B. in E, so würde das Dreyeck ACE zu gleicher Zeit den rechten Winkel E und den stumpfen C haben, welches unmöglich ist (1s B. 27r S.); folglich fällt es aufserhalb, und es ist $BD = BC + CD$. Daraus folgt (8r S.) $DB^2 = BC^2 + CD^2 + 2BC \times CD$. Rechnet man auf beiden Seiten AD^2 hinzu, und macht die nöthigen Reductionen, wie im vorigen Lehrsatze, so folgt $AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \times CD$ *).

*) Fig. 6. Die obigen Sätze 8 und 9 sind zu den Sätzen 12 und 13 nicht nothwendig, vielmehr können die letztern kürzer auf folgende Art bewiesen werden: Wenn AP, BG

Anmerkung. Das rechtwinklige Dreyeck ist das einzige, in welchem die Summe der Quadrate zweyer Seiten dem Quadrate der dritten gleich ist; denn wenn der Winkel zwischen den Seiten spitz ist, so ist die Summe ihrer Quadrate gröſser, und wenn er stumpf ist, kleiner als das Quadrat der gegenüberliegenden Seite.

Vierzehnter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 112. *Wenn man in einem beliebigen Dreyeck ABC aus einem Winkelscheitel auf die Mitte der gegenüberliegenden Seite die Linie AE zieht, so ist*

$$AB^2 + AC^2 = 2AE^2 + 2BE^2$$

Man ziehe AD auf die Grundlinie BC senkrecht, so giebt das Dreyeck AEC, vermöge des zwölften Lehrsatzes,

$$AC^2 = AE^2 + EC^2 - 2EC \times ED$$

und CK die Quadrate über AC, AB und BC sind, so ist HB = AB, BC = BK und HBC = ABK, also △HBC = △ABK. Aber △ HBC = ½ □ BI und △ ABK = ½ □ BL, alles aus ähnlichen Gründen wie oben beim pythagorischen Lehrsatze (11r S.), also ist □ BI = □ BL.

Nun ist eben so AN = AC, AB = AG und NAB = GAC; also △ NAB = △ GAC, und weil △ GAC = ½ □ AI, △ NAB = ½ □ AO, so ist □ AI = □ AO. Ganz auf dieselbe Weise ist □ OC = □ CL; also ist □ AO + □ OC oder AC^2 = □ AI + □ CL. Aber □ AI = AB^2 — □ BI und □ CL = BC^2 — □ BL; also ist $AC^2 = AB^2 + BC^2$ — □ BI — □ BL, oder weil □ BI = □ BL war,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \,\square\, BI$$

wo □ BI = AB × AE = BC × BD.

Der Beweis behält denselben Gang wenn der Winkel C stumpf ist, oder D oder C nicht in die Seiten BC und AB fallen. A. d. Uebers.

Das Dreyeck ABE giebt vermöge des dreyzehnten Lehrsatzes,

$$AB^2 = AE^2 + EB^2 + 2EB \times ED.$$

Zieht man beides zusammen und bemerkt, dafs EB = EC ist, so erhält man

$$AB^2 + AC^2 = 2AE^2 + 2EB^2.$$

Zusatz. Folglich ist in jedem Parallelogramm die Summe der Quadrate der Seiten gleich der Summe der Quadrate der Diagonalen.

Fig. 113. Denn die Diagonalen AC und BD halbiren einander in E (1s B. 32r S.); also giebt das Dreyeck ABC, $AB^2 + BC^2 = 2AE^2 + 2\,BE^2$.

Das Dreyeck ADC giebt auf gleiche Weise

$$AD^2 + DC^2 = 2AE^2 + 2DE^2.$$

Zieht man dieses Glied um Glied zusammen, und erwägt, dafs BE = DE ist, so erhält man

$$AB^2 + AD^2 + DC^2 + BC^2 = 4AE^2 + DE^2.$$

Aber $4AE^2$ ist das Quadrat von 2AE oder von AC; $4DE^2$ ist das Quadrat von BD, also ist die Summe der Quadrate der Seiten gleich der Summe der Quadrate der Diagonalen *).

Funfzehnter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 114. *Die mit den Grundlinien eines Dreyecks ABC parallele Linie DE theilt die Seiten AB und AC in gleichem Verhältnifs; so dafs*

$$AD : DB = AE : EC.$$

*) Wenn man Sätze wie diese, in die *Elements* der Geometrie aufnehmen will, so haben noch gar viele andere ein Recht darauf. Wahrscheinlich wäre es besser, solche weniger einfache Sätze, in einem besondern zweyten Theil des Lehrbegriffs zusammen zu fafsen.

A. d. Uebers.

Man ziehe BE und CD. Die beiden Dreyecke BDE und DEC haben einerley Grundlinien DE und einerley Höhe, weil ihre Scheitel B und C in einer mit der Grundlinie parallelen Linie liegen. Deshalb sind diese beiden Dreyecke gleich grofs (2r S.).

Die Dreyecke ADE und BDE, deren gemeinschaftlicher Scheitel E ist, haben einerley Höhe, und verhalten sich wie ihre Grundlinien AD und DB (6r S.); folglich ist:

$$ADE : BDE = AD : BD.$$

Die Dreyecke ADE und DEC haben den gemeinschaftlichen Scheitel D, folglich ebenfalls einerley Höhe. Mithin verhalten sie sich wie ihre Grundlinien AE und EC, und es ist:

$$ADE : DEC = AE : EC.$$

Aber die Dreyecke BDE und DEC sind gleich grofs, folglich ist wegen des gemeinschaftlichen Gliedes in den beiden obigen Proportionen:

$$AD : BD = AE : EC.$$

Erster Zusatz. Daraus folgt, wenn man die Proportion zusammensetzt $AD + DB : AD = AE + EC : AE$, oder $AB : AD = AC : AE$; auch $AB : BD = AC : CE$.

Fig. 115. *Zweyter Zusatz. Wenn man zwischen zwey graden Linien AB und CD beliebige Parallelen AC, EF, GH, BD u. s. w. zieht, so werden AB und CD in gleichen Verhältnissen getheilt, so dafs*

$$AE : CF = EG : FH = GB : HD.$$

Denn es sey O der Durchschnittspunct der graden Linien AB und CD, so ist in dem Dreyeck OEF, in welchem die Linie AC parallel mit der Grundlinie EF gezogen ist, $OE : AE = OF : CF$ oder $OE : OF = AE : CF$. In dem Dreyeck OGH ist auf gleiche Weise $OE : EG = OF : FH$, oder $OE : OF = EG : FH$; folglich vermöge der gemeinschaftlichen Glieder OE

und OF, AE : CF = EG : FH. Eben so wird bewiesen, daſs EG : FH = GB : HD u. s. w. Folglich werden die Linien AB und CD von den Parallelen EF und GH in gleichen Verhältnissen geschnitten *).

Sechszehnter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 116. *Wenn umgekehrt die Seiten AB und AC von der Linie DE in gleichem Verhältniſs geschnitten werden, so daſs AD : DB = AE : EC, so behaupte ich, daſs die Linie DE mit der Grundlinie BC parallel ist.*

Denn wäre nicht DE mit BC parallel, so sey es DO; dann ist zufolge des vorigen Lehrsatzes AD : BD = AO : OC. Aber nach der Voraussetzung ist AD : DB = AE : EC, also müſste seyn AO : OC = AE : EC, welches unmöglich ist, weil das Vorderglied AE gröſser ist als AO, das Hinterglied EC aber kleiner als OC; folglich kann eine durch den Punct D mit BC gezogene Parallele nicht von DE abweichen. Mithin ist DE diese Parallele selbst.

Anmerkung. Der nämliche Schluſs findet Statt, wenn man die Proportion AB : AD = AC : AE voraussetzte. Denn dieselbe giebt AB — AD : AD = AC — AE : AE, oder BD : AD = CE : AE.

Siebzehnter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 117. *Die Linie AD, welche den Winkel BAC eines Dreyecks halbirt, theilt die Grundlinie BC in zwey*

*) Hier ist die Lehre von den Verhältnissen der Linien, und folglich von der *Aehnlichkeit* der Figuren auf die Lehre von der *Gröſse* der Figuren gebaut, und unmittelbar mit ihr verbunden. Beyde lassen sich auch von einander abgesondert vortragen. A. d. Uebers.

Abschnitte BD und DC, welche sich wie die anliegenden Seiten AB und AC verhalten, so dafs

BD : DC = AB : AC.

Man ziehe CE durch C mit AD parallel, bis sie die Verlängerung von BA schneidet.

In dem Dreyecke BCE ist die Linie AD mit der Grundlinie CE parallel, also ist:

BD : DC = AB : AE (15r S.).

Aber das Dreyeck ACE ist gleichschenklig; denn wegen der Parallelen AD und CE ist der Winkel ACE = DAC, und der Winkel AEC = BAD (1s B. 23r S.). Aber nach der Voraussetzung ist DAC = BAD, also ist der Winkel ACE = AEC und folglich AE = AC (1s B. 13r S.). Setzt man in die obige Proportion, AC an die Stelle von AE, so erhält man

BD : DC = AB : AC.

Achtzehnter Satz.

Lehrsatz.

In gleichwinkligen Dreyecken sind die ähnlich liegenden Seiten in gleichem Verhältnisse, und die Dreyecke sind ähnlich.

Fig. 119. ABC und CDE sollen Dreyecke seyn, deren Winkel einzeln gleich sind, nämlich BAC = CDE, ABC = DCE und ACB = DEC; so behaupte ich, dafs die, ähnlich, oder an gleichen Winkeln liegenden Seiten in gleichem Verhältnisse sind; so, dafs BC : CE = AB : CD = AC : DE.

Man lege die homologen Seiten BC und CE in einerley Richtung, und verlängere die Seiten BA und ED bis sie sich in F schneiden.

Weil BCE eine grade Linie, und der Winkel BCA = CED ist, so folgt, dafs AC mit DE parallel

ist (1s B. 23r S.). Eben so, weil der Winkel ABC = DCE, ist die Linie AB mit DC parallel; folglich ist die Figur ACDF ein Parallelogramm.

In dem Dreyecke BFE ist die Linie AC mit der Grundlinie EF parallel, also ist BC : CE = BA : AF (15r S.). Setzt man nun Statt AF das ihr gleiche CD, so hat man

BC : CE = BA : CD.

Nimmt man in demselben Dreyecke BF zur Grundlinie, so ist CD mit dieser Grundlinie parallel, und man hat das Verhältniſs BC : CE = FD : DE. Statt FD setze man die ihr gleiche AC, so erhält man

BC : CE = AC : DE.

Endlich folgt aus diesen beiden Verhältnissen, weil sie beide die Glieder BC und CE haben,

AC : DE = BA : CD.

Folglich sind in den gleichwinkligen Dreyecken BAC und CDE, die ähnlich liegenden Seiten in gleichem Verhältnisse. Aber nach der zweyten Erklärung sind zwey Figuren ähnlich, wenn sie gleiche Winkel haben, und die ähnlich liegenden Seiten in gleichem Verhältnisse sind; folglich sind die beiden gleichwinkligen Dreyecke BAC und CDE ähnliche Figuren.

Zusatz. Damit zwey Dreyecke ähnlich sind, reicht es zu, wenn *zwey* Winkel in dem einen so groſs sind als in dem andern; denn alsdann ist auch der dritte Winkel gleich, und die beiden Dreyecke sind gleichwinklig.

Anmerkung. Es ist zu merken, daſs sich in ähnlichen Dreyecken die ähnlich liegenden Seiten den gleichen Winkeln gegenüber befinden; so sind die Seiten AB und DC ähnlich liegende, wenn der Winkel ACB dem Winkel DEC gleich ist. Eben so sind AC und DE ähnlich liegende Seiten, weil sie sich den glei-

chen Winkeln ABC und DCE gegenüber befinden. Kennt man die ähnlich liegenden Seiten, so hat man sogleich folgende Verhältnisse:

$$AB : DC = AC : DE = BC : CE.$$

Neunzehnter Satz.

Lehrsatz.

Zwey Dreyecke, deren ähnlich liegende Seiten in gleichem Verhältnisse stehen, sind gleichwinklig und ähnlich.

Fig. 120. Man setze, es sey BC : EF = AB : DE = AC : DF; so behaupte ich, daſs die Dreyecke ABC und DEF gleichwinklig sind, und daſs folglich A = D, B = E, C = F ist. Denn man mache, im Puncte E den Winkel FEG = B, und im Puncte F, den Winkel EFG = C, so wird der dritte Winkel G dem dritten A gleich, und die beiden Dreyecke ABC und EFG werden gleichwinklig seyn; folglich wird vermöge des vorigen Satzes BC : EF = AB : EG seyn. Aber nach der Voraussetzung ist BC : EF = AB : DE; also ist EG = DE. Vermöge des nämlichen Satzes ist ferner BC : EF = AC : FG; aber nach der Voraussetzung ist BC : EF = AC : DF, also ist FG = DF; folglich sind in den Dreyecken EGF und DEF die drey Seiten einzeln gleich, folglich sind die Dreyecke gleich (1s B. 11r S.). Aber nach der Construction sind die Dreyecke EGF und ABC gleichwinklig; folglich sind auch die Dreyecke DEF und ABC gleichwinklig und ähnlich.

Erste Anmerkung. Aus diesen beiden Sätzen sieht man, daſs bey Dreyecken die Gleichheit der Winkel eine Folge aus dem gleichen Verhältnisse der Seiten ist, und umgekehrt, so daſs eine dieser Bedingungen für die Aehnlichkeit der Dreyecke hinreicht. Bey Fi-

Staatl. Bibliothek Passau

guren von mehr als drey Seiten ist dies nicht der Fall; denn schon bey Vierecken können die Seiten, ohne dafs sich die Winkel änderten, andere Verhältnisse haben, oder die Winkel können sich ändern ohne die Seiten; folglich ist schon bey Vierecken die Gleichheit des Verhältnisses der Seiten keine Folge der Gleichheit der Winkel und umgekehrt. Man sieht Fig. 121. z. B. dafs, wenn man EF mit BC parallel zieht, die Winkel des Vierecks AEFD, denen des Vierecks ABCD gleich sind, aber das Verhältnifs der Seiten ist ein anderes; eben so ohne die vier Seiten AB, BC, CD und AD zu verändern, kann der Punct B dem Puncte D näher rücken, welches die Winkel verändert.

Zweyte Anmerkung. Die beiden letzten Sätze, welche eigentlich nur einen ausmachen, verbunden mit dem vom Quadrate der Hypothenuse, sind die wichtigsten und folgereichsten in der Geometrie. Sie reichen beynahe allein zu allen Anwendungen und zur Auflösung aller Aufgaben hin: dieses kommt daher, weil alle Figuren in Dreyecke, alle Dreyecke aber wiederum in zwey rechtwinklige Dreyecke zerlegt werden können *). So umfassen die allgemeinen Eigenschaften der Dreyecke, die aller andern Figuren.

Zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

Zwey Dreyecke, welche einen gleichen Winkel zwischen gleich proportionirten Seiten haben, sind ähnlich.

Fig. 122. Der Winkel A sey gleich D und AB : DE = AC : DF; so behaupte ich, dafs das Dreyeck ABC, dem Dreyecke DEF ähnlich ist.

*) Es wäre sehr interessant, diese wichtige Behauptung genauer zu rechtfertigen. A. d. Uebers.

Man mache AG = DE und ziehe GH mit BC parallel, so wird der Winkel AGH dem Winkel ABC gleich seyn (1s B. 23r S.). Die Dreyecke AGH und ABC werden also gleichwinklig seyn; folglich wird AB : AG = AC : AH seyn. Aber, der Voraussetzung nach, ist AB : DE = AC : DF, und der Construction nach, AG = DE; also ist AH = DF. Die beiden Dreyecke AGH und DEF haben also einen gleichen Winkel zwischen gleichen Seiten; folglich sind sie gleich. Aber die Dreyecke AGH und ABC sind ähnlich; folglich sind auch die Dreyecke DEF und ABC ähnlich.

Ein und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

Wenn die Seiten eines Dreyecks mit den ähnlich liegenden Seiten eines andern parallel sind, oder auf denselben senkrecht stehen, so sind die Dreyecke ähnlich.

Fig. 123. *Erstlich.* Wenn die Seite AB mit DE parallel ist und BC mit EF, so ist der Winkel ABC gleich dem Winkel DEF (1s B. 26r S.). Ist ferner AC mit DF parallel, so ist der Winkel ACB gleich dem Winkel DFE und ABC = DEF; also sind die Dreyecke ABC und DEF gleichwinklig, und folglich ähnlich.

Fig. 124. *Zweytens.* Die Seite DE sey senkrecht auf AB, die Seite DF auf AC, so sind in dem Vierecke AIDH die beiden Winkel I und H rechte. Alle vier Winkel desselben aber sind zusammen gleich vier rechten (1s B. 28r S.); folglich sind die beiden übrigen IAH und IDH gleich zwey rechten. Aber die beiden Winkel EDF und IDH sind auch gleich zwey rechten; folglich ist der Winkel EDF dem Winkel IAH, oder BAC gleich. Eben so wird, wenn die dritte Seite EF senkrecht auf die dritte BC ist, bewiesen, dafs die Winkel DFE = C

und DEF = B sind, folglich hat das Dreyeck EDF, dessen Seiten auf denen des Dreyecks ABC senkrecht stehen, mit demselben gleiche Winkel, und ist ihm folglich ähnlich.

Anmerkung. In dem Falle paralleler Seiten sind die parallelen Seiten die ähnlich liegenden, und in dem Falle der senkrechten sind es die senkrechten. Also sind im letzten Falle DE und AB, DF und AC, EF und BC die ähnlich liegenden Seiten.

Im Falle der senkrechten Seiten könnten die Dreyecke eine, von der in der 124n Figur verschiedene Lage haben. Aber die Gleichheit der Winkel, der Reihe nach, ließe sich dennoch beweisen, entweder durch Vierecke, wie AIDH, in welchen zwey Winkel rechte sind, oder durch Vergleichung zweyer Dreyecke, welche mit Winkeln, die dem Scheitel gegenüber liegen, jedes einen rechten Winkel haben. Auch kann man immer annehmen, daſs innerhalb des Dreyecks ABC ein Dreyeck EBF gezeichnet sey, dessen Seiten mit denen des Dreyecks ABC parallel sind, und dann geht der Beweis, in den auf die 124ste Figur passenden, über *).

*) Dieser ein und zwanzigste Satz bezieht sich blos auf die Lage zweyer Dreyecke *gegen einander* in der Ebene, nicht wie bey andern Fällen der Aehnlichkeit der Dreyecke, auf die Lage der Seiten der Dreyecke *unter einander* in jedem besonders, oder was daſselbe ist, auf die Gestalt der Dreyecke an sich. Deshalb ist zu merken, daſs dieser Fall keiner derjenigen ist, in welchem Dreyecke ihrer eigenthümlichen Beschaffenheit nach ähnlich sind. Solcher wesentlichen Fälle giebt es nur viere, nämlich:

1. wenn zwey Winkel einzeln gleich sind;
2. wenn ein Winkel gleich ist und die beiden ihn einschlieſsenden Seiten proportional sind;

Zwey und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

Fig. 125. *Beliebige grade Linien AF, AG u. s. w. durch den Scheitel eines Dreyecks gezogen, theilen die Grundlinie BC und jede mit ihr parallele Linie DE in gleichem Verhältnisse, so dafs DI : BI = IK : FG = KL : GH u. s. w.*

Denn weil DI mit BF parallel ist, so sind die Dreyecke ADI und ABF gleichwinklig, und es ist DI : BF = AI : AF. Eben so, weil IK mit FG parallel ist, hat man AI : AF = IK : FG, folglich ist wegen des gemeinschaftlichen Verhältnisses AI : AF auch DI : BF

3. wenn zwey Seiten proportional sind, und der der gröfsern gegenüberliegende Winkel gleich ist;

4. wenn alle drey Seiten proportional sind.

Uebrigens ist der Satz nicht auf die wechselseitige Perpendicularität der Seiten beschränkt, sondern er gilt allgemein für jeden Winkel, unter welchen die Dreyecke gegen einander liegen, und heifst also:

Wenn die Seiten eines Dreyecks mit den Seiten eines andern gleiche Winkel machen, so sind die Dreyecke ähnlich;

ist auch zugleich der Fall des Parallelismus der Seiten mit begriffen.

Der Beweis ist mit einer geringen Abweichung der nämliche, den Legendre giebt, nämlich:

Die Seite DE (Fig. 124) mache mit der Seite AB eben den Winkel unter welchen die Seite DF die Seite AC schneidet, so dafs also DIA = DHC; so ist DIA + DHA gleich zwey rechten, weil DHC + DHA gleich zwey rechten ist. Da nun die vier Winkel in dem Vierecke AIDH zusammen vier rechte ausmachen, so ist auch A + D gleich zwey rechten. Aber IDH + EDF ist gleich zwey rechten; also ist EDF = IAH = BAC u. s. w.

A. d. Uebers.

= IK : FG. Eben so findet man IK : FG = KL : GH; folglich wird die Linie DE in den Puncten I, K, L u. s. w. eben so getheilt, wie BC in den Puncten F, G, H u. s. w.

Zusatz. Wenn also BC in den Puncten F, G, H u. s. w. in *gleiche* Theile getheilt würde, so würde die Parallele DE in den Puncten I, K, L u. s. w. ebenfalls in *gleiche* Theile getheilt.

Drey und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

Fig. 126. *Wenn man aus dem Scheitel des rechten Winkels eines rechtwinkligen Dreyecks auf die gegenüberliegende Hypothenuse die Linie AD senkrecht zieht, so sind*

Erstlich die partiellen Dreyecke ABD und ADC unter einander, und dem ganzen Dreyecke ABC ähnlich.

Zweytens ist jede Seite AB oder AC die mittlere Proportionallinie zwischen der Hypothenuse BC und dem anliegenden Abschnitte BD oder DC.

Drittens ist die senkrechte Linie AD die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten BD und DC.

Denn *Erstlich* haben die Dreyecke BAD und BAC den Winkel B gemeinschaftlich; der rechte Winkel BDA aber ist dem rechten Winkel BAC gleich; folglich ist der dritte Winkel des einen Dreyecks dem dritten Winkel des andern gleich; folglich sind diese beiden Dreyecke gleichwinklig und ähnlich. Eben so läſst sich beweisen, daſs die Dreyecke DAC und BAC ähnlich sind. Folglich sind alle drey Dreyecke gleichwinklig und ähnlich.

Zweytens. Weil die Dreyecke BAD und BAC ähnlich sind, so stehen ihre gleichliegenden Seiten in glei-

chem Verhältnisse. Nun sind die Seiten BD in dem kleinen und BA in dem grofsen Dreyecke ähnlich liegende, weil sie gleichen Winkeln BAD und BCA gegenüber stehen; ferner sind, die Hypothenuse BA im kleinen, und die Hypothenuse BC im grofsen Dreyecke, ähnlich liegende Seiten; also ist BD : BA = BA : BC. Eben so ist DC : AC = AC : BC; folglich ist, zweytens, jede der beiden Seiten AB und AC die mittlere Proportionale zwischen der Hypothenuse und dem an der Seite liegenden Abschnitte.

Drittens. Endlich giebt die Aehnlichkeit der Dreyecke ABD und ADC, wenn man die ähnlich liegenden Seiten vergleicht, BD : AD = AD : DC; folglich ist die senkrechte Linie AD die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten BD und DC der Hypothenuse.

Anmerkung. Aus dem Verhältnisse BD : AB = AB : BC folgt, wenn man die Producte der äufsern und mittlern Glieder gleich setzt: $AB^2 = BD \times BC$. Eben so $AC^2 = DC \times BC$, also $AB^2 + AC^2 = BD \times BC + DC \times BC$. Das zweyte ist mit $(BD + DC) \times BC$ einerley und reducirt sich auf $BC \times BC$ oder BC^2. Also ist $AB^2 + AC^2 = BC^2$, folglich ist das Quadrat über der Hypothenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden Seiten AB und AC. Wir finden also hier den Satz von dem Quadrate der Hypothenuse auf einem von dem obigen sehr verschiedenen Wege; es folgt daraus, dafs auch der Satz von dem Quadrate der Hypothenuse eine Folge von der Proportionalität der Seiten gleichwinkliger Dreyecke ist. Die Hauptsätze der Geometrie reduciren sich also gleichsam auf den einzigen Satz, dafs die ähnlich liegenden Seiten gleichwinkliger Dreyecke proportional sind.

Man kommt zuweilen, wie man an diesem Beyspiele sieht, wenn man Folgerungen aus einem oder mehreren Sätzen zieht, wiederum auf andere schon bewiesene Sätze zurück, und es ist den Lehrsätzen der Geometrie vorzüglich eigen, und zugleich ein unverkennbarer Beweis ihrer Richtigkeit, dafs man, wenn man sie mit einander verbindet, allemal wieder richtige Sätze erhält, in so fern man nur richtig schliefst. Dieses würde nicht der Fall seyn, wenn einer oder der andere Satz falsch, oder nur zum Theil richtig wäre. Denn dann könnte der Fehler, wenn die Sätze mit einander verbunden werden, gar leicht sich vergröfsern und sichtbar werden. Wir sehen davon etwas Aehnliches bey den Beweisen, die einen Satz ad absurdum führen. Ein solcher Beweis besteht darin, dafs man, wenn man z. B. zeigen soll, dafs zwey Gröfsen einander gleich sind, beweiset, dafs wenn sie im mindesten ungleich wären, die darauf gebauten Schlüsse zuletzt auf eine offenbare und handgreifliche Ungereimtheit führen, welches die Ueberzeugung giebt, dafs die Gröfsen gleich sind.

Fig. 127. *Zusatz.* Wenn man aus einem Puncte A eines Kreisumfanges zwey Sehnen AB und AC nach den Enden des Durchmessers BC zieht, so ist das Dreyeck BAC in A rechtwinklig (2s B. 18r S.), also ist:

Erstlich. Die senkrechte Linie AD die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten BD und DC des Durchmessers, oder was das Nämliche ist, das Quadrat von AD ist gleich dem Rechtecke unter BD und BC.

Zweytens. Die Sehne AB ist die mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser BC und dem an ihr liegenden Abschnitte BD, oder, was das Nämliche ist, es ist $AB^2 = BD \times BC$. Eben so ist $AC^2 = CD \times BC$, folglich ist $AB^2 : AC^2 = BD : DC$, und wenn man AB^2

mit BC^2 vergleicht $AB^2 : BC^2 = BD : BC$. Eben so $AC^2 : BC^2 = DC : BC$. Diese Verhältnisse der Quadrate der Seiten unter sich und mit dem Quadrate der Hypothenuse sind schon im 3ten und 4ten Zusatze des 11ten Satzes gefunden.

Vier und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

Fig. 128. *Der Inhalt zweyer Dreyecke, welche einen gleichen Winkel haben, verhält sich wie die Rechtecke unter den Seiten, die den gleichen Winkel einschliefsen. Also verhält sich das Dreyeck ABC zum Dreyecke ADE, wie das Rechteck $AB \bowtie AC$ zum Rechteck $AD \bowtie AE$.*

Man ziehe BE. Die beiden Dreyecke ABE und ADE, welche den gemeinschaftlichen Scheitel E haben, sind gleich hoch, und verhalten sich folglich wie ihre Grundlinien AB und AD (6r S.), also ist:

$$ABE : ADE = AB : AD.$$

Eben so ist:

$$ABC : ABE = AC : AE.$$

Multiplicirt man die Glieder dieser beiden Proportionen mit einander der Reihe nach, und läfst das gemeinschaftliche Glied ABE weg, so erhält man:

$$ABC : ADE = AB \bowtie AC : AD \bowtie AE.$$

Zusatz. Also würden die beiden Dreyecke gleich grofs seyn, wenn das Rechteck $AB \bowtie AC$ dem Rechtecke $AD \bowtie AE$ gleich, oder wenn $AB : AD = AE : AC$ wäre, welches der Fall seyn würde, wenn die Linie DC mit BE parallel wäre.

Fünf und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

Fig. 122. *Zwey ähnliche Dreyecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten.*

Es sey der Winkel A = D, und der Winkel B = E, so hat man zuerst wegen der gleichen Winkel A und D, vermöge des vorhergehenden Satzes:

$$ABC : DEF = AB \times AC : DE \times DF.$$

Dann ist wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke:

$$AB : DE = AC : DF.$$

Multiplicirt man die Glieder dieser Proportion, der Reihe nach, mit den Gliedern der identischen Proportion:

$$AC : DF = AC : DF,$$

so kommt

$$AB \times AC : DE \times DF = AC^2 : DF^2;$$

folglich

$$ABG : DEF = AC^2 : DF^2.$$

Folglich verhalten sich ähnliche Dreyecke ABC und DEF, wie die Quadrate der ähnlich liegenden Seiten AC und DF, oder wie die Quadrate zweyer beliebigen andern ähnlich liegenden Seiten.

Sechs und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

Aehnliche Vierecke sind aus einer gleichen Zahl von ähnlichen Dreyecken zusammengesetzt, die gegen einander einerley Lage haben.

Fig. 129. Man ziehe in dem Vielecke ABCDE, aus der Ecke A die Diagonalen AC, AD nach den andern Ecken. In dem andern Vielecke FGHIK ziehe man eben so aus der Ecke F, die wie A liegt, die Diagonalen FH, FI, nach den andern Ecken.

Weil die Vielecke ähnlich sind, so ist der Winkel ABC dem ähnlich liegenden Winkel FGH gleich (2te Erkl.), und die Seiten AB, BC sind den Seiten FG, GH proportional, so dafs AB : FG = BC : GH. Daraus folgt, dafs die Dreyecke ABC, FGH einen gleichen Winkel zwischen proportionalen Seiten haben, folglich

sind sie ähnlich (20r S.); folglich ist der Winkel BCA = GHF. Zieht man diese gleichen Winkel von den gleichen Winkeln BCD und GHI ab, so folgt, dafs die übrig bleibenden Winkel ACD, FHI auch gleich sind. Aber weil die Dreyecke ABC und FGH ähnlich sind, so ist AC : FH = BC : GH; ferner ist, wegen der Aehnlichkeit der Vielecke (2te Erkl.), BC : GH = CD : HI, also ist AC : FH = CD : HI. Es war aber der Winkel ACD = FHI, also haben die Dreyecke ACD und FHI einen gleichen Winkel zwischen proportionalen Seiten, folglich sind sie ähnlich. So kann man fortfahren, um die Aehnlichkeit der folgenden Dreyecke zu beweisen, und zwar für jede beliebige Zahl von Seiten der gegebenen Vielecke; folglich sind zwey ähnliche Vielecke aus einer gleichen Zahl von ähnlichen Dreyecken zusammengesetzt, die gegen einander einerley Lage haben.

Anmerkung. Der Satz findet auch umgekehrt Statt, nämlich: *wenn zwey Vielecke aus einer gleichen Zahl von ähnlichen und ähnlich liegenden Dreyecken zusammengesetzt sind, so sind die Vielecke ähnlich.*

Denn aus der Aehnlichkeit der verschiedenen Dreyecke folgt, dafs der Winkel ABC = FGH, BCA = GHI, ACD = FHI, folglich ist BCD = GHI; eben so CDE = HIK. Ferner ist AB : FG = BC : GH = AC : FH = CD : HI; also haben die beiden Vielecke gleiche Winkel und proportionale Seiten; folglich sind sie ähnlich.

Sieben und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

Die Umfänge ähnlich liegender Vielecke verhalten sich wie ähnliche liegende Seiten, ihre Flächen aber wie die Quadrate solcher Seiten.

Fig. 129. *Erstlich.* Weil vermöge der Natur ähnlicher Figuren AB : FG = BC : GH = CD : HI u. s. w. ist, so verhält sich, vermöge dieser Reihe von gleichen Verhältnissen, die Summe der Vorderglieder AB + BC + CD u. s. w., welche der Umfang der ersten Figur ist, zur Summe der Hinterglieder FG + GH + HI u. s. w., welche der Umfang der zweyten Figur ist, wie ein einzelnes Vorderglied zu dem ihm entsprechenden Hintergliede, oder wie z. B. die Seite AB zu der ähnlich liegenden FG.

Zweytens. Weil die Dreyecke ABC und FGH ähnlich sind, so ist (25r S.) $ABC : FGH = AC^2 : FH^2$; eben so geben die ähnlichen Dreyecke ACD und FHI, $ACD : FHI = AC^2 : FH^2$; folglich ist wegen des gemeinschaftlichen Verhältnisses $AC^2 : FH^2$

$$ABC : FGH = ACD : FHI.$$

Auf gleiche Weise ist:

$$ACD : FHI = ADE : FIK,$$

u. s. w., wenn mehrere Dreyecke da wären. Aus dieser Reihe gleicher Verhältnisse folgt aber, dafs sich die Summe der Vorderglieder ABC + ACD + ADE, oder das Vieleck ABCDE zur Summe der Hinterglieder FGH + FHI + FIK, oder zum Vielecke FGHIK verhält, wie ein einzelnes Vorderglied ABC, zu dem ihm entsprechenden Hintergliede FGH, oder wie AB^2 zu FG^2; folglich verhalten sich die Flächen ähnlicher Vielecke wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten.

Zusatz. Wenn man drey ähnliche Figuren zeichnet, von welchen ähnliche Seiten den drey Seiten eines rechtwinkligen Dreyecks gleich sind, so ist die Figur über der gröfsten Seite so grofs als die Figur über den beiden andern Seiten zusammen genommen. Denn die drey Figuren verhalten sich wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten; das Quadrat der Hypothenuse

aber ist gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten; folglich u. s. w.

Acht und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

Fig. 130. *Die Theile, in welche sich Sehnen eines Kreises AB und CD zerschneiden, stehen umgekehrt in gleichem Verhältnisse, das heifst, es ist AO : DO = CO : BO.*

Man ziehe AC und BD. In den Dreyecken ACO und BOD sind die Scheitelwinkel O gleich; ferner ist der Winkel A dem Winkel D gleich, weil sie in denselben Kreisabschnitt eingeschrieben sind (2s B. 18r S.). Aus demselben Grunde ist der Winkel C = B, folglich sind diese Dreyecke ähnlich, und die ähnlich liegenden Seiten geben das Verhältnifs AO : DO = CO : BO.

Zusatz. Daraus folgt AO ⋈ OB = DO ⋈ CO; folglich ist das Rechteck unter den beiden Theilen der einen Sehne dem Rechtecke unter den beiden Theilen der andern Sehne gleich.

Neun und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

Fig. 131. *Wenn man von einem Puncte O aufserhalb eines Kreises die Secanten OB und OC zieht, welche sich in den hohlen Bogen BC endigen, so verhalten sich die ganzen Secanten umgekehrt wie ihre aufserhalb liegenden Theile, das heifst, es ist OB : OC = OD : OA.*

Denn wenn man AC und BD zieht, so haben die Dreyecke OAC und OBD den Winkel O gemeinschaftlich. Aufserdem ist der Winkel B = C (2s B. 18r S.); folglich sind diese Dreyecke ähnlich, und die ähnlich liegenden Seiten geben die Proportion:

OB : OC = OD : OA.

Zusatz. Folglich ist das Rechteck OA $\bowtie$ OB dem Rechtecke OC $\bowtie$ OD gleich.

Anmerkung. Es ist zu bemerken, daſs diese Proportion der vorigen ähnlich ist, und nur darin von ihr abweicht, daſs sich die beiden Sehnen AB und CD auſserhalb statt innerhalb des Kreises schneiden. Auch der folgende Satz kann noch als ein besonderer Fall des gegenwärtigen angesehen werden.

Dreyssigster Satz.

Lehrsatz.

Fig. 132. *Wenn man von einem Puncte O, auſserhalb eines Kreises, eine Tangente OA, und eine Secante OC zieht; so ist die Tangente die mittlere Proportionallinie zwischen der Secante und dem auſserhalb liegenden Theile derselben, so daſs OC : OA = OA : OD, oder, was das Nämliche ist,* $OA^2 = OC \bowtie OD$.

Denn zieht man AD und AC, so haben die Dreyecke OAD und OAC den Winkel O gemeinschaftlich; ferner hat der Winkel OAD zwischen der Tangente und der Sehne zum Maaſse die Hälfte des Bogens AD (2s B. 19r S.). Das nämliche Maaſs hat der Winkel C; folglich ist der Winkel OAD = C. Mithin sind die beiden Dreyecke ähnlich, und man hat die Proportion:

$$OC : OA = OA : OD,$$

welche giebt:

$$OA^2 = OC \bowtie OD.$$

Ein und dreyssigster Satz.

Lehrsatz.

Fig. 133. *Wenn man in einem Dreyecke ABC den Winkel A vermittelst der Linie AD in zwey gleiche Theile theilt, so ist das Rechteck unter den Seiten AB und AC*

gleich dem Rechtecke unter den Segmenten BD und DC, zusammen genommen mit dem Quadrate der Secante AD.

Man lege einen Kreisumfang durch die drey Puncte A, B und C, verlängere AD bis an den Umfang, und ziehe CE.

Das Dreyeck BAD ist dem Dreyecke EAC ähnlich; denn der Voraussetzung nach ist der Winkel $BAD = EAC$, aufserdem aber ist der Winkel $B = E$, weil sie beide die Hälfte des Bogens AC zum Maafse haben; folglich sind diese Dreyecke ähnlich, und ihre ähnlich liegenden Seiten geben die Proportion $BA : AE = AD : AC$. Daraus folgt $BA \bowtie AC = AE \bowtie AD$. Aber $AE = AD \bowtie DE$; folglich erhält man, wenn man auf beiden Seiten mit AD multiplicirt, $AE \bowtie AD = AD^2 + AD \bowtie DE$. Aufserdem ist $AD \bowtie DE = BD \bowtie DC$ (28r S.); folglich ist u. s. w.

Zwey und dreyssigster Satz.

Lehrsatz.

Fig. 134. *In jedem Dreyecke ABC ist das Rechteck unter zwey Seiten AB und AC gleich dem Rechtecke unter dem Durchmesser CE des umschriebenen Kreises und dem Perpendikel AD auf die dritte Seite BC.*

Denn zieht man AE, so sind die Dreyecke ABD und AEC rechtwinklig, das eine in D, das andere in A; ferner ist der Winkel $B = E$; folglich sind diese Dreyecke ähnlich und geben die Proportion $AB : CE = AD : AC$, woraus folgt $AB \bowtie AC = CE \bowtie AD$.

Zusatz. Wenn man diese gleichen Gröfsen mit der nämlichen Gröfse BC multiplicirt, so erhält man $AB \bowtie AC \bowtie BC = CE \bowtie AD \bowtie BC$. Aber $AD \bowtie BC$ ist der doppelte Inhalt des Dreyecks (6r S.). *Also ist das Product der drey Seiten eines Dreyecks gleich seiner Fläche,*

multiplicirt mit dem doppelten Durchmesser des umschriebenen Kreises.

Das Product dreyer Linien nennt man auch *Körper.* Aus welchem Grunde? wird weiter unten folgen. Den Sinn eines solchen Products kann man sich deutlich darstellen, wenn man die Linien auf Zahlen reducirt, und diese Zahlen in einander multiplicirt.

Anmerkung. Es läfst sich auch beweisen, *dafs der Inhalt eines Dreyecks gleich ist seinem Umfange, multiplicirt mit der Hälfte vom Halbmesser des eingeschriebenen Kreises.*

Fig. 87. Denn die Dreyecke AOB, BOC und AOC, deren gemeinschaftlicher Scheitel O ist, haben den Halbmesser des eingeschriebenen Kreises zur gemeinschaftlichen Höhe; die Summe dieser Dreyecke ist also gleich der Summe ihrer Grundlinien AB, BC, AC. multiplicirt mit der Hälfte des Halbmessers OD; folglich ist der Inhalt des Dreyecks ABC, gleich seinem Umfange multiplicirt mit der Hälfte vom Halbmesser des eingeschriebenen Kreises.

Drey und dreyssigster Satz.

Lehrsatz.

Fig. 135. *In jedem Vierecke im Kreise, ABCD, ist das Rechteck unter den Diagonalen AC und BD gleich der Summe der Rechtecke unter den entgegengesetzten Seiten; nämlich:*

$$AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC.$$

Man mache den Bogen CO = AD, und ziehe BO, welche die Diagonale AC in I schneidet.

Der Winkel ABD ist gleich CBI, weil der eine die Hälfte des Bogens AD, der andere die Hälfte des ihm gleichen Bogens CO zum Maafse hat. Der Winkel ADB ist gleich BCI, weil sie in dem nämlichen Kreisabschnitte AOB liegen; folglich sind die Dreyecke ADB und IBC ähnlich, und es findet die Proportion AD : CI = BD : BC

Statt, woraus folgt $AD \bowtie BC = CI \bowtie BD$. Nun behaupte ich, dafs das Dreyeck ABI dem Dreyecke BDC ähnlich ist; denn der Bogen AD ist gleich dem Bogen CO; thut man zu beiden OD hinzu, so folgt, dafs der Bogen $AO = DC$ ist. Mithin ist der Winkel $ABI = DBC$. Ferner ist der Winkel $BAI = BDC$, weil sie in einerley Kreisabschnitt liegen: folglich sind die Dreyecke ABI und DBC ähnlich, und die ähnlich liegenden Seiten geben die Proportion $AB : BD = AI : CD$; woraus folgt $AB \bowtie CD = AI \bowtie BD$. Addirt man diese beiden Resultate und erwägt, dafs $AI \bowtie BD + CI \bowtie BD = (AI + CI) \bowtie BD = AC \bowtie BD$ ist, so erhält man:

$$AD \bowtie BC + AB \bowtie CD = AC \bowtie BD.$$

Anmerkung. Auf eine ähnliche Art läfst sich noch ein andrer Satz vom Vierecke im Kreise beweisen.

Das Dreyeck ABD, welches dem Dreyecke BIC ähnlich ist, giebt nämlich die Proportion $BD : BC = AB : BI$, woraus folgt: $BI \bowtie BD = BC \bowtie AB$. Zieht man CO, so ist das dem Dreyecke ABI ähnliche Dreyeck ICO auch dem Dreyecke BDC ähnlich, und giebt die Proportion $BD : CO = DC : OI$, woraus folgt: $OI \bowtie BD = CO \bowtie DC$, oder weil $CO = AD$ ist, $OI \bowtie BD = AD \bowtie DC$. Addirt man die beiden Resultate und erwägt, dafs sich $BI \bowtie BD + OI \bowtie BD$ auf $BO \bowtie BD$ reduciren läfst, so erhält man:

$$BO \bowtie BD = AB \bowtie BC + AD \bowtie DC.$$

Hätte man $BP = AD$ gemacht, und CKP gesucht, so würde man auf einem gleichen Wege gefunden haben:

$$CP \bowtie CA = AB \bowtie AD + BC \bowtie CD.$$

Aber der Bogen BP ist gleich CO. Thut man zu beiden BC hinzu, so erhält man: Bogen $CBP = BCO$; folglich ist die Sehne CP gleich der Sehne BO, mithin verhalten sich die Rechtecke $BO \bowtie BD$ und $CP \bowtie CA$ wie BD zu CA; folglich ist:

$$BD : CA = AB \times BC + AD \times BC : AD \times AB + BC \times CD$$

das heifst: *die Diagonalen eines Vierecks im Kreise verhalten sich wie die Summen der Rechtecke unter den Seiten, welche auf den Enden der Diagonalen stehen.*

Aus diesen beiden Lehrsätzen kann man die Diagonalen finden, wenn man die Seiten kennt.

Vier und dreyssigster Satz.

Lehrsatz.

Fig. 136. *Es sey P ein gegebener Punct innerhalb eines Kreises vom Halbmesser AC. Der Punct Q werde aufserhalb in der Verlängerung des nämlichen Halbmessers angenommen, so dafs CP : CA = CA : CQ; zieht man aus irgend einem Puncte M des Umfanges nach den beiden Puncten P und Q die graden Linien MP und MQ, so behaupte ich, dafs diese Linien unter einander überall das nämliche Verhältnifs haben, nämlich MP : MQ = AP : AQ.*

Denn nach der Voraussetzung ist CP : CA = CA : CQ; setzt man CM statt CA, so kommt CP : CM = CM : CQ; folglich haben die Dreyecke CPM und CQM einen gleichen Winkel C zwischen proportionalen Seiten; also sind sie ähnlich (3s B. 20r S.); folglich verhält sich die dritte Seite MP zur dritten Seite MQ wie CP zu CM oder CA. Aber die Proportion CP : PA = CA : CQ giebt, dividendo, CP : CA = CA − CP : CQ − CA oder CP : CA = AP : AQ; folglich ist MP : MQ = AP : AQ *).

*) Alle solche Sätze, wie die vom ein und dreyssigsten an, gehören meines Erachtens in einen besondern zweiten Abschnitt der Geometrie, welcher einer Sammlung von verwickelteren Sätzen, als Anwendung der einfachern, gewidmet werden könnte. A. d. Uebers.

Aufgaben
zum dritten Buche.

Erste Aufgabe.

Eine gegebene grade Linie in beliebige Theile zu theilen, die entweder gleich sind oder sich verhalten wie gegebene Linien.

Fig. 137. *Erstlich.* Gesetzt die Linie AB solle in fünf gleiche Theile getheilt werden, so ziehe man durch eines ihrer Enden A eine unbestimmte Linie AG, nehme AC von beliebiger Gröfse, und trage es fünfmal auf AG. Man verbinde den letzten Theilungspunct G mit dem Endpuncte B mittelst der Linie GB. Hernach ziehe man CI mit GB parallel, so behaupte ich, dafs AI der fünfte Theil von AB, und dafs also AB in fünf gleiche Theile getheilt ist, wenn man AI fünfmal auf AB trägt.

Denn weil CI mit GB parallel ist, so werden die Seiten AB und AG proportional in C und I geschnitten (15r S.). AC aber ist der fünfte Theil von AG; folglich ist auch AI der fünfte Theil von AB.

Fig. 138. *Zweitens.* Angenommen, die Linie AB solle so getheilt werden, dafs sich die Theile wie gegebene Linien P, Q, R verhalten, so ziehe man durch den Endpunct A die unbestimmte Linie AG, und mache AC = P, CD = Q, DE = R. Man verbinde die Endpuncte E und B, und ziehe CI und DK durch die Puncte C und D mit EB parallel, so behaupte ich, dafs sich die Theile AI, IK, KB der Linie AB, wie die gegebenen Linien P, Q, R verhalten.

Denn wegen der Parallelen CI, DK, EB, sind die Theile AI, IK, KB in eben dem Verhältnisse wie die Theile AC, CD, DE (15r S.), welche letztern man den gegebenen Linien P, Q, R gleich gemacht hat.

Zweyte Aufgabe.

Zu drey gegebenen Linien A, B, C eine vierte Proportionale zu finden.

Fig. 139. Man ziehe die beiden unbestimmten Linien DE und DF unter einem beliebigen Winkel. Auf DE nehme man DA = A und DB = B, auf DF aber DC = C. Man ziehe AC, und durch B mit AC parallel, BX; so behaupte ich, daſs DX die verlangte vierte Proportionale ist; denn weil BX mit AC parallel ist, so ist DA : DB = DC : DX. Da nun die ersten drey Glieder dieser Proportion den drey gegebenen Linien gleich sind, so ist DX die verlangte vierte Proportionale.

Zusatz. Man kann eben so eine dritte Proportionale zu den beiden Linien A und B finden; denn sie würde die vierte zu den drey Linien A, B und B seyn.

Dritte Aufgabe.

Die mittlere Proportionale zu zwey gegebenen Linien A und B zu finden.

Fig. 140. Auf der unbestimmten Linie DF nehme man DE = A und EF = B. Ueber der ganzen Linie DF beschreibe man den Halbkreis DGF; im Puncte E errichte man EG auf dem Durchmesser senkrecht, so daſs sie den Umfang in G schneidet; so behaupte ich, daſs EG die gesuchte mittlere Proportionale ist.

Denn die von einem beliebigen Puncte des Umfanges auf den Durchmesser gezogene senkrechte Linie GE, ist die mittlere Proportionale zwischen den beiden

Abschnitten des Durchmessers DE und EF (23r S.), welche hier den gegebenen Linien A und B gleich sind.

Vierte Aufgabe.

Fig. 141. *Die gegebene Linie AB so in zwey Theile zu theilen, dafs der gröfsere Theil die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Linie und dem kleinern Theile ist.*

Man ziehe auf der Linie AB, durch ihren Endpunct B, die Linie BC senkrecht, und mache sie der Hälfte von AB gleich. Aus dem Puncte C beschreibe man mit dem Halbmesser CB einen Kreis und ziehe AC, welche den Kreisumfang in D schneidet. Man mache alsdann AF = AD, so behaupte ich, dafs die Linie AB im Puncte F auf die verlangte Weise getheilt wird, das heifst, so, dafs AB : AF = AF : FB.

Denn AB ist eine Tangente, weil sie auf dem Halbmesser, im Endpuncte desselben, senkrecht steht. Verlängert man nun AC, bis sie abermals den Kreisumfang, in E, schneidet, so ist (30r S.) AE : AB = AB : AD; also, dividendo, AE — AB : AB = AB — AD : AD. Aber weil der Halbmesser BC die Hälfte von AB ist, so ist der Durchmesser DE gleich AB, und folglich AE — AB = AD = AF; auch ist wegen AF = AD, AB — AD = FB; folglich AF : AB = FB : AD oder AF; mithin invertendo, AB : AF = AF : FB.

Anmerkung. Diese Theilung der Linie AB heifst *stetig*, oder im *mitteln* und *äufsern* Verhältnisse. Man wird den Nutzen davon weiter unten sehen. Zu bemerken ist, dafs die Secante AE im mitteln und äufsern Verhältnisse in D getheilt ist; denn weil AB = DE, so ist AE : DE = DE : AD.

Fünfte Aufgabe.

Fig. 142. *Durch einen gegebenen Punct A, der innerhalb eines gegebenen Winkels BCD liegt, die Linie BD so zu ziehen, dafs die Theile AB und AD zwischen dem Puncte A und den beiden Schenkeln des Winkels gleich sind.*

Durch den Punct A ziehe man AE mit CD parallel, mache BE = CE, und ziehe BAD durch B und A, so ist diese die verlangte Linie.

Denn weil AE mit CD parallel ist, so ist BE : EC = BA : AD. Aber BE ist gleich EC; folglich ist BA = AD.

Sechste Aufgabe.

Ein Quadrat zu zeichnen, welches so grofs ist als ein gegebenes Parallelogramm, oder als ein gegebenes Dreyeck.

Fig. 143. *Erstlich.* ABCD sey das gegebene Parallelogramm, AB seine Grundlinie, DE seine Höhe. Man suche die mittlere Proportionale XY zwischen AB und DE, so behaupte ich, dafs das Quadrat über XY so grofs ist, als das Parallelogramm ABCD. Denn vermöge der Construction ist AB : XY = XY : DE; folglich ist $XY^2 = AB \bowtie DE$. Aber $AB \bowtie DE$ ist das Maafs des Parallelogramms, und XY^2 dasjenige des Quadrats, folglich sind beide gleich grofs.

Fig. 144. *Zweytens.* ABC sey das gegebene Dreyeck; BC seine Grundlinie, und AD seine Höhe. Man nehme die mittlere Proportionale zwischen BC, und der Hälfte von AD, welche XY seyn mag, so behaupte ich, dafs das Quadrat über XY so grofs ist als das Dreyeck ABC.

Denn weil $BC : XY = XY : \frac{1}{2} AD$, so ist $XY^2 = BC \bowtie \frac{1}{2} AD$; also ist das Quadrat über XY so grofs als das Dreyeck ABC.

Siebente Aufgabe.

Fig. 145. *Ueber der gegebenen Linie AD ein Rechteck ADEX zu beschreiben, welches einem gegebenen Rechtecke ABFC an Gröſse gleich ist.*

Man suche die vierte Proportionale zu den drey Linien AD, AB und AC. Dieselbe mag AX seyn, so behaupte ich, daſs das Rechteck unter AD und AX so groſs ist als das Rechteck ABFC.

Denn weil $AD : AB = AC : AX$ ist, so ist $AD \bowtie AX = AB \bowtie AC$; folglich ist das Rechteck ADEX so groſs als das Rechteck ABFC.

Achte Aufgabe.

Fig. 148. *Das Verhältniſs des Rechtecks unter zwey gegebenen Linien A und B zum Rechtecke unter zwei andern gegebenen Linien C und D in Linien anzugeben.*

X sey eine vierte Proportionale zu den drey Linien B, C und D, so behaupte ich, daſs das Verhältniſs der beiden Linien A und X dasjenige der beiden Rectangel $A \bowtie B$ und $C \bowtie D$ ist.

Denn weil $B : C = D : X$, so ist $C \bowtie D = B \bowtie X$; folglich $A \bowtie B : C \bowtie D = A \bowtie B : B \bowtie X = A : X$.

Zusatz. Um also das Verhältniſs der Quadrate über zwey gegebenen Linien A und C zu finden, suche man eine dritte Proportionale X zu den Linien A und C, so daſs $A : C = C : X$, so erhält man $A^2 : C^2 = A : X$.

Neunte Aufgabe.

Fig. 149. *Das Verhältniſs des Products dreyer Linien A, B, C zum Producte dreyer andern Linien P, Q, R in Linien anzugeben.*

Man suche zu den drey gegebenen Linien P, A und B eine vierte Proportionale X, und zu den drey gege-

benen Linien C, Q und R eine vierte Proportionale Y; so werden sich die beiden Linien X und Y, wie die Producte $A \bowtie B \bowtie C$ und $P \bowtie Q \bowtie R$ verhalten.

Denn weil $P : A = B : X$, so ist $A \bowtie B = P \bowtie X$, und wenn man auf beiden Seiten mit C multiplicirt, $A \bowtie B \bowtie C = C \bowtie P \bowtie X$. Eben so, weil $C : Q = R : Y$ ist, $Q \bowtie R = C \bowtie Y$, und wenn man auf beiden Seiten mit P multiplicirt, $P \bowtie Q \bowtie R = P \bowtie C \bowtie Y$; folglich verhält sich das Product $A \bowtie B \bowtie C$ zum Product $P \bowtie Q \bowtie R$ wie $C \bowtie P \bowtie X$ zu $P \bowtie C \bowtie Y$, oder wie X zu Y.

Zehnte Aufgabe.

Ein Dreyeck zu zeichnen welches so grofs ist als ein gegebenes Vieleck.

Fig. 146. Das gegebene Vieleck sey ABCDE. Man ziehe zuerst die Diagonale CE, welche das Dreyeck CDE abschneidet. Durch den Punct D ziehe man DF mit CE parallel, bis sie die verlängerte AE schneidet. Dann ziehe man CF, so ist das Vieleck ABCDE dem Vielecke ABCF, welches eine Seite weniger hat, an Inhalt gleich.

Denn die Dreyecke CDE und CFE haben die gemeinschaftliche Grundlinie CE, und einerley Höhe, weil ihre Scheitel D und F in einer, mit der Grundlinie, parallelen Linie DF liegen; folglich sind diese Dreyecke gleich grofs. Fügt man zu jedem die Figur ABCE hinzu, so entstehen die Vielecke ABCDE und ABCF, welche also gleich grofs sind.

Man kann weiter auf dieselbe Weise, z. B. den Winkel B abschneiden, indem man an die Stelle des Dreyecks ABC das gleich grofse Dreyeck AGC setzt, so wird das Viereck ABDE in ein gleich grofses Dreyeck GCF verwandelt.

Das Verfahren bleibt immer dasselbe für jede beliebige Figur; denn da jede Operation die Zahl der Seiten um Eins vermindert, so muſs man zuletzt auf ein Dreyeck kommen, welches eben die Gröſse hat wie die gegebene Figur.

Anmerkung. Oben sah man, daſs jedes Dreyeck in ein gleich groſses Quadrat verwandelt werden kann (6r S.); also läſst sich allemal ein Quadrat finden, welches mit einer gegebenen Figur einerley Inhalt hat. Dieses nennt man die Figur *quadriren*, oder ihre *Quadratur* finden.

Die *Quadratur des Kreises* besteht also darin, ein Quadrat zu finden, welches so groſs ist als ein Kreis von gegebenem Durchmesser.

Eilfte Aufgabe.

Ein Quadrat zu zeichnen, welches so groſs ist als die Summe, oder der Unterschied zweyer gegebenen Quadrate.

A und B sollen die Seiten der gegebenen Quadrate seyn.

Fig. 147. *Erstlich.* Soll ein Quadrat gefunden werden, welches so groſs ist als die Summe dieser Quadrate, so ziehe man unter einem rechten Winkel gegen einander die unbestimmten Linien ED und EF, mache ED = A, GE = B und ziehe DG; so ist DG die Seite des verlangten Quadrats.

Denn da das Dreyeck DEG rechtwinklig ist, so ist das Quadrat über DG so groſs als die Summe der Quadrate über ED und EG.

Zweytens. Soll ein Quadrat gefunden werden, welches so groſs ist als der Unterschied der gegebenen Quadrate, so zeichne man eben so den rechten Winkel FEH, mache GE gleich der kleinsten von den beiden Seiten A und B, und beschreibe aus dem Punc-

te G mit einem, der andern Seite gleichen, Halbmesser einen Kreisbogen, welcher EH in H schneidet, so behaupte ich, dafs das Quadrat über EH dem Unterschiede der Quadrate über A und B gleich ist.

Denn das Dreyeck GEH ist rechtwinklig, die Hypothenuse GH ist gleich A, und die Seite GE = B, also ist das Quadrat über EH u. s. w.

Anmerkung. So kann man ein Quadrat finden, welches so grofs ist, als die Summe einer beliebigen Zahl anderer Quadrate; denn dieselbe Zeichnung, durch welche man zwey Quadrate in eines zusammen zieht, bringt drey auf zwey, und diese zwey auf eins u. s. w. Das Verfahren ist das nämliche, wenn einige der Quadrate abgezogen werden sollten.

Zwölfte Aufgabe.

Fig. 150. *Ein Quadrat zu zeichnen, welches sich zu einem gegebenen Quadrat ABCD verhält, wie die Linie M zur Linie N.*

Auf der unbestimmten Linie EG nehme man EF = M, und FG = N. Ueber EG beschreibe man einen Halbkreis, und in F errichte man auf dem Durchmesser die senkrechte Linie FH. Aus dem Puncte H ziehe man die Sehnen HG und HE, welche unbestimmt verlängert werden. Auf der ersten nehme man HK, gleich der Seite AB des gegebenen Quadrats, und durch den Punct K ziehe man KI mit EG parallel, so behaupte ich, dafs HI die Seite des gesuchten Quadrats ist.

Denn wegen der Parallelen KI und GE ist HI : HK = HE : HG, also $HI^2 : HK^2 = HE^2 : HG^2$; aber in dem rechtwinkligen Dreyecke EHG verhält sich das Quadrat von HE zum Quadrate von HG, wie der Abschnitt EF zum Abschnitte FG (23r S.), oder wie M

zu N; also ist $HI^2 : HK^2 = M : N$. Aber HK = AB, also verhält sich das Quadrat über HI, zum Quadrate über AB, wie M zu N.

Dreyzehnte Aufgabe.

Fig. 129. *Wenn FG und AB ähnlich liegende Seiten sind, über der ersten ein Vieleck zu beschreiben, welches dem Vielecke ABCDE ähnlich ist.*

Man ziehe in dem gegebenen Vielecke die Diagonalen AC und AD. Im Puncte F mache man den Winkel GFH = BAC, und im Puncte G den Winkel FGH = ABC; die Linien FH und GH mögen sich in H schneiden, so werden die Dreyecke FGH und ABC ähnlich seyn. Eben so zeichne man, wenn FH und AC ähnlich liegende Seiten sind, über ersterer das, dem Dreyecke ADG ähnliche Dreyeck FIH, und über der gegen AD ähnlich liegenden Seite FI, das dem Dreyeck ADE ähnliche Dreyeck FIK, so ist das Vieleck FGHIK dem Vielecke ABCDE ähnlich.

Denn diese beiden Vielecke sind aus gleich viel ähnlichen und ähnlich liegenden Dreyecken zusammen gesetzt (26r S.).

Vierzehnte Aufgabe.

Wenn zwey ähnliche Figuren gegeben sind, eine dritte ähnliche Figur zu zeichnen, welche so groſs ist als die Summe oder der Unterschied der beiden ersten.

A und B sollen zwey ähnlich liegende Seiten der gegebenen Figuren bedeuten. Man suche ein Quadrat, welches der Summe oder dem Unterschiede der Quadrate über A und B gleich ist. X sey die Seite dieses Quadrats, so ist X in der gesuchten Figur, die, mit A und B in den gegebenen Figuren, ähnlich liegende

Seite. Die Figur selbst kann man nach der vorhergehenden Aufgabe zeichnen.

Denn die ähnlichen Figuren verhalten sich wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten. Aber das Quadrat über der Seite X ist gleich der Summe oder dem Unterschiede der Quadrate über den ähnlich liegenden Seiten A und B; folglich ist die Figur über der Seite X gleich der Summe oder dem Unterschiede der ähnlichen Figuren über den Seiten A und B.

Funfzehnte Aufgabe.

Eine Figur zu zeichnen die einer gegebenen ähnlich ist und sich zu ihr verhält wie M zu N.

A bedeute eine Seite der gegebenen Figur, X eine ähnlich liegende Seite der gesuchten, so mufs sich das Quadrat von X zum Quadrat von A verhalten, wie M zu N (27r S.). Man darf also nur X nach der 12ten Aufgabe suchen, so kann man das Uebrige wie in der 13ten Aufgabe finden.

Sechzehnte Aufgabe.

Fig. 151. *Eine Figur zu zeichnen, die der Figur P ähnlich und so grofs ist, als die Figur Q.*

Man suche die Seite M eines Quadrats, welches der Figur P an Gröfse gleich kommt, und die Seite N eines Quadrats, welches so grofs ist als die Figur Q. Dann sey X eine vierte Proportionale zu den drey gegebenen Linien M, N und AB. Auf dieser, mit AB ähnlich liegenden Seite X, beschreibe man eine Figur die der Figur P ähnlich ist; so behaupte ich, dafs diese zugleich eben so grofs seyn wird als Q.

Denn wenn die Figur über der Seite X, Y heifst, so ist $P : Y = AB^2 : X^2$. Aber nach der Construction ist $AB : X = M : N$, oder $AB^2 : X^2 = M^2 : N^2$; also ist

$P : Y = M^2 : N^2$. Nun ist auch nach der Construction, $M^2 = P$ und $N^2 = Q$; also ist $P : Y = P : Q$; folglich $Y = Q$; mithin ist die Figur Y der Figur P ähnlich, und zugleich eben so groſs als Q.

Siebzehnte Aufgabe.

Fig. 152. *Ein Rechteck zu zeichnen welches einem gegebenen Quadrate C an Groſse gleich ist, und dessen anliegende Seiten zusammen einer gegebenen Linie AB gleich sind.*

Auf AB beschreibe man einen Halbkreis, und ziehe in der Entfernung DA, welche der Seite des gegebenen Quadrats C gleich ist, eine Linie DE mit dem Durchmesser parallel. Vom Puncte E, in welchem die Parallele den Umfang schneidet, ziehe man auf den Durchmesser die Linie EF senkrecht, so behaupte ich, daſs AF und FB die Seiten des gesuchten Rechtecks sind.

Denn ihre Summe ist gleich AB, und das Rechteck über AF und FB, nämlich AF ⋈ FB, ist gleich dem Quadrate über EF (231 S.), oder dem Quadrate über AD, folglich ist dieses Rechteck gleich dem gegebenen Quadrate C.

Anmerkung. Damit die Aufgabe möglich sey, muſs die Entfernung AD nicht gröſser seyn als der Halbmesser; das heiſst: die Seite des Quadrats C darf nicht gröſser seyn als die Hälfte der Linie AB.

Achtzehnte Aufgabe.

Fig. 153. *Ein Rechteck zu zeichnen, welches einem gegebenen Quadrate an Inhalt gleich ist, und dessen Seiten um AB von einander verschieden sind.*

Ueber AB beschreibe man einen Halbkreis. An dem Endpuncte des Durchmessers ziehe man die Tangente AD, der Seite des Quadrats C gleich. Durch den

Punct D und den Mittelpunct O ziehe man die Secante DE, so behaupte ich, daſs DE und DF die anliegenden Seiten des verlangten Rechtecks sind.

Denn erstlich ist der Unterschied dieser Seiten dem Durchmesser EF oder AB gleich, zweytens ist das Rechteck DE ⋈ DF dem Quadrate AD^2 gleich (30r S.); folglich ist dieses Rechteck dem gegebenen Quadrate C gleich.

Neunzehnte Aufgabe.

Das gemeinschaftliche Maaſs der Diagonale und der Seite eines Quadrats zu finden, wenn es ein solches giebt.

Fig. 154. ABCG sey ein beliebiges Quadrat, AC seine Diagonale.

Man trage zuerst CB auf CA, so oft es angeht, (2s B. 17te Aufg.), und beschreibe deshalb mit dem Halbmesser CB aus C den Halbkreis DBE. Wie man sieht, ist CB in AC einmal enthalten, nebst einem Reste AD. Das Resultat der ersten Operation ist also der Quotient 1, mit dem Reste AD, welchen man mit BC, oder der gleichen Linie AB vergleichen muſs.

Man könnte nun AF = AD machen, und also wirklich AF auf AC tragen; man würde finden, daſs es darin zweymal enthalten sey, nebst einem Reste; aber weil dieser Rest und die folgenden immer kleiner werden, und ihrer geringen Gröſse wegen bald für das Auge verschwinden würden, so würde ein solches Verfahren nur ein sehr unvollkommenes mechanisches Mittel seyn, nach welchem nicht entschieden werden kann, ob die Linien AC und CB ein gemeinschaftliches Maaſs haben oder nicht. Durch folgendes sehr einfache Verfahren kann man die abnehmenden Linien vermindern, und immerfort nur auf Linien operiren welche dieselbe Gröſse haben.

Denn weil der Winkel ABC ein rechter ist, so ist AB eine Tangente und AE eine Secante aus einem und demselben Puncte, so daſs $AD : AB = AB : AE$; folglich kann man bey der folgenden Operation, durch welche AD mit AB verglichen werden soll, statt des Verhältnisses $AD : AB$, dasjenige $AB : AE$ setzen. Aber AB, oder die ihr gleiche CD, ist zweymal in AE enthalten, nebst einem Reste AD. Also ist das Resultat der zweyten Operation der Quotient 2 mit dem Reste AD, welcher nun wieder mit AB verglichen werden soll.

Die dritte Operation, durch welche AD mit AB verglichen werden soll, reducirt sich wieder auf die Vergleichung von AB, oder der ihr gleichen CD mit AE. Man erhält folglich 2 zum Quotienten und AD zum Reste u. s. w. Hieraus folgt, daſs die Operation kein Ende hat, und daſs es folglich kein gemeinschaftliches Maaſs für die Diagonale und Seite eines Quadrats giebt, wie auch die Arithmetik lehrt (weil sich die beiden Linien wie $\sqrt{2} : 1$ verhalten). Durch die geometrische Auflösung wird dieser Umstand noch deutlicher.

Anmerkung. Es ist also nicht möglich, in Zahlen das genaue Verhältniſs der Diagonale eines Quadrats zu seiner Seite anzugeben; aber man kann sich demselben nähern, so weit man will, und zwar mittelst eines, das gesuchte Verhältniſs ausdrückenden Kettenbruchs. Die erste Operation gab 1 zum Quotienten, die zweyte und alle übrigen ohne Ende gaben 2. Also ist dieser Kettenbruch

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + 1 \text{ u. s. w.}}}}}$$

bis ins Unendliche.

Berechnet man den Bruch z. B. bis zum vierten Gliede, dieses einschliefslich, so findet man $1\frac{12}{29}$ oder $\frac{41}{29}$. Also ist das Verhältnifs der Diagonale zur Seite eines Quadrats näherungsweise 41 zu 29. Man kann das Verhältnifs genauer finden, wenn man eine gröfsere Zahl von Gliedern berechnet *).

*) Wegen dieser Aufgaben würde ich meine obige Bemerkung zu den Aufgaben des ersten und zweyten Buchs wiederholen. Die neunzehnte Aufgabe hier insbesondere ist eigentlich ein Lehrsatz.

A. d. Uebers.

Viertes Buch.

Von den regelmäſsigen Vielecken und der Ausmeſsung des Kreises.

Erklärung.

Ein Vieleck, dessen Seiten und Winkel unter sich gleich sind, heiſst *regelmäſsig*.

Es giebt regelmäſsige Vielecke von jeder Seitenzahl *). Das gleichseitige Dreyeck ist regelmäſsiges Vieleck von drey Seiten; das Quadrat, ein regelmäſsiges Vieleck von vier Seiten.

Erster Satz.

Lehrsatz.

Regelmäſsige Vielecke mit gleich vielen Seiten sind ähnliche Figuren.

Fig. 155. Zum Beyspiel, die beiden regelmäſsigen Sechsecke seyen ABCDEF und abcdef. Die Summe der Winkel ist in diesen beiden Figuren gleich groſs, nämlich gleich acht Rechten (1s B. 28r S.). Der Winkel A ist also der sechste Theil dieser Summe. Eben so groſs ist der Winkel a, also sind die beiden Winkel A und a gleich groſs; folglich sind auch die Winkel B und b, C und c gleich groſs.

Weil ferner, nach der Eigenschaft regelmäſsiger Vielecke, die Seiten AB, BC, CD u. s. w., einander gleich sind, eben wie die Seiten ab, bc, cd u. s. w.

*) Jedoch nicht von weniger als drey Seiten.
A. d. Uebers.

so ist AB : ab = BC : bc = CD : cd u. s. w.; folglich sind die Winkel in den beiden Figuren einzeln gleich, und die ähnlich liegenden Seiten proportional. Also sind die Figuren ähnlich (3s B. 2te Erkl.).

Zusatz. Die Umfänge regelmäſsiger Vielecke von gleich viel Seiten verhalten sich wie ihre ähnlich liegenden Seiten und ihre Flächen, wie die Quadrate der Seiten (3s B. 27r S.).

Anmerkung. Der Winkel eines regelmäſsigen Vielecks hängt von der Zahl der Seiten ab, wie bey allen gleichwinkligen Figuren (1s B. 28r S.).

Zweyter Satz.

Lehrsatz.

Jedes regelmäſsige Vieleck kann in und um einen Kreis beschrieben werden.

Fig. 156. ABCDE etc. sey das Vieleck. Gesetzt es ginge ein Kreisumfang durch die drey Puncte A, B und C, und sein Mittelpunct wäre O, so ziehe man OP aus O auf die Mitte der Seite BC senkrecht, desgleichen AO und OB.

Die Vierecke OPCD und OPBA decken sich; denn sie haben die Seite OP gemein, und die Winkel OPC und OPB sind gleich, weil sie rechte sind; folglich fällt die Seite PC auf die ihr gleiche PB, und der Punct C in B. Ferner ist, vermöge der Eigenschaft des Vielecks, der Winkel PCD = PBA; folglich erhält CD die Richtung BA, und weil CD = BA, so fällt der Punct D in A; mithin fallen die beiden Vierecke ganz in einander. Der Abstand OD ist gleich AO; folglich wird der Kreisumfang, welcher durch die drey Puncte A, B, C geht, auch durch den Punct D gehen. Eben so läſst sich beweisen, daſs der Kreisumfang, welcher durch die drey Puncte B, C, D geht

auch den folgenden E trifft u. s. w.; folglich geht der Kreisumfang, in welchem die Puncte A, B, C liegen, durch alle Winkelscheitel des Vielecks, und folglich liegt das Vieleck im Kreise.

Zweytens sind alle Seiten AB, BC, CD u. s. w. gleiche Sehnen des Kreises; also sind sie gleich weit vom Mittelpuncte entfernt (2s B. 8r S.). Beschreibt man daher aus O mit dem Halbmesser OP einen Kreis, so wird derselbe die Seite BC und alle übrigen Seiten des Vielecks, jede in ihrer Mitte, berühren; folglich ist dieser Kreis in das Vieleck eingeschrieben, oder das Vieleck liegt *um* den Kreis.

Erste Anmerkung. Der gemeinschaftliche Mittelpunct O, des in und umschriebenen Kreises, kann auch als der Mittelpunct des Vielecks angesehen werden. Deshalb nennt man einen Winkel wie AOB, der zwischen zwey Halbmessern nach den Enden einer Seite AB liegt, *Winkel am Mittelpunct.*

Weil alle Sehnen AB, BC u. s. w. gleich lang sind, so sind alle Winkel am Mittelpuncte gleich grofs, und man findet den Werth des Winkels am Mittelpuncte, wenn man in vier rechte Winkel mit der Zahl der Seiten des Vielecks dividirt.

Zweyte Anmerkung. Um ein regelmäfsiges Vieleck von einer gewissen Zahl von Seiten in einen gegebenen Kreis zu beschreiben, darf man nur den Kreisumfang in so viel gleiche Theile theilen als das Vieleck Seiten haben soll; denn wenn die Bogen gleich Fig. 158. sind, so sind es auch ihre Sehnen AB, BC, CD u. s. w.; also sind auch die Dreyecke ABO, BOC, COD u. s. w. gleich, weil sie gleiche Seiten haben; folglich sind alle Winkel ABC, BCD, CDE u. s. w. einander gleich; mithin ist die Figur ABCDE u. s. w. ein regelmäfsiges Vieleck.

Dritter Satz.

Aufgabe.

Ein Quadrat in einen gegebenen Kreis zu beschreiben.

Fig. 157. Man ziehe zwey Durchmesser AC und BD, welche sich unter rechten Winkeln schneiden. Ihre Endpuncte A, B, C, D vereinige man mittelst grader Linien, so ist die Figur ABCD das eingeschriebene Quadrat: denn weil die Winkel AOB, BOC u. s. w. gleich sind, so sind auch die Sehnen AB, BC u. s. w. gleich.

Anmerkung. Da das Dreyeck BOC rechtwinklig und gleichschenklig ist, so ist (3s B. 11r S.) $BC : BO = \sqrt{2} : 1$; folglich verhält sich die Seite des eingeschriebenen Quadrats zum Halbmesser wie die Quadratwurzel aus 2 zur Einheit.

Vierter Satz.

Aufgabe.

Ein regelmäſsiges Sechseck und ein gleichseitiges Dreyeck in einen gegebenen Kreis zu beschreiben.

Fig. 158. Man stelle sich die Aufgabe aufgelöset vor. AB sey eine Seite des eingeschriebenen Sechsecks, so behaupte ich, daſs das Dreyeck AOB, wenn man die Halbmesser AO und OB zieht, gleichseitig ist.

Denn der Winkel AOB ist der sechste Theil von vier rechten; nimmt man also den rechten Winkel zur Einheit an, so ist $AOB = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$: die beiden andern Winkel ABO und BAO des Dreyecks AOB betragen zusammen $2 - \frac{2}{3}$ oder $\frac{4}{3}$, also, weil sie einander gleich sind, beträgt jeder $\frac{2}{3}$; also ist das Dreyeck ABO gleichseitig; mithin ist die Seite des eingeschriebenen regelmäſsigen Sechsecks dem Halbmesser gleich. Daraus folgt, daſs man, um ein regelmäſsiges Sechseck in einen gegebenen Kreis zu beschreiben, nur den Halbmesser

desselben sechsmal in den Umfang herumtragen darf, wobey man genau wieder den Punct trifft, von welchem man ausging.

Ist das Sechseck ABCDEF in den Kreis eingeschrieben, so findet man das eingeschriebene gleichseitige Dreyeck ACE, wenn man die Winkelscheitel des Sechsecks einen um den andern durch grade Linien verbindet.

Anmerkung. Die Figur ABCO ist ein Parallelogramm, und zwar ein gleichseitiges, weil AB = BC = CO = AO; folglich ist die Summe der Quadrate der Diagonalen $AC^2 + BO^2$ gleich der Summe der Quadrate der Seiten (3s B. 14r S.). Die letztre ist $4 AB^2$, oder $4 BO^2$. Zieht man auf beiden Seiten BO^2 ab, so bleibt $AC^2 = 3 BO^2$; also ist $AC^2 : BO^2 = 3 : 1$, oder $AC : BO = \sqrt{3} : 1$; folglich verhält sich die Seite des eingeschriebenen gleichseitigen Dreyecks zum Halbmesser wie die Quadratwurzel aus 3 zur Einheit.

Fünfter Satz.

Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis ein regelmäſsiges Zehneck, desgleichen ein Fünf- und ein Funfzehneck zu beschreiben.

Fig. 159. Man theile den Halbmesser AO im Puncte M im mittlern und äuſsern Verhältnisse (3s B. 4te Aufg.), und mache die Sehne AB gleich dem gröſsern Abschnitte OM, so ist AB die Seite des regelmäſsigen Zehnecks, welche man also zehnmal in den Umfang herumtragen muſs.

Denn, zieht man MB, so ist, der Construction zufolge AO : OM = OM : AM, oder weil AB = OM, ist AO : AB = AB : AM; folglich liegt in den Dreyecken ABO und AMB der gemeinschaftliche Winkel, A zwischen proportionalen Seiten; also sind die Dreyecke

ähnlich (3s B. 20r S.). Das Dreyeck AOB ist aber gleichschenklig; folglich ist es das Dreyeck AMB auch, und folglich AB = BM. Nun ist AB = OM; also ist auch MB = OM; folglich ist das Dreyeck BMO gleichschenklig.

Der äufsere Winkel AMB an dem gleichschenkligen Dreyecke BMO ist aber doppelt so grofs als der innere O (1s B. 27r S.); folglich ist in dem Dreyecke OAB jeder der Winkel OAB und OBA an der Grundlinie doppelt so grofs als der Winkel im Scheitel O; mithin betragen die drey Winkel dieses Dreyecks fünfmal so viel als der Winkel O; also ist der Winkel O der fünfte Theil von zwey rechten, oder der zehnte von vier rechten; folglich ist der Bogen AB der zehnte Theil des Umfanges, und die Sehne AB ist die Seite des regelmäfsigen Zehnecks.

Erster Zusatz. Verbindet man die Scheitel des regelmäfsigen Zehnecks, einen um den andern, durch grade Linien, so entsteht das regelmäfsige Fünfeck ACEGI.

Zweyter Zusatz. Wenn AB die Seite des Zehnecks und AL die Seite des Sechsecks ist, so ist der Bogen BL $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ des Umfanges. Also ist die Sehne BL die Seite des Funfzehnecks oder des regelmäfsigen Vielecks von 15 Seiten. Auch sieht man, dafs der Bogen CL ein Drittheil von CB ist.

Anmerkung. Wenn man die zu den Seiten eines eingeschriebenen regelmäfsigen Vielecks gehörigen Bogen halbirt, und die zu den halben Bogen gehörigen Sehnen zieht, so bilden solche ein neues regelmäfsiges Vieleck von der doppelten Seitenzahl. Also kann man aus dem Quadrate nach der Reihe die regelmäfsigen Vielecke von 8, 16, 32 u. s. w. Seiten beschreiben, aus dem Sechsecke die regelmäfsigen Vielecke von 12, 24, 48 u. s. w.

Seiten, aus dem Zehnecke die Vielecke von 20, 40, 80 u. s. w. Seiten, aus dem Funfzehnecke die Vielecke von 30, 60, 120 u. s. w. Seiten *).

Sechster Satz.

Aufgabe.

Fig. 160. *Wenn ein eingeschriebenes regelmäfsiges Vieleck gegeben ist, um den nämlichen Kreis ein ähnliches Vieleck zu beschreiben.*

In der Mitte T des Bogens AB ziehe man die Tangente GH, welche mit AB parallel ist (2s B. 10r S.). Eben so ziehe man Tangenten in der Mitte der andern Bogen BC, CD etc. Diese Tangenten werden mit ihren Durchschnittspuncten das regelmäfsige umschriebene Vieleck GHIK bilden, welches dem eingeschriebenen Vielecke ähnlich ist.

Man sieht leicht, dafs erstlich die drey Puncte O, B und H in grader Linie liegen; denn die rechtwinkligen Dreyecke OTH und OHN haben die Hypothenuse OH gemein, und die Seite OT ist gleich ON; folglich sind die Dreyecke gleich (1s B. 18r S.), und der Winkel TOH ist gleich HON; mithin geht die Linie OH durch den Punct B, der in der Mitte des Bogens TN liegt. Aus eben dem Grunde liegt I in der Verlänge-

*) Man hat lange Zeit geglaubt, dafs diese Vielecke die einzigen wären, welche sich durch die Elementar-Geometrie in den Kreis beschreiben liefsen, oder welche, was dafselbe ist, durch Auflösung der Gleichungen vom ersten und zweyten Grade gefunden werden können. In einem Werke, „disquisitiones arithmeticae, Lipsiae 1801“ betitelt, hat Herr Gaufs bewiesen, dafs man mit eben den Mitteln regelmäfsige Vielecke von 17 Seiten, und überhaupt von 2n + 1 Seiten in den Kreis beschreiben kann, wenn 2n + 1 eine Primzahl ist. Anm. des Verf.

rung von OC u. s. w. Aber weil GH mit AB und HI mit BC parallel ist, so ist der Winkel GHI = ABC (1s B. 26r S.), und eben so HIK = BCD u. s. w.; folglich sind die Winkel des umschriebenen Vielecks gleich den Winkeln des eingeschriebenen. Ferner ist, wegen der nämlichen Parallelen, GH : AB = OH : OB, und HI : BC = OH : OB; also GH : AB = HI : BC. Aber AB = BC, also GH = HI. Aus eben dem Grunde ist HI = IK u. s. w. Also sind die Seiten des umschriebenen Vielecks unter einander gleich; folglich ist dieses Vieleck ein regelmäſsiges und dem eingeschriebenen ähnlich.

Erster Zusatz. Wenn umgekehrt das umschriebene Vieleck GHIK gegeben wäre, und es sollte das eingeschriebene ABC etc. gefunden werden, so sieht man leicht, daſs man nur nach den Ecken G, H, I u. s. w., des gegebenen Vielecks die Linien OG, OH u. s. w. ziehen darf, welche den Umfang in den Puncten A, B, C u. s. w. schneiden. Verbindet man diese Puncte mit den Sehnen AB, BC u. s. w., so entsteht das eingeschriebene Vieleck. Man könnte auch ganz einfach die Berührungspuncte T, N, P mittelst der Sehnen TN, NP u. s. w. verbinden, welches ebenfalls ein unumschriebenes ähnliches eingeschriebenes Vieleck geben würde.

Zweyter Zusatz. Es lassen sich also *um* einen Kreis alle regelmäſsigen Vielecke beschreiben, die in ihr beschrieben werden können, und umgekehrt.

Siebenter Satz.

Lehrsatz.

Der Inhalt eines regelmäſsigen Vielecks ist gleich dem Producte seines Umfanges in die Hälfte vom Halbmesser des eingeschriebenen Kreises.

Fig. 160. Es sey z. B. das regelmäſsige Vieleck GHIK etc. gegeben. Das Dreyeck GOH hat zum Maaſse GH $\times \frac{1}{2}$ OT; das Dreyeck OHI hat zum Maaſse HI $\times \frac{1}{2}$ ON. Nun ist ON = OT, also haben die beiden Dreyecke zusammen zum Maaſse (GH + HI) $\times \frac{1}{2}$ OT. Fährt man so mit den andern Dreyecken fort, so sieht man, daſs die Summe aller Dreyecke, oder das ganze Vieleck, das Product der Summe der Grundlinien GH, HI, IK u. s. w., oder des Umfanges des Vielecks in die Hälfte vom Halbmesser OT des eingeschriebenen Kreises zum Maaſse hat.

Anmerkung. Der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises OT ist nichts anders als das Perpendikel aus dem Mittelpuncte auf eine beliebige Seite des Vielecks. Man nennt dieses Perpendikel auch *Apothēma.*

Achter Satz.

Lehrsatz.

Die Umfänge regelmäſsiger Vielecke von gleicher Seitenzahl, verhalten sich wie die Halbmesser der umschriebenen Kreise, desgleichen wie die Halbmesser der eingeschriebenen Kreise; die Flächen der Vielecke aber wie die Quadrate dieser Halbmesser.

Fig. 161. AB sey eine Seite eines solchen Vielecks, O sein Mittelpunct, und folglich OA der Halbmesser des umschriebenen Kreises; das Perpendikel OD auf AB ist der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises; ab soll die Seite eines andern ähnlichen Vielecks, o sein Mittelpunct, oa und od sollen die Halbmesser des umschriebenen und des eingeschriebenen Kreises seyn. Die Umfänge der beiden Vielecke verhalten sich wie die Seiten AB und ab; aber die Winkel A und a sind gleich, weil jeder die Hälfte von dem Winkel des Vielecks ist. Eben so die Winkel B und b; folglich sind

die Dreyecke ABO und abo ähnlich, desgleichen die Dreyecke ADO, ado. Also ist AB : ab = AO : ao = DO : do; folglich verhalten sich die Umfänge der Vielecke wie die Halbmesser AO und ao der umschriebenen Kreise; desgleichen wie die Halbmesser DO und do der eingeschriebenen Kreise.

Der Inhalt der Vielecke verhält sich wie die Quadrate der ähnlich liegenden Seiten AB und ab; folglich auch wie die Quadrate der Halbmesser der umschriebenen Kreise AO und ao, desgleichen wie die Quadrate der Halbmesser der eingeschriebenen Kreise OD und od.

Neunter Satz.

Lehrsatz.

Jede krumme oder gebrochene Linie, welche von einem Ende bis zum andern eine ausgebogene (convexe) Linie AMB umschliefst, ist länger als die umschlossene Linie AMB.

Fig. 162. Wir verstehen unter ausgebogene Linie eine solche krumme oder gebrochene, oder theils krumme, theils gebrochene Linie, welche von einer graden in nicht mehr als zwey Puncten geschnitten werden kann. Hätte die Linie AMB eingebogene Stellen, so wäre sie nicht mehr convex, weil sie dann, wie man leicht sieht, von einer graden in mehr als zwey Puncten geschnitten werden könnte. Kreisbogen sind vollständig convex, aber der Satz erstreckt sich über jede beliebige Linie, welche die Bedingung erfüllt.

Gesetzt nun, die Linie AMB wäre nicht kürzer als alle welche sie umgeben, so mufs es unter den letztern nothwendig eine geben, die kürzer ist als die übrigen, und zugleich kürzer als AMB, oder wenigstens AMB gleich. ACDEB sey diese kürzeste umschliefsende Linie, so ziehe man zwischen den beiden Linien, an einer beliebigen Stelle, eine grade Linie PQ, welche AMB

nicht schneidet, oder sie wenigstens nur berührt, so ist die grade PQ kürzer als PCDEQ; setzt man also PQ an die Stelle von PCDEQ, so erhält man die umgebende APQB, welche kürzer ist, als APDQB. Nach der Voraussetzung aber ist diese schon die kürzeste von allen; also ist die Voraussetzung nicht möglich, mithin sind alle umschliessende Linien länger als AMB *).

Fig. 163. *Anmerkung.* Eben so läfst sich beweisen, dafs eine convexe in sich selbst gebogene Linie AMB kürzer ist als jede andere, von welcher sie an allen Seiten umschlossen wird, die umgebende Linie FHG mag AMB in einem oder in mehreren Puncten berühren, oder sie umgeben, ohne sie zu berühren.

Zehnter Satz.

Lehnsatz.

Wenn zwey concentrische Kreise gegeben sind, so kann man allezeit in den Umfang des gröfsern ein regelmäfsiges Vieleck beschreiben, dessen Seiten den Umfang des kleinern nicht erreichen, desgleichen um den Umfang des kleinern ein regelmäfsiges Vieleck, dessen Seiten den Umfang des gröfsern nicht erreichen, so dafs in beiden Fällen die Seiten des Vielecks ganz zwischen beiden Kreisumfängen liegen.

Fig. 164. Die Halbmesser der beiden Kreisumfänge sollen CA und CB seyn. Im Puncte A ziehe man

*) Dieser neunte Satz ist auch für die Lehre von den krummen Linien richtig. Er kommt z. B. bey einer *begründeten* Ausmessung der Länge krummer Linien zur Anwendung. Man sehe deshalb meine kleine Abhandlung über die Anwendung der Rechnung mit veränderlichen Gröfsen auf Geometrie und Mechanik, Berlin bey Maurer 1816. S. 51 und die folgenden. Legendre's scharfsinniger Beweis des Satzes ist sehr merkwürdig.

A. d. Uebers.

die Tangente DE, welche den gröfsern Kreisumfang in D und E schneidet. Man beschreibe in den gröfsern Kreisumfang eines von den Vielecken, welche sich nach den vorhergehenden Aufgaben beschreiben lassen. Darauf halbire man die den Seiten entsprechenden Bogen, und ziehe die Sehnen der halben Bogen, so entsteht ein regelmäfsiges Vieleck von der doppelten Seitenzahl. Man fahre mit der Halbirung der Bogen fort, bis man zu Bogen kommt, die kleiner sind als DBE. Ein solcher Bogen sey MBN (dessen Mitte B ist), so wird die Seite MN offenbar weiter vom Mittelpuncte entfernt seyn als DE, und folglich das regelmäfsige Vieleck, dessen Seite MN ist, den Kreisumfang vom Halbmesser CA nicht erreichen.

Nun ziehe man CM und CN, welche die Tangente DE in P und Q schneiden, so wird PQ die Seite eines um den kleinern Kreisumfang beschriebenen Vielecks seyn, welches dem in dem gröfsern Umfange beschriebenen Vielecke mit der Seite MN, ähnlich ist. Das umschriebene Vieleck mit der Seite PQ erreicht aber den gröfsern Kreisumfang nicht, weil CP kleiner ist als CM. Also kann man allemal ein regelmäfsiges Vieleck in den gröfsern Kreisumfang und ein ähnliches um den kleinern beschreiben, welche beide mit ihren Seiten ganz zwischen den beiden Kreisumfängen liegen.

Anmerkung. Auch zwischen zwey concentrischen Ausschnitten FCG und ICH, kann man in dem gröfsern einen Theil eines regelmäfsigen Vielecks, und um den kleinern einen Theil eines ähnlichen Vielecks beschreiben, so dafs die Umfänge dieser beiden Vielecke ganz zwischen den beiden Kreisumfängen liegen. Man darf nämlich nur den Bogen FBG immer fort halbiren, bis man auf einen Theil kommt der kleiner ist als DBE.

Wir nennen einen Theil eines regelmäſsigen Vielecks, die Figur, welche von einer Reihe gleicher Sehnen begrenzt wird, die in dem Bogen FG von einem Ende desselben bis zum andern umschrieben sind. Dieser Theil hat alle Eigenschaften regelmäſsiger Vielecke. Seine Winkel und Seiten sind gleich; er kann in und um den Kreis beschrieben werden. Er ist aber nur in sofern ein Stück eines eigentlichen regelmäſsigen Vielecks, als der zu einem seiner Seiten gehörige Bogen einen aufgehenden Theil des Kreisumfanges ausmacht.

Eilfter Satz.

Lehrsatz.

Kreisumfänge verhalten sich wie ihre Halbmesser, Kreisflächen aber, wie die Quadrate der Halbmesser.

Fig. 165. Wenn man der Kürze wegen, z. B. den Kreisumfang, welcher CA zum Halbmesser hat, durch Umf. CA bezeichnete, so behaupte ich, daſs

$$\text{Umf. } CA : \text{Umf. } OB = CA : OB.$$

Denn wäre es nicht so, so wird sich CA zu OB verhalten wie Umf. CA zu irgend einem vierten Gliede, welches gröſser oder kleiner ist als Umf. OB. Man setze: kleiner, nämlich, wenn es möglich: CA : OB = Umf. CA : Umf. OD.

Man beschreibe in den Kreisumfang, dessen Halbmesser OB ist, ein regelmäſsiges Vieleck EFGKLE, dessen Seiten den Umfang vom Halbmesser OD nicht erreichen (10r S.); ein ähnliches Vieleck MNPSTM beschreibe man in den Umfang, dessen Halbmesser CA ist.

Da nun diese Vielecke ähnlich sind, so verhalten sich ihre Umfänge MNPSM und EFGKE, wie die Halbmesser CA und OB der umschriebenen Kreise (8r S.), so daſs MNPSM : EFGKE = CA : OB. Aber nach der

Voraussetzung war CA : OB = Umf. CA : Umf. OD, also wäre MNPSM : EFGKE = Umf. CA : Umf. OD. Diese Proportion ist unmöglich, weil der Umfang MNPSM kleiner ist als Umf. CA (9r S.), hingegen EFGKE gröfser als Umf. OD. Also ist es unmöglich, dafs sich CA zu OB verhält wie der Umf. CA zu einem Umfange der kleiner ist als der Umf. OB, oder allgemeiner: es ist unmöglich, dafs sich ein Kreishalbmesser zum andern verhalte, wie der mit dem ersten beschriebene Umfang, zu einem kleinern Umfange als dem mit dem zweyten Halbmesser beschriebenen.

Daraus folgt, dafs sich auch nicht verhalten könne CA zu OB, wie Umf. CA zu einem gröfsern Umfange, als Umf. OB; denn wäre es möglich, so würde sich, wenn man das Verhältnifs umkehrt, OB zu CA verhalten, wie ein Umfang der gröfser ist als Umf. OB, zu Umf. CA, oder, was dafselbe ist, wie Umfang OB zu einem Umfange der kleiner ist als Umf. CA, oder es würde sich der eine Halbmesser zum andern verhalten, wie der mit dem ersten beschriebene Umfang, zu einem kleinern als dem, mit dem zweyten Halbmesser beschriebenen Umfange, welches bewiesenermafsen unmöglich ist.

Da nun also das vierte Glied der Proportion CA : OB = Umf. CA : X, weder gröfser noch kleiner seyn kann als Umf. OB, so mufs es gleich Umf. OB seyn; folglich verhalten sich die Umfänge der Kreise wie ihre Halbmesser.

Aehnliche Gründe und ein gleiches Verfahren geben den Beweis, dafs sich die Kreisflächen wie die Quadrate der Halbmesser verhalten.

Fig. 166. *Zusatz.* Die ähnlichen Bogen AB und DE verhalten sich wie ihre Halbmesser AC und DO

und die ähnlichen Ausschnitte ACB, DOE, wie die Quadrate der nämlichen Halbmesser.

Denn weil die Bogen ähnlich sind, so ist der Winkel C dem Winkel O gleich (3s B. 3te Erkl.). Der Winkel C aber verhält sich zu vier rechten, wie der Bogen AB zum ganzen Umfange, dessen Halbmesser AC ist (2s B. 17r S.). Der Winkel O verhält sich zu vier rechten, wie der Bogen DE zum ganzen mit dem Halbmesser OD beschriebenen Umfange. Also verhalten sich die Bogen AB und DE, wie die Umfänge, von welchen sie Theile sind; diese Umfänge aber verhalten sich wie die Halbmesser AC und DO, also ist:

$$\text{Bog. AB} : \text{Bog. DE} = \text{AC} : \text{DO}.$$

Aus demselben Grunde verhalten sich die Ausschnitte ACB und DOE, wie die ganzen Kreise, diese aber, wie die Quadrate der Halbmesser; also ist:

$$\text{Aussch. ACB} : \text{Aussch. DOE} = \text{AC}^2 : \text{DO}^2.$$

Zwölfter Satz.

Lehrsatz.

Der Inhalt eines Kreises ist gleich dem Producte seines Umfanges in die Hälfte seines Halbmessers *).

Man bezeichne z. B. durch Krfl. CA den Inhalt des Kreises dessen Halbmesser CA ist, so behaupte ich, daſs

$$\text{Krfl. CA} = \tfrac{1}{2}\,\text{CA} \times \text{Umf. CA}.$$

Fig. 167. Denn wäre $\frac{1}{2}$ CA $\times$ Umf. CA nicht der Inhalt des Kreises, dessen Halbmesser CA ist, so wird diese Gröſse das Maaſs eines gröſsern oder kleinern Kreises seyn. Angenommen eines gröſsern, so daſs, wenn es möglich ist, $\frac{1}{2}$ CA $\times$ Umf. CA $=$ Krfl. CB.

*) Oder genauer: Der Inhalt eines Kreises ist gleich der Hälfte des Products vom Umfange in den Halbmesser.

A. d. Uebers.

Man beschreibe um den Kreis, dessen Halbmesser CA ist, das regelmäfsige Vieleck DEFG u. s. w., dessen Seiten den Kreis vom Halbmesser CB nicht erreichen (10r S.), so wird der Inhalt dieses Vielecks gleich seyn seinem Umfange DE + EF + FG u. s. w., multiplicirt mit $\frac{1}{2}$ AC (7r S.). Der Umfang des Vielecks aber ist gröfser als der eingeschriebene Kreisumfang, weil er denselben von allen Seiten umgiebt; folglich ist die Fläche des Vielecks DEFG u. s. w., gröfser als $\frac{1}{2}$ AC $\times$ Umf. AC, welches nach der Voraussetzung das Maafs der Kreisfläche vom Halbmesser CB ist. Das Vieleck würde also gröfser seyn als dieser Kreis. Es ist aber im Gegentheil kleiner, weil es darin enthalten ist, also ist es unmöglich, dafs $\frac{1}{2}$ CA $\times$ Umf. CA gröfser sey als die Krfl. CA, oder mit andern Worten: es ist unmöglich, dafs der Umfang eines Kreises, multiplicirt mit der Hälfte seines Halbmessers, eine gröfsere Kreisfläche gebe.

Ich behaupte zweytens, dafs das nämliche Product auch keine kleinere Kreisfläche geben kann. Um die Figur nicht zu verändern, setze ich, dafs jetzt vom Kreise die Rede sey, dessen Halbmesser CB ist; so mufs bewiesen werden, dafs $\frac{1}{2}$ CB $\times$ Umf. CB nicht der Inhalt eines kleinern Kreises, z. B. nicht der Inhalt des Kreises vom Halbmesser CA seyn könne. Es sey also, wenn es möglich ist, $\frac{1}{2}$ CB $\times$ Umf. CB = Krfl. CA.

Verfährt man wie oben, so mufs der Inhalt des Vielecks DEFG u. s. w., (DE + EF + FG etc.) $\times$ $\frac{1}{2}$ CA zum Maafse haben: der Umfang DE + EF + FG etc. ist aber kleiner als der Kreisumfang CB, welchen er von allen Seiten umgiebt. Also ist der Inhalt des Vielecks kleiner als $\frac{1}{2}$ CA $\times$ Umf. CB, mithin um so mehr kleiner als $\frac{1}{2}$ CB $\times$ Umf. CB. Das letzte ist nach der Voraussetzung das Maafs des Kreises, dessen Halbmesser CA

ist, also würde das Vieleck kleiner seyn als der eingeschriebene Kreis, welches ungereimt ist; folglich ist es unmöglich, dafs der Umfang eines Kreises, multiplicirt mit der Hälfte des Halbmessers, das Maafs eines kleinern Kreises ist.

Deshalb ist der Umfang eines Kreises, multiplicirt mit der Hälfte des Halbmessers, das Maafs seines Inhalts.

Erster Zusatz. Die Fläche eines Kreisausschnitts ist gleich dem Bogen des Ausschnitts multiplicirt mit der Hälfte des Halbmessers.

Fig. 168. Denn der Ausschnitt ACB verhält sich zum ganzen Kreise wie der Bogen AMB zum ganzen Umfange ABD (2s B. 17r S.), oder wie AMB $\bowtie \frac{1}{2}$ AC zu ABD $\bowtie \frac{1}{2}$ AC. Aber der ganze Kreis ist $=$ ABD $\bowtie \frac{1}{2}$ AC; also hat der Ausschnitt AMB $\bowtie \frac{1}{2}$ AC zum Maafse.

Zweyter Zusatz. Wir werden den Umfang, dessen Durchmesser die Einheit ist, π nennen. Weil sich nun die Kreisumfänge wie die Halbmesser oder Durchmesser verhalten, so hat man die Proportion, wie der Durchmesser 1 zu seinem Kreisumfange π, so der Durchmesser 2 CA zu dem Kreisumfange, dessen Halbmesser (Fig. 165.) CA ist; oder $1 : \pi = 2$ CA : Umf. CA; also ist Umf. CA $= 2\ \pi \bowtie$ CA. Multiplicirt man auf beiden Seiten mit $\frac{1}{2}$ CA, so erhält man $\frac{1}{2}$ CA $\bowtie$ Umf. CA $= \pi \bowtie$ CA^2, oder Krfl. CA $= \pi \bowtie$ CA^2. Also ist die Fläche eines Kreises gleich dem Producte vom Quadrate seines Halbmessers in die beständige Zahl π, welche den Umfang eines Kreises, dessen Durchmesser $= 1$ ist, oder das Verhältnifs des Umfanges zum Durchmesser ausdrückt.

Eben so ist der Inhalt des Kreises, der OB zum Halbmesser hat, gleich $\pi \bowtie$ OB^2. Aber es ist

$\pi\, CA^2 : \pi \times OB^2 = CA^2 : OB^2$; also verhalten sich Kreisflächen wie die Quadrate ihrer Halbmesser, welches mit dem Obigen übereinstimmt *).

Anmerkung. Wir haben oben gesagt, dafs die Aufgabe von der Quadratur des Kreises darin bestehe, ein Quadrat zu finden, welches eben die Fläche hat, wie ein Kreis von einem gegebenen Halbmesser. Hier ist bewiesen, dafs der Kreis dem Rechtecke unter dem Umfange und der Hälfte des Halbmessers gleich ist, und dieses Rechteck kann in ein Quadrat verwandelt werden, wenn man die mittlere Proportionale zwischen jenen beiden Gröfsen sucht (3s B. 6r S.). Also besteht

*) Dem Anscheine nach kommt man zwar bey allen diesen Sätzen vom Kreise leichter weg, wenn man, auf die, zuweilen gewöhnliche Art, voraus setzt, der Kreis sey ein Vieleck von unendlich vielen Seiten; allein eine solche Vorstellung vom Kreise ist eigentlich keine, und folglich sind die darauf gebauten Schlüsse ohne Grund. Denn ein Vieleck ist eine Figur von einer bestimmten Zahl von Seiten: eine unendliche Zahl aber ist keine Zahl, weil sie gröfser ist als jede Zahl, daher heifsen die Worte, ein Kreis soll ein Vieleck von einer unendlichen Zahl von Seiten seyn, nichts anders, als: der Kreis soll ein Vieleck seyn, welches kein Vieleck ist. Da dieses keinen Sinn hat, so ist der Gegenstand, von welchem man redet, noch gar nicht bestimmt, und folglich passen auch die Sätze die man daraus ableitet, nicht auf ihn. Alles was auf ein Vieleck von unendlich vielen Seiten bezogen wird, pafst im Grunde nur auf ein Vieleck von einer bestimmten Zahl von Seiten, und folglich nicht auf den Kreis; daher läfst sich die obige oder eine ähnliche Vorstellungsart, bey welcher nicht von dem Kreise unmittelbar, (der sich durch grade Linien nicht vorstellen läfst), sondern von den Grenzen geredet wird, zwischen welchen er liegt, so enge sie auch zusammen gezogen werden mögen, wahrscheinlich nicht umgehen A. d. Uebers.

nunmehr die Aufgabe von der Quadratur des Kreises darin, den Umfang zu finden, wenn man den Halbmesser kennt. Hierzu ist es genug, das Verhältnifs des Umfanges zum Halbmesser oder zum Durchmesser zu haben.

Bis jetzt hat man dieses Verhältnifs nur näherungsweise angeben können; aber die Annäherung ist so weit getrieben, dafs der Ausdruck des genauen Verhältnisses keinen Vorzug vor dem des näherungsweisen haben würde. Deshalb gehört diese Aufgabe, welche die Geometer, zur Zeit, wo noch die Näherungsmittel unvollkommner waren, viel beschäftigt hat, jetzt nur noch unter die müfsigen Aufgaben, mit welchen sich nur diejenigen noch abgeben können, welche kaum die ersten Elemente der Geometrie verstehen.

Archimedes hat gezeigt, dafs das Verhältnifs des Umfanges zum Durchmesser zwischen $3\frac{10}{70}$ und $3\frac{10}{71}$ liegt. Also ist $3\frac{1}{7}$, oder $\frac{22}{7}$ eine Zahl, die der Zahl π schon recht nahe kommt, und diese erste Annäherung ist wegen ihrer Einfachheit vorzüglich im Gebrauche. Metius fand für die Zahl π den viel genauern Werth $\frac{355}{113}$. Andere Rechner, welche die Zahl π noch bis zu mehrern Decimalstellen suchten, fanden für dieselbe 3,14159265358979 32 etc. Man hat die Geduld gehabt, die Rechnung bis zur Einhundert und sieben und zwanzigsten Decimalstelle fortzusetzen, ja selbst bis zur Einhundert und vierzigsten. Offenbar ist eine solche Annäherung so gut als die Wahrheit selbst, denn auch z. B. die Wurzeln der Irrationalzahlen kennt man nicht genauer.

In den beiden folgenden Aufgaben wollen wir zwey der einfachsten elementaren Methoden, diese Annäherungen zu finden, vortragen.

Dreyzehnter Satz.

Aufgabe.

Wenn der Inhalt eines regelmäſsigen eingeschriebenen und eines ähnlichen umschriebenen Vielecks gegeben ist, den Inhalt der ein- und umgeschriebenen Vielecke von der doppelten Seitenzahl zu finden.

Fig. 169. AB sey die Seite des eingeschriebenen Vielecks, die mit AB parallele EF sey die Seite der ähnlichen umschriebenen Figur, C der Mittelpunct des Kreises. Man ziehe die Sehne AM und die Tangenten AP und BQ, so ist die Sehne AM die Seite des eingeschriebenen Vielecks von der doppelten Seitenzahl, und $PQ = 2PM$ ist die Seite des umschriebenen Vielecks (6r S.). Nun ist die Construction für die verschiedenen gleichen Winkel ACM immer die nämliche; folglich kann man bey dem Winkel ACM allein stehen bleiben. Die darin enthaltenen Dreyecke haben eben die Verhältnisse wie die ganzen Vielecke. Der Inhalt des eingeschriebenen Vielecks, dessen Seite AB ist, sey A, der Inhalt des ähnlichen umschriebenen Vielecks B; der Inhalt des Vielecks, dessen Seite AM ist A', der Inhalt des ähnlichen umschriebenen Vielecks B'. A und B sind bekannt, A' und B' sollen gefunden werden.

Erstlich. Die Dreyecke ACD und ACM, deren gemeinschaftlicher Scheitel A ist, verhalten sich wie ihre Grundlinien CD und CM. Sie verhalten sich aber auch wie die Vielecke A und A', von welchen sie Theile sind; also ist $A : A' = CD : CM$. Die Dreyecke CAM und CME, deren gemeinschaftlicher Scheitel M ist, verhalten sich wie ihre Grundlinien CA und CE. Aber sie verhalten sich auch wie die Vielecke A' und B, von welchen sie Theile sind; also ist $A' : B = CA : CE$. Aber wegen der Parallelen AD und ME ist $CD : CM$

$= CA : CE$; also $A : A' = A' : B$. Also ist das eine der Vielecke A', welches man sucht, die mittlere Proportionale zwischen den beiden bekannten Vielecken A und B, und folglich:

$$A' = \sqrt{(A \times B)}.$$

Zweytens. Wegen der gemeinschaftlichen Höhe CM, verhält sich das Dreyeck CPM zum Dreyecke CPE wie PM zu PE. Da aber die Linie CP den Winkel MCE halbirt, so ist (3s B. 17r S.) $PM : PE = CM : CE = CD : CA = A : A'$; folglich $CPM : CPE = A : A'$, und folglich $CPM : CPM + CPE$, oder $CME = A : A + A'$. Aber CMPA, oder 2 CMP und CME verhalten sich wie die Vielecke B' und B, von welchen sie Theile sind; also ist $B' : B = 2A : A + A'$. Da nun A' schon gefunden ist, so giebt dieses neue Verhältniſs B', und man erhält $B' = \frac{2A \times B}{A + A'}$. So lassen sich aus den Vielecken A und B die Vielecke A' und B' finden, welche die doppelte Seitenzahl haben.

Vierzehnter Satz.

Aufgabe.

Näherungsweise das Verhältniſs des Umfanges zum Durchmesser zu finden.

Der Halbmesser des Kreises sey $= 1$, so ist die Seite vom eingeschriebenen Quadrate, $\sqrt{2}$ (3r S.), die Seite des umschriebenen Quadrats aber ist dem Durchmesser 2 gleich. Mithin ist der Inhalt des eingeschriebenen Quadrats 2, und der Inhalt des umschriebenen Quadrats 4. Macht man nun $A = 2$ und $B = 4$, so findet man nach der vorhergehenden Aufgabe für das eingeschriebene Achteck $A' = \sqrt{8} = 2{,}8284271$, und für das umschriebene Achteck $B' = \frac{16}{2 + \sqrt{8}} = 3{,}3137085$. Aus den ein- und umgeschriebenen Achtecken findet

man weiter die Vielecke von der doppelten Seitenzahl. Man setze nämlich von Neuem $A = 2{,}8284271$ und $B = 3{,}3137085$, so erhält man $A' = \sqrt{(A \times B)} = 3{,}0614674$ und $B' = \frac{2\,A \times B}{A + A'} = 3{,}1825979$. Die Vielecke von 16 Seiten dienen um diejenigen von 32 Seiten zu finden, und so kann man fortfahren bis die Rechnung keinen merklichen Unterschied mehr zwischen dem ein- und umgeschriebenen Vielecke giebt, nämlich nicht mehr in derjenigen Decimalstelle, bey welcher man stehen bleiben will, und welche in dem obigen Beyspiele die siebente ist. Ist man bis dahin gekommen, so kann man den Kreis dem Resultate gleich setzen, denn der Kreis liegt immer zwischen dem ein- und umgeschriebenen Vielecke; sind also diese nicht mehr in der angenommenen Decimalstelle verschieden, so ist es auch der Kreis in der nämlichen Decimalstelle nicht mehr.

Nachstehendes ist die Berechnung dieser Vielecke bis auf die siebente Decimalstelle:

Zahl der Seiten		Eingeschriebenes Vieleck		Umschriebenes Vieleck
4	—	2,0000000	—	4,0000000
8	—	2,8284271	—	3,3137085
16	—	3,0614674	—	3,1825979
32	—	3,1214451	—	3,1517249
64	—	3,1365485	—	3,1441184
128	—	3,1403311	—	3,1422236
256	—	3,1412772	—	3,1417504
512	—	3,1415138	—	3,1416321
1024	—	3,1415729	—	3,1416026
2048	—	3,1415877	—	3,1415951
4096	—	3,1415914	—	3,1415933
8192	—	3,1415923	—	3,1415928
16384	—	3,1415925	—	3,1415927
32768	—	3,1415926	—	3,1415926

Daraus folgt, dafs der Inhalt des Kreises $= 3{,}1415926$ ist. Die letzte Decimalstelle könnte wegen der weggelassenen Decimalstellen zweifelhaft seyn. Aber die Rechnung ist schon um eine Decimalstelle weiter fortgesetzt worden, um das Resultat bis in die siebente Stelle sicher zu haben.

Weil der Inhalt des Kreises gleich ist dem halben Umfange multiplicirt mit dem Halbmesser, so ist der halbe Umfang $3{,}1415926$, weil der Halbmesser 1 ist. Mithin ist das, oben mit π bezeichnete Verhältnifs des Umfanges zum Durchmesser $= 3{,}1415926$.

Funfzehnter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 170. *Das Dreyeck CAB ist so grofs als das gleichschenklige Dreyeck DCE, welches den nämlichen Winkel C hat, und dessen gleiche Seiten CE und CD der mittlern Proportionale zwischen CA und CB gleich sind. Wenn ferner der Winkel CAB ein rechter ist, so ist das, auf die Grundlinie des gleichschenkligen Dreyecks, gefällte Perpendikel CF die mittlere Proportionale zwischen der Seite CA und der halben Summe der Seiten CA und CB.*

Denn *erstlich* verhält sich wegen des gemeinschaftlichen Winkels C, das Dreyeck ABC zu dem gleichschenkligen Dreyecke DCE, wie $AC \times BC$ zu $DC \times CE$, oder DC^2 (3s B. 24r S.); folglich sind diese Dreyecke gleich grofs, wenn $DC^2 = AC \times CB$, oder wenn DC die mittlere Proportionale zwischen AC und CB ist.

Zweytens. Weil die senkrechte Linie CGF den Winkel ACB halbirt, so ist $AG : GB = AC : CB$ (3s B. 17r S.); woraus, componendo, folgt $AG : AG + GB$, oder $AB = AC : AC + CB$. Aber AG verhält sich zu AB wie das Dreyeck ACG zum Dreyecke ACB, oder 2 CDF; ferner sind die rechtwinkligen Dreyecke ACG, CDF

ähnlich, wenn der Winkel A ein rechter ist. Deshalb ist ACG : CDF = $AC^2 : CF^2$, und folglich:

$$AC^2 : 2\,CF^2 = AC : AC + CB.$$

Multiplicirt man das dritte und vierte Glied mit AC, so werden die Vorderglieder einander gleich; folglich ist $2\,CF^2 = AC \times (AC + CB)$, oder $CF^2 = AC \times \left(\frac{AC + CB}{2}\right)$; folglich ist zweytens die senkrechte Linie CF, im Fall der Winkel A ein rechter ist, die mittlere Proportionale zwischen der Seite AC und der halben Summe der Seiten AC und CB.

Sechszehnter Satz.

Aufgabe.

Einen Kreis zu finden der so wenig als man will von einem gegebenen Vielecke verschieden ist.

Fig. 171. Es sey z. B. das Quadrat BMNP gegeben. Man fälle aus dem Mittelpuncte C auf die Seite MB die senkrechte Linie CA und ziehe CB.

Der mit dem Halbmesser CA beschriebene Kreis ist in das Quadrat eingeschrieben, und der Kreis vom Halbmesser CB, ist um dafselbe beschrieben. Der erste Kreis ist kleiner als das Quadrat, der zweyte gröfser. Diese Grenzen dürfen also nur enger zusammen gezogen werden.

Man setze CD und CE gleich der mittlern Proportionale zwischen CA und CB, und ziehe ED, so ist das gleichschenklige Dreyeck CDE dem Dreyecke CAB gleich (15r S.). Man verfahre auf eben die Weise mit allen acht Dreyecken im Quadrate, so entsteht ein regelmäfsiges Achteck, welches so grofs ist als das Quadrat BMNP. Der mit dem Halbmesser CF, der mittlern Proportionale zwischen CA und $\frac{CA + CB}{2}$, beschriebene

Kreis aber ist in das Achteck eingeschrieben, und der Kreis vom Halbmesser CD um dasselbe beschrieben. Also ist der erste kleiner, der zweyte gröſser als das Quadrat.

Verwandelt man auf dieselbe Weise das rechtwinklige Dreyeck CDF in ein gleich groſses gleichschenkliges Dreyeck, so entsteht ein regelmäſsiges Vieleck von 16 Seiten, welches dem Quadrate an Inhalt gleich ist. Der in dieses Vieleck eingeschriebene Kreis ist kleiner, der umschriebene gröſser als das Quadrat.

So kann man fortfahren bis der um- und eingeschriebene Kreis so wenig von einander abweichen als man will. Alsdann können beide dem Quadrate gleich gesetzt werden.

Anmerkung. Die Berechnung der auf einander folgenden Halbmesser ist folgende. Es sey a der Halbmesser des in eines der gefundenen Vielecke eingeschriebenen Kreises, b der Halbmesser des Kreises um das nämliche Vieleck; a′ und b′ sollen die Halbmesser für das folgende Vieleck mit der doppelten Seitenzahl seyn. Dem Obigen zufolge ist b′ die mittlere Proportionale zwischen a und b, und a′ die mittlere Proportionale zwischen a und $\frac{a+b}{2}$, so daſs $b' = \sqrt{(a \times b)}$ und $a' = \sqrt{\left[a \times \left(\frac{a+b}{2}\right)\right]}$. Sind also die Halbmesser a und b bekannt, so findet man die Halbmesser a′ und b′ des folgenden Vielecks, und man kann damit fortfahren, bis der Unterschied der beiden Halbmesser unmerklich ist; alsdann ist der eine wie der andere Halbmesser derjenige eines Kreises, welcher so groſs ist als das gegebene Quadrat oder Vieleck.

Dieses Verfahren ist zwar in Linien leicht auszuführen, weil man nur der Reihe nach die mittlern Proportionalen zwischen bekannten Linien suchen darf; aber die Entwickelung geschieht besser in Zahlen. Das Verfahren ist unter denen, welche die Elementar-Geometrie darbietet, eins der bequemsten, um schnell das wahre Verhältniſs des Umfanges zum Durchmesser näherungsweise zu finden. Die Seite des Quadrats sey 2, so ist der erste eingeschriebene Halbmesser CA = 1, der erste umschriebene Halbmesser CB = $\sqrt{2}$, oder 1,4142136. Macht man also a = 1 und b = 1,4142136, so findet man b′ = 1,1892071 und a′ = 1,0986841. Diese Zahlen dienen, die folgenden nach demselben Gesetze zu berechnen.

Folgendes ist das Resultat der Rechnung bis auf 7 oder 8 Decimalstellen, vermittelst der gewöhnlichen Logarithmen.

Halbmesser der umschriebenen Kreise				Halbmesser der eingeschriebenen Kreise
1,4142136	—	—	—	1,0000000
1,1892071	—	—	—	1,0986841
1,1430500	—	—	—	1,1210863
1,1320149	—	—	—	1,1265639
1,1292862	—	—	—	1,1279257
1,1286063	—	—	—	1,1282657

Von hier ab, wo die erste Hälfte der Ziffern auf beiden Seiten die nämliche ist, kann man statt der geometrischen Mittelzahlen die arithmetischen nehmen, weil solche nur in den höhern Decimalstellen von jenen verschieden sind *). Dadurch wird die Rechnung abgekürzt, und die Resultate sind folgende:

*) Dieses hätte wohl eines besondern Beweises bedurft.
A. d. Uebers.

1,1284360	—	—	—	1,1283508
1,1283934	—	—	—	1,1283721
1,1283827	—	—	—	1,1283774
1,1283801	—	—	—	1,1283787
1,1283794	—	—	—	1,1283791
1,1283792	—	—	—	1,1283792

Folglich ist 1,1283792 sehr nahe der Halbmesser eines Kreises, welcher so groſs ist als ein Quadrat, dessen Seite = 2. Es ist leicht hieraus das Verhältniſs des Umfanges zum Durchmesser zu finden: denn, wie oben bewiesen, ist der Inhalt des Kreises gleich dem Inhalte des Quadrats seines Halbmessers, multiplicirt mit der Zahl π. Dividirt man also die Fläche 4 durch das Quadrat von 1,1283792, so erhält man π. Man findet, wenn man die Rechnung ausführt, $\pi = 3,1415926$ etc., wie oben, durch ein anderes Verfahren.

Anhang
zum vierten Buche.

Erklärungen.

I. Diejenige Gröſse, welche die gröſseste unter allen ihrer Art ist, nennt man *Maximum*, die kleinste *Minimum*.

So ist der Durchmesser des Kreises ein Maximum unter allen graden Linien zwischen zwey Puncten seines Umfanges. Das Perpendikel ist ein Minimum unter allen graden Linien von einem gegebenen Puncte nach einer gegebenen graden Linie *).

II. Figuren, welche gleichen Umfang haben, nennt man *isoperimetrische*.

*) Allgemeiner ist eine Gröſse schon ein Maximum oder Minimum, wenn in einer Reihe auf einander folgender Gröſsen ihrer Art, unter welchen sie sich befindet, die unmittelbar vor ihr hergehende, und die unmittelbar auf sie folgende Gröſse beide kleiner oder gröſser sind als sie; denn in einer Reihe auf einander folgender Gröſsen einerley Art können sich mehrere gröſste und kleinste befinden. In den angeführten beiden Beyspielen haben das Maximum und Minimum zugleich noch die besondere Eigenschaft, daſs sie die einzigen sind, denn unter allen Sehnen eines Kreises giebt es nur eine gröſseste, welche der Durchmesser ist, unter allen Linien von einem gegebenen Puncte nach einer gegebenen graden Linie nur eine kleinste, nämlich das Perpendikel. Anders schon verhält es sich z. B. mit den Perpendikeln auf den Durchmesser eines Kreises bis an den Umfang gezogen. Unter diesen Perpendikeln giebt es schon zwey gröſste, einen über und einen unter dem Durchmesser, beide durch den Mittelpunct.

A. d. Uebers.

Erster Satz.

Lehrsatz.

Unter allen Dreyecken von einerley Grundlinie und einerley Umfang ist dasjenige das Gröfseste, in welchen die beiden nicht gegebenen Seiten einander gleich sind.

Fig. 172. Es sey AC = CB und AM + MB = AC + CB, so behaupte ich, dafs das gleichschenklige Dreyeck ACB gröfser ist als das Dreyeck AMB, welches mit ihm einerley Grundlinie und Umfang hat.

Man beschreibe aus C mit dem Halbmesser CA = CB einen Kreis, welcher die verlängerte CA in D schneidet, und ziehe DB, so ist der in den Halbkreis beschriebene Winkel DBA ein rechter (2s B. 15r S.). Man verlängere das Perpendikel DB nach N zu, mache MN = MB und ziehe AN. Endlich fälle man aus M und C die Linien MP und CG auf DN senkrecht. Weil nun CB = CD und MN = MB ist, so ist AC + CB = AD und AM + MB = AM + MN. Es ist aber AC + CB = AM + MB; also ist AD = AM + MN; folglich ist AD > AN: da nun die schräge Linie AD länger ist als die AN, so mufs sie weiter von dem Perpendikel AB entfernt seyn; folglich ist DB > BN, und folglich BG, welches die Hälfte von BD ist (1s B. 12r S.), gröfser als BP, welches die Hälfte von BN ist. Die Dreyecke ABC und ABM, welche gleiche Grundlinien haben, verhalten sich aber wie ihre Höhen BG und BP, also ist das gleichschenklige Dreyeck ABC, weil BG > BP war, gröfser als das nicht gleichschenklige ABM von der nämlichen Grundlinie und demselben Umfange *).

*) Meines Erachtens ist dieser Beweis nicht ganz vollständig, und es mufs noch gezeigt werden, dafs AMN (Fig. 172) keine grade Linie ist, sobald AM und BM ungleich sind.

Zweyter Satz.

Lehrsatz.

Unter allen Vielecken von gleichem Umfange und von einer gleichen Seitenzahl, sind die Seiten des gröſsten einander gleich.

Fig. 173. Denn ABCDEF sey das gröſste Vieleck. Ist in demselben die Seite BC nicht der Seite CD gleich,

Vollständig kann der Satz, wie ich glaube, folgendergestalt bewiesen werden. Es sey $AC = CB = CH$, so ist ABH ein rechter Winkel, weil das Dreyeck ABH im Halbkreise liegt. Nun sey $AD + DB = AC + BC$, und zwar sey $DAB < CAB$, so ist nothwendig $DBA > CBA$; denn wäre $DBA < CBA$ z. B. $= LBA$, so wäre $AL + BL < AC + CB$ (1s B. 9r S.); wäre $DBA = CBA = MBA$, so wäre ebenfalls $AM + BM < AC + BC$. Beides ist gegen die Voraussetzung, also ist nothwendig $DBA > CBA$. Nun sey $DG = BD$, so ist $DGB = DBG$. Es ist aber $DBG + DBA$ einem rechten Winkel gleich, also ist $DGB + DAB$ kleiner als ein rechter Winkel, weil $DGB = DBG$ und $DAB < DBA$ war. In dem Vierecke ADGB sind also die drey Winkel bey A, G und B zusammen kleiner als zwey rechte, folglich ist der Winkel bey D, nach innen zu, gröſser, und folglich der Winkel ADG nach auſsen kleiner als zwey rechte; mithin ist ADG keine grade Linie, und folglich ist $AG < AD + DG$, oder, weil $DG = DB$, $AG < AD + DB$, oder $AG < AC + CB$, oder $AG < AH$. Deshalb ist, wie bey Legendre, $GB < HB$, und weil $DK = \frac{1}{2} GB$, $CI = \frac{1}{2} HB$, so ist $DK < CI$, folglich das Dreyeck ADB von geringerem Inhalte als das gleichschenklige Dreyeck ACB von gleichem Umfange.

Algebraisch läſst sich der Satz sehr kurz beweisen, und zwar vermittelst des Ausdrucks für den Inhalt eines Dreyecks durch die drey Seiten. Wenn nämlich die Seite AB durch a, die Seite BD durch b, und die Seite AC durch c bezeichnet wird, so ist der Inhalt des Dreyecks ADB

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)]}.$$

Die Summe der Seiten $b + c$ werde durch p, ihr Unter-

so beschreibe man über der Grundlinie BD ein gleichschenkliges Dreyeck BOD mit BCD von gleichem Umfange, so ist das Dreyeck BOD gröfser als BCD (1r S.); folglich das Vieleck ABODEF gröfser als ABCDEF. Also würde das letztere nicht das gröfste unter denen seyn, welche eine gleiche Zahl von Seiten und den nämlichen Umfang haben, welches gegen die Voraussetzung ist. Es mufs also BC = CD, und aus demselben Grunde CD = DE, DE = EF u. s. w. seyn; also müssen alle Seiten des Vielecks unter einander gleich seyn.

Dritter Satz.

Lehrsatz.

Von allen Dreyecken, in welchen zwey Seiten, die einen beliebigen Winkel einschliefsen, gegeben sind, ist dasjenige das gröfste, in welchem die beiden gegebenen Seiten mit einander einen rechten Winkel machen.

Fig. 174. Man setze die beiden Dreyecke BAC und BAD, welche die Seite AB gemeinschaftlich haben, während die andere Seite AC = AD ist, so behaupte ich, dafs

schied c — b durch q bezeichnet, so ist der Inhalt des Dreyecks

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{[(a+p)(a-q)(a+q)(p-a)]} \text{ oder}$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{[(p^2-a^2)(a^2-q^2)]}.$$

Nun behält nach der Voraussetzung die Summe p von den Seiten b und c den nämlichen Werth, welche auch die Gestalt des Dreyecks ABD seyn mag, weil der Umfang der nämliche bleiben soll. Also ist der Inhalt am gröfsten, wenn der Unterschied der Seiten AD und BD, q = o ist, das heifst, wenn die Seiten einander gleich sind, oder das Dreyeck gleichschenklig ist, wie ACB; denn jeder beliebige Werth von q, positiv oder negativ, macht den Factor $a^2 - q^2$ kleiner als a^2.

A. d. Uebers.

das Dreyeck BAC mit dem rechten Winkel gröſser ist als das Dreyeck BAD, der Winkel A des letztern mag stumpf oder spitz seyn.

Denn da die Grundlinie AB die nämliche ist, so verhalten sich die beiden Dreyecke BAC und BAD, wie die Höhen AC und DE. Aber das Perpendikel DE ist kürzer als die schräge Linie AD, oder die ihr gleiche Linie AC, also ist das Dreyeck BAD kleiner als BAC.

Vierter Satz.

Lehrsatz.

Von allen Vielecken mit gegebenen und einer willkürlichen Seite ist dasjenige das gröſste, dessen Winkelscheitel alle in einem Halbkreise liegen, von welchem die willkürliche Seite der Durchmesser ist.

Fig. 175. ABCDEF sey unter den Vielecken, welche mit den gegebenen Seiten AB, BC, CD, DE, EF und einer willkürlichen Seite AF umschlossen sind, das gröſste. Man ziehe die Diagonalen AD und DF. Wäre der Winkel ADF kein rechter, so könnte man, indem man die Theile ABCD und DEF beybehält wie sie sind, das Dreyeck ADF, und folglich das ganze Vieleck dadurch vergröſsern, daſs man den Winkel ADF einem rechten gleich macht, zufolge des vorigen Satzes. Das Vieleck soll aber nicht mehr vergröſsert werden können, weil es nach der Voraussetzung schon das gröſste ist. Also ist schon der Winkel ADF ein rechter. So verhält es sich mit allen Winkeln ABF, ACF, AEF; folglich liegen die Scheitel aller dieser Winkel A, B, C, D, E, F des gröſsten Vielecks in einem Halbkreise, dessen Durchmesser die unbestimmte Seite AF ist.

Anmerkung. Dieser Satz giebt Veranlassung zu einer Frage: nämlich, ob mit gegebenen Seiten und einer willkürlichen Seite, die der Durchmesser des Kreises

ist, in dessen Umfange die Winkelscheitel des Vielecks liegen, dieses Vieleck auf mehr als eine Art beschrieben werden könne.

Fig. 176. Man bemerke zuförderst, dafs, wenn die nämliche Sehne AB, Bogen von verschiedenen Halbmessern AC und AD begrenzt, der Winkel am Mittelpuncte in dem Kreise von kleinerem Halbmesser der gröfsere ist; so dafs ACB < ADB, denn der Winkel ADO ist gleich ACD + CAD (1s B. 27r S.); also ist ACD < ADO, und wenn man auf beiden Seiten das zweyfache nimmt, ACB < ADB.

Fünfter Satz.

Lehrsatz.

Mit gegebenen Seiten und einer willkürlichen kann auf die Weise, dafs die letztere der Durchmesser eines Halbkreises ist, in dessen Umfang die übrigen sich schneiden, ein Vieleck ABCDEF nur auf eine einzige Art beschrieben werden.

Fig. 175. Denn man setze, der Kreis, welcher der Aufgabe genug thut, sey gefunden. Nimmt man nun einen gröfsern Kreis an, so werden die Sehnen AB, BC, CD etc., zu kleinern Winkeln am Mittelpuncte gehören. Die Summe dieser Winkel am Mittelpuncte wird also kleiner als zwey rechte seyn; also werden die Enden der gegebenen Sehnen nicht mehr in den Endpuncten eines Durchmessers liegen. Dafselbe würde auf die entgegengesetzten Weise Statt finden, wenn man einen kleinern Kreis annähme; also kann das Vieleck nur in einen einzigen Kreis eingeschrieben werden.

Anmerkung Man kann die Aufeinanderfolge der Seiten AB, BC, CD etc., nach Belieben verwechseln, ohne dafs sich der Durchmesser des umschriebenen Kreises und der Inhalt des Vielecks änderte; denn in

welcher Ordnung auch die Bogen AB, BC etc. aufeinanderfolgen mögen, immer werden sie zusammen dem halben Umfange gleich, und der Inhalt des Vielecks wird der nämliche seyn, weil er dem Inhalte des Halbkreises weniger den Abschnitten AB, BC etc. gleich ist, deren Summe immer die nämliche bleibt.

Sechster Satz.

Lehrsatz.

Von allen Vielecken mit gegebenen Seiten ist das gröfste dasjenige, dessen Ecken in einem Kreisumfange liegen.

Fig. 177. ABCDEFG sey das eingeschriebene, und abcdefg ein nicht im Kreise liegendes Vieleck. Beide sollen die nämlichen Seiten haben, so dafs AB = ab, BC = bc etc. Ich behaupte, dafs das eingeschriebene Vieleck gröfser ist als das andere.

Man ziehe den Durchmesser EM, desgleichen die Linien AM und MB. Auf ab = AB mache man das Dreyeck abm dem Dreyecke ABM gleich und ziehe em.

Vermöge des vierten Satzes ist das Vieleck EFGAM gröfser als efgam, so lange das letztere nicht in einen Halbkreis beschrieben werden kann, dessen Durchmesser em ist, welches aber nach dem fünften Satze nicht angeht, ohne dafs die beiden Vielecke einander gleich wären. Aus demselben Grunde ist das Vieleck EDCBM gröfser als edcbm, unter der nämlichen Voraussetzung, dafs sie nicht gleich sind. Also ist das ganze Vieleck EFGAMBCDE gröfser als efgambcde, in sofern beide nicht etwa gleich sind. Da sie dies nun nicht seyn sollen, weil das eine in den Kreis sollte eingeschrieben werden können, das andere nicht, so ist das eingeschriebene Vieleck das gröfsere. Nimmt man von beiden die gleichen Dreyecke ABM und abm hinweg, so bleibt das eingeschriebene Vieleck ABCDEFG, und das nicht

eingeschriebene abcdefg übrig, wovon also das erste das größere ist.

Anmerkung. Wie beim fünften Satze läſst sich beweisen, daſs nur ein einziger Kreis und folglich nur ein einziges gröſstes Vieleck möglich sey, welches die Bedingung erfüllt. Dieses gröſste Vieleck behält immer denselben Inhalt, wie man auch die Aufeinanderfolge seiner Seiten verändern mag.

Siebenter Satz.

Lehrsatz.

Das regelmäſsige Vieleck ist das gröſste unter allen Vielecken von gleichem Umfange und gleicher Seitenzahl.

Denn nach dem zweyten Lehrsatze ist das gröſste Vieleck gleichseitig, und nach dem vorigen Lehrsatze müssen seine Ecken im Kreise liegen. Also muſs das gröſste Vieleck ein regelmäſsiges seyn.

Achter Satz.

Lehrsatz.

Zwey Winkel am Mittelpuncte, in Kreisen von verschiedenen Halbmessern, verhalten sich wie die zu ihnen gehörigen Bogen, dividirt durch die Halbmesser.

Fig. 178. Nämlich der Winkel C verhält sich zum Winkel O wie der Quotient $\frac{AB}{AC}$ zum Quotienten $\frac{DE}{DO}$.

Man beschreibe mit einem Halbmesser $OF = AC$ den Bogen FG zwischen den verlängerten Schenkeln OD und OE, so ist wegen der gleichen Halbmesser AC und OF, $C : O = AB : FG$ (2s B. 17r S.), oder $C : O = \frac{AB}{AC} : \frac{FG}{FO}$. Aber wegen der ähnlichen Bogen FG und DE ist $FG : DE = FO : DO$ (11r S.); also ist der Quotient

$\frac{FG}{FO}$ dem Quotienten $\frac{DE}{DO}$ gleich, und folglich $C : O = \frac{AB}{AC} : \frac{DE}{DO}$.

Neunter Satz.

Lehrsatz.

Von zwey regelmäſsigen Vielecken von gleichem Umfange ist dasjenige, welches die meisten Seiten hat, das gröſsere.

Fig. 179. DE sey die halbe Seite des einen Vielecks, O sein Mittelpunct, OE seine Apotheme; AB sey die halbe Seite des andern Vielecks, C sein Mittelpunct, CB seine Apotheme. Die Mittelpuncte O und C sollen um eine beliebige Weite OC von einander entfernt seyn, und die Apothemen sollen beide in der Richtung OC liegen. Dann sind DOE und ACB die halben Winkel an den Mittelpuncten der Vielecke, und da diese Winkel nicht gleich sind, so werden sich die Linien CA und OD, verlängert, in irgend einem Puncte F schneiden. Aus diesem Puncte fälle man auf OC das Perpendikel FG, uud beschreibe aus den Puncten O und C die Bogen GI und GH bis an die andern Schenkel OF und CF.

Dann ist vermöge des vorigen Lehnsatzes $O : C = \frac{GI}{OG} : \frac{GH}{CG}$. Aber DE verhält sich zum Umfange des ersten Vielecks, wie der Winkel O zu vier rechten, und AB zum Umfange des zweiten, wie der Winkel C zu vier rechten; also verhält sich, weil die Umfänge gleich sind, $DE : AB = O : C$, oder $DE : AB = \frac{GI}{OG} : \frac{GH}{CG}$. Multiplicirt man die Vorderglieder mit OG, und die Hinterglieder mit CG, so kommt $DE \times OG : AB \times CG = GI : GH$. Aber die ähnlichen Dreyecke ODE und

OFG geben OE : OG = DE : FG, woraus folgt DE $\times$ OG = OE $\times$ FG. Eben so würde man erhalten AB $\times$ CG = CB $\times$ FG; folglich OE $\times$ FG : CB $\times$ FG = GI : GH, oder OE : CB = GI : GH. Kann man nun zeigen, dafs der Bogen GI gröfser ist als der Bogen GH, so folgt daraus, dafs die Apotheme OE gröfser ist als CB.

Man mache auf der andern Seite von CF die Figur CKx der Figur CGx gleich, so dafs CK = CG, der Winkel HCK = HCG und der Bogen Kx = Gx, so wird die gebrochene Linie KxG den Bogen KHG umschliefsen, und folglich länger seyn als dieser Bogen (9r S.). Folglich ist die Hälfte der gebrochenen Linie Gx gröfser als die Hälfte GH des Bogens KHG, folglich ist um so mehr GI gröfser als GH.

Daraus folgt, dafs die Apotheme OE gröfser ist als CB. Da nun die beiden Vielecke gleichen Umfang haben sollen, so verhalten sich ihre Flächen wie die Apothemen (7r Satz).

Also ist dasjenige welches DE zur halben Seite hat, gröfser als das andere mit der halben Seite AB. Das erstere aber hat mehr Seiten, weil sein Winkel am Mittelpuncte kleiner ist, also ist von den beiden Vielecken von gleichem Umfange dasjenige, welches die meisten Seiten hat, das gröfsere.

Zehnter Satz.

Lehrsatz.

Der Kreis ist die gröfseste von allen Figuren die einerley Umfang haben.

Fig. 180. Oben ist bewiesen, dafs unter allen Vielecken von gleichem Umfange und gleicher Seitenzahl das regelmäfsige das gröfseste ist. Also ist nur noch nöthig, den Kreis mit einem regelmäfsigen Vielecke von demselben Umfange zu vergleichen. AI sey die halbe

Seite des Vielecks, C sein Mittelpunct. In dem Kreise von gleichem Umfange sey der Winkel DOE $=$ ACI, und folglich der Bogen DE gleich der halben Seite AI. Das Vieleck P verhält sich zum Kreise C, wie das Dreyeck ACI zum Ausschnitte DOE; also ist $P : C = \frac{1}{2} AI \bowtie CI : \frac{1}{2} DE \bowtie OE = CI : OE$. Nun werde im Puncte E die Tangente EG gezogen, welche die verlängerte OD in G schneidet, so geben die ähnlichen Dreyecke ACI und GOE die Proportion $CI : OE = AI$ oder $DE : GE$; also verhält sich P zu C wie DE zu GE, oder wie $DE \bowtie \frac{1}{2} OE$, welches das Maafs des Ausschnitts DOE ist, zu $GE \bowtie \frac{1}{2} OE$, welches das Maafs des Dreyecks GOE ist. Nun ist der Ausschnitt kleiner als das Dreyeck, also ist P kleiner als C; folglich ist der Kreis die gröfste unter allen Figuren von gleichem Umfange *).

*) Die Untersuchung der Figuren von gleichem Umfange ist so wesentlich und wichtig, dafs sie wohl in keinem Lehrbuche fehlen sollte. Das gegenwärtige Lehrbuch füllt also auch hier eine Lücke manches anderen aus. Legendres Vortrag über diesen Gegenstand ist unstreitig eben so folgerecht als scharfsinnig. Zu bemerken ist, dafs der an sich schätzbare neunte Satz zum Beweise des zehnten nicht nothwendig ist. Denn da im zehnten Satze bewiesen wird, dafs der Kreis gröfser ist, als *jedes* regelmäfsige Vieleck, im siebenten Satze aber, dafs *jedes* regelmäfsige Vieleck gröfser ist, als *jedes* andere Vieleck von gleichem Umfange und gleicher Seitenzahl, so folgt schon hieraus, dafs der Kreis gröfser ist als jede andere Figur von gleichem Umfange, und zwar gröfser als jede andere *gradlinige* Figur von gleichem Umfange; denn dafs auch mit keiner *krummlinigen* Figur von der Länge des Kreisumfanges ein gröfserer Raum als der des Kreises eingeschlossen werden kann, mufs noch besonders bewiesen werden.

A. d. Uebers.

Fünftes Buch.

Von der Ebene und den körperlichen Winkeln.

Erklärungen.

I. Eine grade Linie ist *auf einer Ebene senkrecht*, wenn sie auf allen graden Linien die in der Ebene durch ihren *Fuſs* gehen, senkrecht steht (4r S.). Umgekehrt ist alsdann die Ebene auf der graden Linie senkrecht.

Der *Fuſs* der Perpendikulare ist der Punct in welchem sie die Ebene schneidet.

II. Eine Linie ist *mit einer Ebene parallel*, wenn sie sie nirgend schneidet, so weit man auch die Linie verlängert. Umgekehrt ist alsdann die Ebene mit der Linie parallel.

III. *Zwey Ebenen sind mit einander parallel*, wenn sie sich nirgend schneiden, wie weit man auch die eine und die andere verlängert.

IV. Es wird bewiesen werden, daſs der gemeinschaftliche Durchschnitt zweyer Ebenen die sich begegnen, eine grade Linie ist (3r S.). Dieses angenommen, so heiſst *Winkel zwischen zwey Ebenen*, oder *wechselseitige Neigung der Ebenen gegen einander*, die mehrere oder geringere Gröſse, um welche sie sich, eine von der andern, entfernen; diese Gröſse wird durch den Winkel zwischen zwey Linien in den Ebenen gemessen, welche auf den Durchschnitt der Ebenen in einem und demselben Puncte des Durchschnitts senkrecht stehen (7r Satz).

Dieser Winkel kann spitz, oder ein rechter oder stumpf seyn.

V. Ist derselbe ein rechter, so stehen die beiden *Ebenen* auf einander *senkrecht.*

VI. *Körperwinkel* heifst der Winkelraum, welcher zwischen mehreren in einem und demselben Puncte sich schneidenden Ebenen liegt.

Fig. 199. So wird z. B. der Körperwinkel S durch das Zusammenlaufen der Ebenen ASB, BSC, CSB, DSA gebildet.

Wenigstens drey Ebenen sind zur Bildung eines Körperwinkels nöthig.

Erster Satz.

Lehrsatz.

Eine grade Linie kann nicht zum Theil in und zum Theil aufser einer Ebene liegen.

Denn nach der Erklärung der Ebene befindet sich eine grade Linie sobald sie zwey Puncte mit einer Ebene gemein hat, ganz in derselben.

Anmerkung. Um zu erfahren ob eine Fläche eben sey, darf man nur eine grade Linie in verschiedenen Richtungen auf die Ebene legen und Acht geben, ob sie die Fläche überall berührt *).

*) Diese Bemerkung ist vielleicht für irgend eine practische Anwendung der Geometrie bestimmt. Denn geometrisch ist das angegebene Merkmal nicht. Eine Fläche kann krumm seyn, obgleich sich eine grade Linie in verschiedenen Richtungen ganz in ihr befindet. Soll die Fläche eben seyn, so mufs sich die grade Linie in *allen möglichen* Richtungen in ihr befinden.

A. d. Uebers.

Zweyter Satz.

Lehrsatz.

Zwey grade Linien die sich schneiden, befinden sich in einer und derselben Ebene, und bestimmen die Richtung der Ebene.

Fig. 181. Gesetzt die beiden graden Linien AB und AC schneiden sich in A, so stelle man sich eine Ebene vor, in welcher sich die Linie AB befindet. Dreht man diese Ebene um AB, bis sie durch C geht, so wird sich alsbald die Linie AC, deren beide Puncte A und C nun in der Ebene liegen, ganz in derselben befinden, also wird die Lage der Ebene dadurch bestimmt, daſs sie die beiden graden Linien AB und AC enthält.

Erster Zusatz. Ein Dreyeck ABC, oder drey Puncte A, B, C die nicht in grader Linie liegen, bestimmen die Lage einer Ebene.

Fig. 182. *Zweyter Zusatz.* Also bestimmen auch zwey Parallelen die Lage einer Ebene; denn wenn man die Linie EF zieht, welche die Parallelen schneidet, so ist die Ebene der beiden graden Linien AE und EF die Ebene der Parallelen AB und CD *).

*) Es ist wohl zu merken, daſs unter Parallelen grade Linien verstanden werden, die, ohne sich irgendwo zu schneiden, so weit man sie auch verlängert, zugleich in einer und derselben Ebene liegen; denn daſs zwey grade Linien blos nirgend sich schneiden, ist allein zum Parallelismus nicht hinreichend. Im Raume können Linien an einander vorbey gezogen werden, die sich nirgends schneiden, die aber gleichwol keinesweges in einer und derselben Ebene liegen. Von solchen Linien gilt auch der zweyte Zusatz nicht, sondern nur von wirklichen Parallelen in einer und derselben Ebene. A. d. Uebers.

Dritter Satz.

Lehrsatz.

Wenn sich zwey Ebenen schneiden, so ist ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt eine grade Linie.

Denn wären unter den Puncten, welche die beiden Ebenen gemeinschaftlich haben, auch nur drey, die nicht in grader Linie lägen, so würden die Ebenen, weil sie beide durch die drey Puncte gehen, nur eine und dieselbe Ebene seyn (2r S.), welches gegen die Voraussetzung ist.

Vierter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 183. *Wenn eine grade Linie AP auf zwey andere PB und PC, die sich in der Ebene MN in dem Fuſs von AP schneiden, senkrecht ist, so ist sie zugleich auf jeder beliebigen graden Linie PQ, die in der nämlichen Ebene durch den Fuſs von AP geht, und mithin auf der Ebene MN selbst, senkrecht.*

Durch einen willkürlichen Punct Q in PQ, ziehe man, in dem Winkel PBC, die grade Linie BC, so, daſs BQ = QC (3s B. 5r S.), desgleichen AB, AQ, AC.

Da die Grundlinie BC in Q halbirt wird, so ist in dem Dreyecke BPC (gemäſs 3s B. 14r S.)

$$PC^2 + PB^2 = 2PQ^2 + 2QC^2;$$

eben so in dem Dreyecke BAC,

$$AC^2 + AB^2 = 2AQ^2 + 2QC^2.$$

Man ziehe die erste Gleichung von der zweyten ab, und erwäge, daſs in den Dreyecken APC und APB, weil sie beide in P rechtwinklig sind, $AC^2 - PC^2 = AP^2$ und $AB^2 - PB^2 = AP^2$ ist, so erhält man

$$AP^2 + AP^2 = 2AQ^2 - 2PQ^2.$$

Also, wenn man beiderseits die Hälfte nimmt,

$$AP^2 = AQ^2 - PQ^2;$$

folglich ist das Dreyeck APQ in P rechtwinklig (3s B. 13r S.), und mithin AP auf PQ senkrecht *).

Erster Zusatz. Das Perpendikel AP ist kürzer als jede schräge Linie AQ; folglich ist das Perpendikel das wahre Maafs der Entfernung eines Puncts A von der Ebene PQ.

Zweyter Zusatz. In einem gegebenen Puncte einer Ebene P kann man auf dieselbe nur ein Perpendikel ziehen; denn gesetzt, es könnten zwey Perpendikel gezogen werden, so lege man eine Ebene durch beide. Der Durchschnitt dieser Ebene mit der Ebene MN sey PQ, so würden die beiden Perpendikel in einem und demselben Puncte und in einer und derselben Ebene auf PQ senkrecht seyn, welches unmöglich ist.

Eben so unmöglich ist es, aus einem, aufser der Ebene gegebenen Puncte, zwey Perpendikel auf die Ebene zu ziehen; denn wären AP und AQ diese Perpendikel, so würde das Dreyeck APQ zwey rechte Winkel APQ und AQP haben, welches unmöglich ist.

Fünfter Satz.

Lehrsatz.

Schräge Linien die sich gleich weit von einer, auf einer Ebene senkrechten, graden Linie entfernen, sind gleich lang, und von zwey schrägen Linien, die sich vom Perpendikel ungleich weit entfernen, ist die entfernteste die längste.

*) Der schöne Beweis, welchen Euclid für diesen Satz giebt (4ter Satz im 11ten Buche der Elemente), scheint einfacher und elementarer als der obige, weil er nur auf die Lehre von der Gleichheit der Dreyecke gegründet ist.

A. d. Uebers.

Fig. 184. Denn da die Winkel APB, APC, APD rechte sind, so haben die Dreyecke APB, APC, APD, wenn man die Entfernungen PB, PC, PD einander gleich setzt, einen gleichen Winkel zwischen gleichen Seiten, und sind folglich gleich. Mithin sind die Hypothenusen, das heifst, die schrägen Linien AB, AC, AD, einander gleich. Desgleichen, wenn die Entfernung PE gröfser ist als PD, oder die gleiche PB, so ist die schräge Linie AE länger als AB, oder die gleiche AD.

Zusatz. Alle gleiche schräge Linien AB, AC, AD etc. endigen sich in einen Kreisumfang BCD, dessen Mittelpunct der Fufs des Perpendikels P ist. Wäre also ein Punct A aufserhalb einer Ebene gegeben und man verlangte auf der Ebene den Punct P, in welchen ein Perpendikel aus A fällt, so nehme man auf der Ebene drey Puncte B, C, D in gleicher Entfernung vom Puncte A, und suche den Mittelpunct eines Kreises, der durch diese drey Puncte geht. Dieser Mittelpunct ist der gesuchte Punct P.

Anmerkung. Der Winkel ABP ist das, was man die Neigung der schrägen Linie AB gegen die Ebene MN nennt. Man sieht, dafs die Neigung aller schrägen Linien AB, AC, AD, die sich gleich weit vom Perpendikel entfernen, die nämliche ist; denn alle die Dreyecke ABP, ACP, ADP etc. sind einander gleich.

Sechster Satz.

Lehrsatz.

Fig. 185. *AP sey ein Perpendikel auf der Ebene MN und BC eine Linie in der Ebene. Fällt man aus dem Puncte P des Perpendikels, PD senkrecht auf BC und zieht AD, so behaupte ich, dafs AD auf BC senkrecht ist.*

Man nehme DB = DC und ziehe PB, PC, AB und AC. Weil DB = DC, so ist die schräge Linie PB = PC,

und in Rücksicht auf das Perpendikel AP ist die schräge Linie AB = AC, weil PB = PC (5r S.). Folglich sind die beiden Puncte A und D der Linie AD, gleich weit von den Enden B und C entfernt, und folglich ist AD, in der Mitte von BC, auf BC senkrecht.

Zusatz. Man sieht auch, dafs BC auf der Ebene APD senkrecht ist, weil BC auf den beiden graden Linien AD und PD zugleich senkrecht steht.

Anmerkung. Die beiden Linien AE und BC geben ein Beyspiel zweyer Linien, welche sich nicht begegnen, weil sie nicht in einer Ebene liegen. Die kürzeste Entfernung dieser Linien ist die grade PD, die auf den beiden Linien AP und BC zugleich senkrecht ist, und zwar deshalb, weil, wenn man zwey andere Puncte wie A und B verbindet, AB > AD, AD > PD, also um so mehr AB > PD ist.

Die beiden Linien AE und CB, obgleich sie nicht in einer Ebene liegen, können so betrachtet werden, als machten sie mit einander einen rechten Winkel, wenn AD und eine mit BC durch irgend einen Punct von AD gezogene Parallele mit AD einen rechten Winkel machen. Eben so können die Linien AB und PD, welche zwey beliebige, nicht in einer und derselben Ebene liegende, grade Linien sind, so betrachtet werden, als machten sie mit einander den nämlichen Winkel, welcher zwischen einer Parallele von PD durch irgend einen Punct von AB gezogen, und AB liegt.

Siebenter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 186. *Wenn die Linie AP auf der Ebene MN senkrecht ist, so ist jede mit AP parallele Linie DE auf der nämlichen Ebene ebenfalls senkrecht.*

Man lege durch die Parallelen AP und DE eine Ebene, deren Durchschnitt mit der Ebene MN die Linie PD ist. In der Ebene MN ziehe man BC senkrecht auf PD und darauf AD.

Zufolge des Zusatzes zum vorhergehenden Lehrsatze ist BC auf der Ebene APDE senkrecht, also ist der Winkel BDE ein rechter. Aber auch der Winkel EDP ist ein rechter, weil AP auf PD senkrecht, und DE mit AP parallel ist; also ist die Linie DE auf den beiden Linien DP und DB senkrecht; folglich ist sie auch senkrecht auf ihrer Ebene MN.

Erster Zusatz. Wenn umgekehrt die graden Linien AP und DE auf der nämlichen Ebene MN senkrecht sind, so sind sie parallel; denn gesetzt sie wären es nicht, so ziehe man durch den Punct D eine Parallele mit AP. Diese Parallele wird auf der Ebene MN senkrecht seyn; also würde man durch den nämlichen Punct D auf die nämliche Ebene zwey Perpendikel ziehen können, welches unmöglich ist (4r S.).

Zweyter Zusatz. Zwey Linien A und B die mit einer dritten C parallel sind, sind mit einander parallel. Denn man stelle sich eine auf die Linie C senkrechte Ebene vor, so werden die Linien A und B, weil sie mit jener senkrechten Linie parallel sind, auf der nämlichen Ebene senkrecht stehen; folglich werden sie nach dem vorigen Zusatze unter einander parallel seyn.

Die drey Linien dürfen nicht in einer Ebene liegen, sonst wäre der Satz schon bekannt (1s B. 24r S.).

Achter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 187. *Wenn die Linie AB mit einer graden Linie CD parallel ist, die in der Ebene MN liegt, so ist sie mit dieser Ebene selbst parallel.*

Denn wenn die Linie AB, die in der Ebene ABCD liegt, die Ebene MN irgend wo erreichte, so könnte solches nicht anders als in irgend einem Puncte der Linie CD, dem Durchschnitte der beiden Ebenen geschehen. Aber AB kann CD nicht erreichen, weil diese beiden Linien parallel sind, also kann sie auch die Ebene MN nicht schneiden; folglich ist sie mit ihr parallel (2te Erkl.).

Neunter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 188. *Zwey Ebenen die auf einer und derselben graden Linie AB senkrecht stehen, sind mit einander parallel.*

Denn begegneten sie sich irgendwo, so sey O einer ihrer gemeinschaftlichen Puncte. Man ziehe OA und OB. Die auf der Ebene MN senkrechte Linie AB, ist auf der Linie OA senkrecht, welche in dieser Ebene durch den Fufs von OA geht. Aus demselben Grunde ist AB auf BO senkrecht. Also würden OA und OB zwey Perpendikel aus einem und demselben Puncte O auf die nämliche grade Linie seyn, welches unmöglich ist; folglich können sich die Ebenen MN und PQ nicht begegnen, mithin sind sie parallel.

Zehnter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 189. *Die Durchschnitte EF und GH zweyer parallelen Ebenen MN und PQ mit einer dritten Ebene FG sind parallel.*

Denn wären die Linien EF und GH, die in einer und derselben Ebene liegen nicht parallel, so müfsten sie, verlängert, sich schneiden. Also würden sich auch

die Ebenen MN und PQ, in welchen sie liegen, schneiden; folglich würden diese nicht parallel seyn.

Eilfter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 188. *Die auf der Ebene MN senkrechte Linie AB, ist zugleich auf der mit MN parallelen Ebene PQ senkrecht.*

Nachdem eine beliebige Linie BC in der Ebene PQ gezogen, lege man eine Ebene ABC durch AB und BC, deren Durchschnitt mit der Ebene MN die Linie AD ist. Diese Linie AD wird mit BC parallel seyn (10r S.). Aber die auf der Ebene MN senkrechte Linie AB, ist auf AD senkrecht; also wird sie auch auf der Parallele BC senkrecht seyn, und weil die Linie AB auf jeder Linie BC senkrecht ist, welche in der Ebene PQ durch den Fuſs von BC geht, so folgt daraus, daſs sie senkrecht auf der Ebene PQ ist.

Zwölfter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 189. *Die zwischen zwey parallelen Ebenen MN und PQ enthaltenen Theile paralleler Linien EG und FH sind gleich lang.*

Man lege eine Ebene EGHF durch die parallelen Linien EG und FH. Sie wird die parallelen Ebenen in EF und GH schneiden. Die Durchschnitte EF und GH sind unter einander parallel (10r S.), eben so EG und FH; folglich ist die Figur EGHF ein Parallelogramm, also ist EG = FH.

Zusatz. Daraus folgt, *daſs zwey parallele Ebenen überall gleich weit von einander entfernt sind;* denn wenn EG und FH auf den beiden Ebenen MN und PQ senk-

recht sind, so sind sie mit einander parallel (7r S.), und folglich gleich.

Dreyzehnter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 190. *Wenn zwey Winkel CAE und DBF, die nicht in einerley Ebene liegen, parallele Schenkel haben nach einerley Seite hin, so sind die Winkel gleich und ihre Ebenen parallel.*

Man mache AC = BD, AE = BF und ziehe CE, DF, AB, CD, EF. Weil AC und BD gleich und parallel sind, so ist die Figur ABDC ein Parallelogramm (1s B. 31r S.). Also sind CD und AB gleich und parallel. Aus demselben Grunde sind EF und AB gleich und parallel; also sind auch CD und EF gleich und parallel, und die Figur CEFD ist ein Parallelogramm; folglich sind die Seiten CE und DF gleich; mithin sind die Dreyecke CAE und DBF unter einander gleichseitig; folglich ist der Winkel CAE = DBF.

Zweytens behaupte ich, dafs die Ebenen ACE und BDF parallel sind; denn gesetzt die mit BDF parallele Ebene, durch den Punct A gelegt, schnitte die Linien CD und EF in andern Puncten als C und E, zum Beyspiel in G und H, so würden nach dem zwölften Satze die drey Linien AB, GD und FH gleich lang seyn. Aber die drey Linien AB, CD, EF sind gleich lang; also würde CD = GD und FH = EF seyn, welches ungereimt ist; folglich sind die Ebenen ACE und BDF parallel.

Zusatz. Wenn zwey parallele Ebenen MN und PQ von zwey andern Ebenen CABD und EABF geschnitten werden, so sind die zwischen den Durchschnitten mit den parallelen Ebenen liegenden Winkel CAE und DBF gleich. Denn der Durchschnitt AC

ist mit BD parallel (10r S.), und AE mit BF; also ist der Winkel CAE gleich dem Winkel DBF.

Vierzehnter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 190. *Wenn drey grade Linien AB, CD und EF, die nicht in einer Ebene liegen, gleich und parallel sind, so sind die Dreyecke ACE und BDF, welche entstehen, wenn man die Endpuncte der Linien verbindet, gleich und die Ebenen dieser Dreyecke parallel.*

Denn weil AB und CD gleich und parallel sind, so ist die Figur ABDC ein Parallelogramm; folglich sind die Seiten AC und BD gleich und parallel. Aus demselben Grunde sind die Seiten AE und BF gleich und parallel, desgleichen CE und DF; folglich sind die beiden Dreyecke ACE und BDF gleich. Uebrigens wird wie beim vorigen Satze bewiesen, daſs die Ebenen der Dreyecke parallel sind.

Funfzehnter Satz.

Lehrsatz.

Zwey grade Linien werden von drey parallelen Ebenen allemal in gleichem Verhältnisse geschnitten.

Fig. 191. Gesetzt die Linie AB schnitte die parallelen Ebenen MN, PQ, RS in A, E, B, die Linie CD aber schnitte sie in C, F, D, so behaupte ich, daſs

$$AE : EB = CF : FD$$

ist.

Man ziehe AD, welche die Ebene PQ in G schneidet, desgleichen AC, EG, GF, BD, so sind die Durchschnitte EG und BD der parallelen Ebenen PQ und RS mit der Ebene ABD parallel (10r S.); folglich ist AE : EB = AG : GD; eben so ist, weil die Durchschnitte AC und GF parallel sind, AG : GD = CF : FD;

also ist wegen des gemeinschaftlichen Verhältnisses AG : GD, AE : EB = CF : FD.

Sechszehnter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 192. *ABCD sey ein beliebiges Viereck, entweder ganz in einer Ebene oder nicht. Schneidet man die gegenüberliegenden Seiten mittelst zweyer graden Linien EF und GH in gleichem Verhältnisse, so daſs AE : EB = DF : FC, und BG : GC = AH : HD, so behaupte ich, daſs sich EF und GH in irgend einem Puncte M dergestalt schneiden werden, daſs HM : MG = AE : EB und EM : MF = AH : HD.*

Man lege durch AD irgend eine Ebene AbHcD, welche aber nicht durch GH geht; aus den Puncten E, B, C, F ziehe man mit GH die Parallelen Ee, Bb, Cc, Ff, welche jene Ebene in e, b, c, f schneiden. Wegen der Parallelen Bb, GH, Cc ist bH : Hc = BG : GC = AH : HD (3r B. 15r S.); also sind die Dreyecke AHb und DHc ähnlich (3s B. 20r S.). Ferner ist Ae : eb = AE : EB und Df : fc = DF : FC; also ist Ae : eb = Df : fc, oder, componendo, Ae : Df = Ab : Dc. Aber wegen der ähnlichen Dreyecke AHb und DHc ist Ab : Dc = AH : HD; also ist Ae : Df = AH : HD. Nun sind aber wegen der ähnlichen Dreyecke AHb und cHD, die Winkel HAe und HDf gleich; folglich sind die Dreyecke AHe und DHf ähnlich (3s B. 20r S.), mithin ist der Winkel AHe = DHf. Daraus folgt, daſs eHf eine grade Linie ist, und daſs also die drey Parallelen Ee, GH und Ff in einer und der nämlichen Ebene liegen, welche Ebene EF und GH enthält. *Also müssen sich EF und GH in irgend einem Puncte M schneiden.* Darauf erhält man wegen der Parallelen Ee, MH und Ff, die Proportion EM : MF = eH : Hf = AH : HD.

Auf dieselbe Art läfst sich beweisen, dafs HM : MG = AE : EB *).

Siebzehnter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 193. *Der Winkel zwischen zwey Ebenen MAN und MAP, kann nach der obigen Erklärung durch den Winkel NAP zwischen zwey in den beiden Ebenen liegenden und auf ihren Durchschnitten AM senkrecht gezogenen Linien AN und AP gemessen werden.*

Um zu beweisen dafs dieser Winkel ein Maafs der Neigung der Ebenen ist, mufs

Erstlich gezeigt werden, dafs der Winkel der nämliche bleibe, nach welchem Puncte des Durchschnitts man auch die Perpendikel ziehet.

Nimmt man irgend einen andern Punct M an, und zieht MC in der Ebene MN, und MB in der Ebene MP, auf den Durchschnitt AM senkrecht, so sind MB und AP, weil sie auf einer und derselben Linie AM senkrecht stehen, mit einander parallel. Aus demselben Grunde ist MC mit AN parallel, also ist der Winkel BMC = PAN (13r S.); folglich ist es gleichviel, ob man die Perpendikel durch den Punct M oder durch den Punct A zieht; der Winkel den sie einschliefsen, bleibt immer der nämliche.

Zweytens mufs gezeigt werden, dafs, wenn der Winkel zwischen den beiden Ebenen zu - oder abnimmt, auch der Winkel PAN in demselben Verhältnisse gröfser und kleiner wird.

*) Dieser merkwürdige Satz erläutert die Vorstellung von den sogenannten windschiefen Flächen, wenn sie von Vielecken begrenzt sind, welche nicht in einerley Ebene liegen. A. d. Uebers.

Man beschreibe in der Ebene PAN aus A mit einem beliebigen Halbmesser den Bogen NDP, aus M mit einem gleichen Halbmesser den Bogen CEB, und ziehe AD willkürlich. Die beiden Ebenen PAN und BMC, weil sie auf einer und derselben Linie MA senkrecht stehen, sind parallel (9r S.); also sind die Durchschnitte AD und ME dieser beiden Ebenen mit einer dritten AMD parallel; folglich sind die Winkel BME und PAD gleich (13r S.).

Wir wollen der Kürze wegen den Winkelraum zwischen zwey Ebenen MP und MN *Keil* (coin) nennen. Ist nun der Winkel DAP dem Winkel DAN gleich, so ist klar, dafs der Keil DAMP dem Keile DAMN gleich ist, denn die Grundfläche PAD würde genau die ihr gleiche Grundfläche DAN decken; die Höhe AM aber würde die nämliche seyn; also würden die beiden Keile ganz in einander fallen. Man sieht eben so, dafs wenn der Winkel DAP gewisse male genau in dem Winkel PAN enthalten wäre, der Keil DAMP sich eben so oft in dem Keile PAMN befinden würde. Nun ist man berechtigt von ganzen Zahlen auf beliebige Zahlen zu schliefsen, weil es in einem ähnlichen Falle geschah (2s B. 17r S.) *): also wird sich der Keil DAMP zu dem

*) Es dürfte, wie schon oben bemerkt, gut seyn, diese Berichtigung allgemein zu beweisen, um die Wiederholungen zu vermeiden. Der Satz, mit seinen Hülfssätzen und dem Beweise, könnte, glaube ich, wie folgt, ausgedrückt werden.

Erste Erklärung.

In der Voraussetzung dafs Brüche als ganze Zahlen von Einheiten betrachtet werden, die in der absoluten Einheit so oft enthalten sind, als die Nenner der Brüche absolute Einheiten in sich begreifen, umfafst die Benennung *Zahl* zugleich Brüche.

Keile PAMN allemal verhalten, wie der Winkel DAP zum Winkel PAN, welches auch das Verhältnifs dieser Winkel seyn mag. Also kann der Winkel NAP zum Maafse des Keils PAMN, oder des Winkels, welchen die Ebenen MAP und MAN mit einander machen, genommen werden.

Zweyte Erklärung.

Zahlen sind entweder *angebbar* oder *nicht angebbar*. Die nicht angebbaren existiren aber gleich den angebbaren. Sie können blos nicht ausgedrückt werden. Man kann sich ihnen nur so weit nähern als man will. Sie haben, weil sie existiren, mit den angebbaren alle übrigen Eigenschaften gemein. Nicht angebbare Zahlen sind z. B. irrationale Zahlen.

Dritte Erklärung.

Gröfsen sind *einerley Art*, wenn sie sich von einander durch Nichts unterscheiden als durch die Zahl, welche anzeigt, wie oft die eine Gröfse genommen werden mufs, um die andere zu geben, z. B. wenn $b = ma$ und m eine Zahl ist, so sind b und a Gröfsen einerley Art.

Vierte Erklärung.

Gröfsen verschiedener Art, z. B. Bogen und Winkel, Linien und Flächen, sollen *zusammengehörig* heifsen, wenn sie die Eigenschaft haben, dafs sie immer *zugleich* zu- oder abnehmen, niemals die Gröfse der einen Art zunimmt, wenn die Gröfse der andern Art abnimmt, und umgekehrt.

Lehrsatz.

Wenn von zwey zusammengehörigen Gröfsen verschiedener Art a und A bewiesen werden kann, dafs, sobald die eine a in ihr mfaches $b = ma$ übergeht, die andern ebenfalls zu ihrem mfachen $B = mA$ wird, und zwar für jede mögliche, jedoch angebbare Zahl m, so findet das Gleiche auch für jede nicht angebbare Zahl, also ganz allgemein für jede mögliche Zahl Statt.

Beweis. Es wird behauptet dafs $B = mA$ ist, wenn $b = ma$, auch wenn m nicht angegeben werden kann. Leugnet man solches, so behauptet man gegentheils, dafs nicht $B = mA$ ist für $b = ma$, dafs also B entweder grö-

Anmerkung. Es verhält sich mit Winkeln zwischen Ebenen, wie mit Winkeln zwischen graden Linien. Wenn sich zwey Ebenen schneiden, so sind die an dem Durchschnitte einander gegenüberliegenden Winkel gleich; aneinander liegende Winkel aber betragen zusammen zwey rechte. Ferner, wenn eine Ebene auf

ſser oder kleiner ist als mA, z. B. gröſser, also vielleicht = B′ = (m + e) A, wo m + e irgend eine angebbare oder nicht angebbare Zahl ausdrückt, die gröſser ist als m. Nun läſst sich aber zeigen, daſs, was auch m und e seyn mögen, allemal eine *angebbare* Zahl n möglich ist, die zwischen m und m + e liegt, das heiſst, die gröſser ist als m, und kleiner als m + e. Denn unstreitig ist eine angebbare Zahl n′ möglich, die kleiner ist als m, weil m, obgleich nicht angebbar, keinesweges die kleinste aller Zahlen, das heiſst, nicht = o seyn soll; eben so eine *angebbare* Zahl n″, die gröſser ist als m + e, weil m + e nicht die gröſste aller Zahlen, das heiſst, nicht unendlich groſs seyn sollen. Von jeder angebbaren Zahl, wie n′, bis zu einer gröſsern wie n″ kann man aber stufenweise, oder durch Zurechnung von Unterschieden gelangen. Da nun diese Unterschiede so klein angenommen werden können, als man will, also auch kleiner als e, weil e nicht die kleinste aller Zahlen, das heiſst nicht = o seyn soll, so muſs eine der verschiedenen angebbaren Zahlen, die zwischen n′ und n″ möglich sind, z. B. n, nothwendig zwischen m und m + e fallen. Denn von n′ bis nach n″ sollen die Zahlen m und m + e *beyde* überstiegen werden, welches mit beiden *zugleich* nicht möglich ist, sobald der Unterschied der zwischen n′ und n″ angenommenen Zahlen, kleiner ist, als der Unterschied von m und m + e, vielmehr kann nur die eine Zahl m zuerst allein überstiegen werden, woraus folgt, daſs diejenige Zahl n, welche m übersteigt, m + e aber nicht, nothwendig zwischen m und m + e liegen muſs.

Nun nehme man an, aus a werde b″ = na, so wird aus A B″ = nA, weil n eine *angebbare* Zahl, und nach der Voraussetzung, für alle mögliche *angebbare* Zahlen, dieser Um-

einer andern senkrecht steht, so ist auch die letzte auf der ersten senkrecht. Nicht minder finden beim Durchschnitte paralleler Ebenen mit einer dritten, eben die Vergleichungen und Eigenschaften Statt, die für den Durchschnitt paralleler Linien mit einer dritten gelten.

Achtzehnter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 194. *Wenn die Linie AP auf der Ebene MN senkrecht ist, so ist jede Ebene APB durch AP, auf der Ebene MN senkrecht.*

stand bewiesen ist. Oben wurde aber angenommen dafs A in B' = (m + e) A übergehe, wenn a in b = ma übergeht, also wäre, wenn man b nach b'' gehen läfst, in welchem Fall das zu b gehörige B' nach dem zu b'' gehörigen B'' geht, B' = (m + e) A in B'' = nA übergegangen, während b = ma in b'' = na überging. Dieses aber ist unmöglich, weil (m + e) A > nA, und hingegen ma < na, so dafs B abgenommen haben müfste während b zunahm, gegen die Voraussetzung der Eigenschaft *zusammengehöriger Gröfsen*. Also kann B nicht gröfser seyn als mA, wenn b = ma ist.

Eben so wird bewiesen, dafs B nicht kleiner seyn kann als mA, wenn b = ma ist.

Daraus folgt, dafs allemal, auch für nicht angebbare Zahlen m, also ganz allgemein für jede mögliche Zahl, immer zugleich B = mA und b = ma sind, sobald bewiesen werden kann, dafs solches der Fall ist für jede *angebbare* Zahl m.

Nachdem auf diese Weise der Satz allgemein bewiesen worden, nämlich, dafs das, was für angebbare Zahlen gezeigt worden, zugleich für nicht angebbare gilt, ist keine Wiederholung mehr nöthig, sondern man kann eine Behauptung die für angebbare Zahlen bewiesen worden, sogleich auf nicht angebbare ausdehnen. Die Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren u. s. w. wird dadurch erleichtert und abgekürzt. A. d. Uebers.

BC sey der Durchschnitt der Ebenen AB und MN. Zieht man in der Ebene MN die Linie DE auf BP senkrecht, so wird die Linie AP, weil sie auf der Ebene MN senkrecht ist, auf jede der beiden graden Linien BC und DE senkrecht seyn. Aber der Winkel APD zwischen den beiden Perpendikeln PA und PD, an den gemeinschaftlichen Durchschnitt BP liegend, mifst den Winkel zwischen den beiden Ebenen AB und MN; folglich sind diese beiden Ebenen, weil jener Winkel ein rechter ist, auf einander senkrecht (5te Erkl.).

Anmerkung. Wenn drey grade Linien wie AP, BP, DP auf einander senkrecht stehen, so ist jede von ihnen auf der Ebene durch die beiden andern senkrecht, und die drey Ebenen sind auf einander senkrecht.

Neunzehnter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 194. *Wenn die Ebene AB auf der Ebene MN senkrecht ist, und man zieht in der Ebene AB die Linie PA senkrecht auf den Durchschnitt PB der beiden Ebenen; so behaupte ich, dafs PA auf der Ebene MN senkrecht steht.*

Denn wenn man in der Ebene MN, PD auf PB senkrecht zieht, so ist der Winkel APD ein rechter, weil die Ebenen auf einander senkrecht sind; folglich ist die Linie AP auf den beiden Linien PB und PD senkrecht, mithin ist sie auf die durch beide gehende Ebene MN senkrecht.

Zusatz. Wenn die Ebene AB auf die Ebene MN senkrecht ist, und man zieht durch einen Punct P des Durchschnitts der Ebenen eine Linie auf die Ebene MN senkrecht, so behaupte ich, dafs diese senkrechte Linie in der Ebene AB liegt; denn wäre es nicht so, so könnte man in der Ebene AB noch eine Linie AP auf den Durchschnitt BP senkrecht ziehen, welche ebenfalls auf

der Ebene MN senkrecht stände; folglich gäbe es im nämlichen Puncte zwey Perpendikel auf die Ebene MN, welches unmöglich ist (4r S.).

Zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

Fig. 194. *Wenn zwey Ebenen AB und AD auf einer dritten Ebene MN senkrecht sind, so ist ihr Durchschnitt AP auf dieser dritten Ebene senkrecht.*

Denn wenn man durch den Punct P ein Perpendikel auf die Ebene MN zieht, so mufs solches in den beiden Ebenen AB und AD zugleich liegen (Zusatz zum 19ten S.); also in ihrem Durchschnitte AP.

Ein und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

Fig. 195. *Wenn ein Körperwinkel durch drey Ebenenwinkel gebildet wird, so ist die Summe beliebiger zwey von den Ebenenwinkeln gröfser als der dritte.*

Der Satz ist nur für den Fall zu beweisen nöthig, wenn der Ebenenwinkel, welchen man gegen die Summe der beiden andern vergleicht, gröfser ist als jeder der letztern. Der Köperwinkel S werde also von den drey Ebenenwinkeln ASB, ASC und BSC umschlossen, und man setze, der Winkel ASB sey der gröfste von den dreyen; so behaupte ich, dafs ASB $<$ ASC $+$ BSC.

Man mache in der Ebene ASB den Winkel BSD $=$ BSC, und ziehe die grade Linie ADB willkürlich; desgleichen ziehe man AC und BC, nachdem SC $=$ SD gemacht worden.

Die beiden Seiten BS und SD sind den beiden Seiten BS und SC gleich, auch ist der Winkel BSD $=$ BSC; also sind die beiden Dreyecke BSD und BSC gleich; folglich ist BD $=$ DC. Es ist aber AB $<$ AC $+$ BC;

zieht man auf der einen Seite BD, und auf der andern die gleiche BC ab, so bleibt AD < AC. Die beiden Seiten AS und SD sind den beiden Seiten AS und SC gleich; die dritte Seite AD aber ist kleiner als die dritte AC; also ist der Winkel ASD < ASC (1s B. 10r S.). Thut man BSD = BSC hinzu, so erhält man ASD + BSD, oder ASB < ASC + BSC.

Zwey und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

Die Summe der Ebenenwinkel welche einen Körperwinkel einschließsen; ist immer kleiner als vier rechte.

Fig. 196. Man durchschneide den Körperwinkel S mit einer beliebigen Ebene ABCDE. Von einem Puncte O in dieser Ebene ziehe man nach allen Winkeln die Linien OA, OB, OC, OD, OE.

Die Summe der sämmtlichen Winkel in den um den Scheitel S gebildeten Dreyecken ASB, BSC etc., ist der Summe der sämmtlichen Winkel einer gleichen Zahl von Dreyecken AOB, BOC etc. gleich, die um den Punct O liegen. Aber im Puncte B machen die Winkel ABO und OBC zusammen den Winkel ABC aus, der kleiner ist als die Summe der Winkel ABS und SBC (21r S.). Eben so ist im Puncte C, BCO + OCD < BCS + SCD u. s. w., für alle Winkel des Vielecks ABCDE. Daraus folgt, dafs in den Dreyecken, deren Scheitel O ist, die Summe der Winkel an den Grundlinien kleiner ist als die Summe der Winkel an den Grundlinien in den Dreyecken, deren Scheitel in S liegt; folglich ist gegentheils die Summe der Winkel um den Punct O gröfser als die Summe der Winkel um den Punct S. Aber die Summe der Winkel um den Punct O ist vier rechten gleich (1s B. 5r S.); also ist die Summe

der Winkel die den Körperwinkel S umgeben, kleiner als vier rechte.

Anmerkung. Bey diesem Beweise wird vorausgesetzt, daſs der Körperwinkel erhöht (convexe) ist, das heiſst, daſs die Ebene einer beliebigen Seitenfläche, verlängert, nicht den Köperwinkel schneiden kann. Wäre es anders, so würde die Summe der Ebenenwinkel keine Grenzen haben, sondern so groſs seyn können als man will.

Drey und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwey Körperwinkel, jeder von drey Ebenwinkeln gebildet werden, welche einzeln einander gleich sind, so machen die Ebenen in welchen die gleichen Winkel liegen, mit einander gleiche Winkel.

Fig. 197. Der Winkel ASC sey dem Winkel DTF, der Winkel ASB dem Winkel DTE und der Winkel BSC dem Winkel ETF gleich, so behaupte ich, daſs die beiden Ebenen ASC und ASB mit einander eben den Winkel machen, wie die Ebenen DTF und DFE.

Man gebe SB eine willkürliche Länge, und ziehe BO senkrecht auf die Ebene ASC; aus dem Puncte O, wo das Perpendikel BO die Ebene schneidet, ziehe man OA und OC auf SA und SC senkrecht; ferner ziehe man AB und BC. Nun mache man TE = SB, und ziehe EP senkrecht auf die Ebene DTF; vom Puncte P ziehe man PD und PF auf TD und TF senkrecht; endlich ziehe man DE und EF.

Das Dreyeck SAB ist in A, und das Dreyeck TDE in D rechtwinklig (61. S.), und weil der Winkel ASB = DTE, so ist auch SBA = TED. Andrerseits ist SB = TE, also ist das Dreyeck SAB dem Dreyecke TDE gleich, und folglich SA = TD und AB = DE.

Eben so wird bewiesen, dafs SC = TF und BC = EF. Demnach ist das Viereck SA OC dem Vierecke TD PF gleich; denn legt man den Winkel ASC auf den gleichen Winkel DTF, so fällt der Punct A in D, und der Punct C in F, weil SA = TD und SC = TF. Zugleich fällt die auf SA senkrechte AO auf die auf TD senkrechte DP, und eben so OC auf PF; also fällt der Punct O in den Punct P, und es ist AO = DP. Aber die Dreyecke AOB und DPE sind in O und P rechtwinklig, die Hypothenuse AB ist gleich DE, und die Seite AO = DP, also sind diese Dreyecke gleich (1s B. 18r S.); folglich ist der Winkel OAB = PDE. Der Winkel OAB aber ist die Neigung der beiden Ebenen ASB und ASC, der Winkel PDE ist die Neigung der beiden Ebenen DTE und DTF, also sind diese Neigungen einander gleich.

Es ist zu bemerken, dafs der Winkel A des rechtwinkligen Dreyecks OAB, eigentlich nur dann die Neigung der beiden Ebenen ASB und ASC misfet, wenn das Perpendikel BO in Rücksicht auf SA mit SC an einer Seite fällt; fiele es auf die andere Seite, so würde der Winkel zwischen den beiden Ebenen stumpf seyn, und mit dem Winkel A des Dreyecks OAB zusammen zwey rechte ausmachen. Aber in diesem Falle wäre der Winkel der beiden Ebenen TDE und TDF ebenfalls stumpf, und würde mit dem Winkel D des Dreyecks DPE auch zusammen zwey rechte ausmachen; also wird, weil der Winkel A immer dem Winkel D gleich ist, die Neigung der beiden Ebenen ASB und ASC ebenfalls immer der Neigung der beiden Ebenen TDE und TDF gleich seyn.

Anmerkung. Wenn Körperwinkel aus den nämlichen Ebenenwinkeln zusammen gesetzt sind, und zugleich die nämlichen oder gleichliegenden Winkel, in

den Körperwinkeln *in einerley Art auf einander folgen* (*soient disposés de la même maniere*), so sind die Körperwinkel gleich, und fallen in einander gelegt, ganz zusammen. In der That ist schon gezeigt worden, dafs das Viereck SAOC auf das gleiche Viereck TDPF gelegt werden kann. Legt man also SA auf TD so fällt SC auf TF, und der Punct O in den Punct P. Aber wegen der Gleichheit der Dreyecke AOB und DPE, ist die auf die Ebene ASC senkrechte Linie OB der auf die Ebene TDF senkrechten PE gleich. Da nun auch diese Perpendikel nach einerley Seite hin liegen, so fällt der Punct B in den Punct E, die Linie SB auf TE und die beiden Körperwinkel fallen gänzlich in einander.

Dieses Ineinanderfallen findet aber nur dann Statt, wenn man annimmt, dafs die gleichen Ebenenwinkel *in einerley Art auf einander folgen.* Denn *folgten sie in umgekehrter Ordnung auf einander*, oder was das nämliche ist, lägen die Perpendikel OB und PE gegen die Ebenen ASC und DTF, statt an der nämlichen Seite, an entgegengesetzten Seiten; so wäre es unmöglich, die beiden Körperwinkel in einander fallen zu machen. Gleichwohl hätten, zufolge des Lehrsatzes, die Ebenen, in welchen die gleichen Winkel liegen, gleiche Neigung gegen einander; also wären eben so wohl die Körperwinkel in allen ihren Bestimmungsstücken einander vollkommen gleich, obschon sie sich nicht decken *).

Es ist gut, diese Art von Gleichheit, welche keine absolute, oder kein Decken ist, durch eine besondere Benennung zu unterscheiden. Wir wollen sie: *Symmetrische Gleichheit* (*egalité par Symmetrie*) nennen.

*) Es folgt daraus, dafs die Gleichheit der Winkel zwischen den Kanten und zwischen den Ebenen nicht zur absoluten Gleichheit der Körperwinkel hinreicht.

A. d. Uebers.

Es sollen also zwey Körperwinkel, welche von drey Ebenenwinkeln gebildet werden, die zwar einzeln einander gleich sind, aber in umgekehrter Ordnung auf einander folgen, *symmetrisch gleiche*, oder blos *symmetrische Körperwinkel* heifsen.

Dieselbe Bemerkung pafst auf Körperwinkel, welche von mehr als drey Ebenenwinkeln umschlossen werden. Es können in einem Körperwinkel, der von den Ebenenwinkeln A, B, C, D, E gebildet wird, und in einem andern, der die nämlichen Winkel hat, aber in umgekehrter Ordnung A, E, D, C, B, die Ebenen in welchen die nämlichen Winkel liegen, gegen einander gleiche Neigung haben. Diese beiden Körperwinkel, welche gleich sind, ohne sich zu decken, sollen *symmetrisch gleiche*, oder *symmetrische* Körperwinkel heifsen.

Bey Figuren in der Ebene giebt es keine besondre symmetrische Gleichheit, und alle Figuren, die man symmetrisch gleich nennen könnte, sind absolut gleich, und decken sich. Dies kommt daher, weil man eine ebene Figur umkehren und ohne Etwas zu verändern, was unten war oben legen kann, und umgekehrt. Anders ist es mit Körpern, wo die dritte Abmessung in zwey verschiedenen Richtungen genommen werden kann *).

Vier und zwanzigster Satz.

Aufgabe.

Aus drey gegebenen Ebenenwinkeln, welche einen Körperwinkel bilden, durch die Zeichnung in der Ebene den

*) Die sorgfältige Behandlung der Lehre von den symmetrischen Figuren im Raume, ist einer der Vorzüge des Legendrischen Lehrbuches der Geometrie.

A. d. Uebers.

Winkel zu finden, welchen zwey jener Ebenen mit einander machen.

Fig. 198. S sey der gegebene Körperwinkel dessen drey Ebenenwinkel ASB, ASC und BSC bekannt sind; man verlangt die Winkel welche zwey dieser drey Ebenen mit einander machen, z. B. die Ebenen ASB und ASC.

Man stelle sich dieselbe Figur vor, wie beym vorigen Lehrsatz, so ist OAB der verlangte Winkel. Dieser Winkel soll also durch eine Zeichnung in der Ebene gefunden werden.

Zu diesem Ende mache man auf der Ebene die Winkel B'SA, ASC und B''SC den Winkeln BSA, ASC und BSC des Körpers gleich; ferner B'S und B''S jedes gleich BS am Körper; aus den Puncten B' und B'' ziehe man B'A und B''C auf SA und SC senkrecht, welche sich in irgend einem Puncte O schneiden werden. Aus dem Puncte O beschreibe man mit dem Halbmesser AB' den Halbkreis BbE. Darauf ziehe man Ob auf OB'E senkrecht, welche den Kreisumfang in b schneidet, und endlich Ab, so ist EAb die gesuchte Neigung der beiden Ebenen ASC und ASB.

Es kommt nur darauf an, zu zeigen, dafs das Dreyeck AOb in der Ebene, dem Dreyecke AOB am Körper gleich sey. Die beiden Dreyecke B'SA und BSA sind in A rechtwinklig; die Winkel in S sind gleich; also sind die Winkel in B und B' ebenfalls gleich. Aber die Hypothenuse SB' ist der Hypothenuse SB gleich. Folglich sind diese Dreyecke gleich; mithin ist SA in der ebenen Figur der SA am Körper gleich; eben so ist AB', oder die gleiche Linie Ab in der ebenen Figur der AB am Körper gleich. Auf gleiche Art wird bewiesen, dafs SC hier und dort gleich ist, woraus folgt, dafs das Viereck SAOC, und folglich AO in beiden Figuren

gleich ist; folglich haben die rechtwinkligen Dreyecke AOb und AOB in den beiden Figuren gleiche Hypothenuse und eine gleiche Seite; mithin sind sie gleich, und der durch die Zeichnung auf der Ebene gefundene Winkel EAb ist gleich der Neigung der beiden Ebenen SAB und SAC am Körper.

Fällt der Punct O zwischen A und B′ in der ebenen Figur, so ist der Winkel EAb stumpf. Er mifst aber immer die wahre Neigung der Ebenen. Es ist die gesuchte Neigung durch EAb und nicht durch OAb bezeichnet worden, damit die Auflösung für alle Fälle ohne Ausnahmen passe.

Anmerkung. Es läfst sich fragen, ob sich nicht immer mit drey beliebigen Winkeln ein Körperwinkel beschreiben lasse? Zuerst mufs die Summe der drey gegebenen Winkel kleiner als vier rechte seyn, weil sonst der Körperwinkel nicht beschrieben werden kann (22r S.). Dann mufs, wenn man zwey beliebige Winkel B′SA und ASC nimmt, der dritte CSB″ von der Art seyn, dafs das Perpendikel B″C auf die Seite SC den Durchmesser B′E zwischen seinen Enden B′ und E schneidet. Der Winkel CSB″ wird also dadurch begrenzt, dafs das Perpendikel B″C zwischen B′ und E durchgehen mufs. Man ziehe aus B′ und E auf CS die Perpendikel B′I und EK, welche den mit dem Halbmesser SB″ beschriebenen Kreisumfang in I und K schneiden, so sind CSI und CSK die Grenzen des Winkels CSB″.

Da nun in dem gleichschenkligen Dreyeck B′SI die Linie CS verlängert auf der Grundlinie B′I senkrecht steht, so ist der Winkel CSI = CSB″ = ASC + ASB′. Und weil in dem gleichschenkligen Dreyecke ESK die Linie SC auf EK senkrecht ist, so ist der Winkel CSK = CSE. Ferner ist wegen der gleichen Dreyecke

ASE und ASB′, der Winkel ASE = ASB′; also ist CSE, oder CSK = ASC − ASB′.

Daraus folgt, daſs die Aufgabe möglich ist, sobald der dritte Winkel CSB″ kleiner ist als die Summe der beiden andern ASC und ASB′, und gröſser als ihr Unterschied, welche Bedingung auch aus dem ein und zwanzigsten Lehrsatze folgt, weil zufolge dieses Lehrsatzes CSB″ $<$ ASC + ASB′ und ASC $<$ CSB″ + ASB′, oder CSB″ $>$ ASC − ASB′ seyn muſs.

Fünf und zwanzigster Satz.

Aufgabe.

Aus zweyen von den drey Ebenenwinkeln die einen Körperwinkel bilden, und dem Winkel, welche ihre Ebenen einschlieſsen, den dritten Ebenenwinkel zu finden.

Fig. 198. Die beiden gegebenen Ebenenwinkel sollen ASB′ und ASC seyn. Man nehme einstweilen an, daſs CSB″ der dritte Winkel sey, welchen man sucht; so ist, wenn man dieselbe Zeichnung macht, wie in der vorigen Aufgabe, der von den Ebenen der beiden ersten Winkel eingeschlossene Winkel gleich EAb. Aber eben so wie man den Winkel EAb aus CSB″ finden kann, wenn die beiden übrigen gegeben sind, so läſst sich auch CSB″ aus EAb finden, welches also die Aufgabe auflöset.

Man nehme SB′ willkürlich an, und ziehe auf SA das unbestimmte Perpendikel B′E; dann mache man den Winkel EAb gleich dem gegebenen Winkel zwischen den beiden Ebenen. Aus dem Puncte b, wo der Schenkel Ab den aus A mit dem Halbmesser AB″ beschriebenen Kreisumfang schneidet, ziehe man auf AE das Perpendikel bO, und aus dem Puncte O auf SC das unbestimmte Perpendikel OCB″. Dieses schneide man

in B″ so ab, daſs SB″ = SB′ ist, so ist CSB″ der gesuchte dritte Ebenenwinkel.

Denn wenn man einen Körperwinkel mit den drey Ebenenwinkeln B′SA, ASC und CSB″ beschreibt, so ist die Neigung der Ebenen, in welchen die gegebenen Winkel ASB′ und ASC liegen, dem gegebenen Winkel EAb gleich *).

Fig. 199. *Anmerkung.* Wenn ein Körperwinkel *vierseitig (quadruple)*, oder von vier Ebenenwinkeln ASB, BSC, CSD und DSA umschlossen ist, so sind diese vier Winkel zur Bestimmung der gegenseitigen Neigung der Ebenen, in welchen die Winkel liegen, nicht mehr hinreichend; denn mit den nämlichen Winkeln können unzählige verschiedene Körperwinkel beschrieben werden. Kommt aber noch eine Bedingung hinzu, z. B. die Neigung zweyer Ebenen ASB und BSC, so ist der Körperwinkel vollkommen bestimmt, und man kann die Neigung zwey beliebiger Ebenen finden. Man stelle sich nämlich einen *dreyseitigen (triple)* Körperwinkel mit den Ebenen ASB, BSC, ASC vor, so sind die beiden ersten Winkel gegeben, desgleichen die Neigung ihrer Ebenen. Also würde man durch die vorige Aufgabe den dritten Winkel ASC finden können. Darauf sind also in dem dreyseitigen Körperwinkel auf den Ebenenwinkeln ASC, ASD und DSC, diese drey Winkel bekannt; also ist dieser dreyseitige Körperwinkel bestimmt. Aber der vierseitige Körperwinkel ist aus den beiden beschriebenen dreyseitigen Körperwinkeln zusammengesetzt; also ist derselbe bestimmt, weil es dreyseitige sind.

*) Meines Erachtens gehören diese beiden Aufgaben aus der Zeichenkunst, namentlich aus der beschreibenden Geometrie (geometrie descriptive) nicht hieher.

A. d. Uebers.

Der Winkel zwischen den beiden Ebenen ASD und DSC würde sich unmittelbar vermittelst des zweyten dreyseitigen Körperwinkels finden lassen. Um den Winkel zwischen den beiden Ebenen BSC und CSD zu finden, müſste man in dem einen partiellen Körperwinkel den Winkel zwischen den beiden Ebenen ASC und DSC, und in dem andern, den Winkel zwischen den beiden Ebenen ASC und BSC suchen. Die Summe dieser beiden Winkel wäre der Winkel zwischen den Ebenen BSC und DSC.

Man sieht leicht, daſs bey einem fünfseitigen Körperwinkel auſser den fünf Ebenenwinkeln die ihn umschliessen, zwey Neigungen der umschliessenden Ebenen gegeben seyn müssen; bey einem sechsseitigen Körperwinkel drey solcher Neigungen u. s. w. *).

*) Ueberhaupt dürfen allemal von sämmtlichen Bestimmungsstücken eines Körperwinkels, das heiſst, von sämmtlichen Winkeln zwischen den Kanten- und Seiten-Ebenen, nur drey fehlen, welche drey Stücke aber nicht blos drey Winkel zwischen den Ebenen, sondern auch drey Winkel zwischen den Kanten, oder zwey Winkel von der einen, und ein Winkel von der andern Art seyn können. Da die fehlenden Winkel, wenn sie einerley Art sind, auch nicht nothwendig zusammen, oder wenn sie verschiedener Art sind, an einander liegen dürfen, so entstehen daraus eine Menge von Fällen und Aufgaben. Diese Aufgaben haben Aehnlichkeit mit den gleichen Aufgaben bey Vielecken in der Ebene. Bey diesen Figuren in der Ebene heissen die Aufgaben auch *polygonometrische*, bey den Figuren im Raume, oder den Körperwinkeln, *polyedrometrische*.

A. d. Uebers.

Sechstes Buch.

Die Polyeder.

Erklärungen.

I. Man nennt *polyederische Körper*, oder blos *Polyeder*, jeden von Ebenen begrenzten Körper (die begrenzenden Ebenen sind wiederum nothwendig von graden Linien begrenzt *). Insbesondere nennt man einen Köper mit vier Seitenebenen *Tetraëder;* mit sechs, *Hexaëder;* mit acht, *Octaëder;* mit zwölf *Dodecaäder;* mit zwanzig, *Icosaäder* u. s. w.

Das Tetraëder ist das einfachste Polyeder; denn um einen Körperwinkel zu bilden, sind wenigstens drey Ebenen nöthig, welche eine Oeffnung lassen, die zu verschliessen eine vierte Ebene nöthig ist.

II. Der Durchschnitt zweyer an einander stossenden Ebenen eines Polyeders heifst *Seite* oder *Kante* (arête) des Polyeders.

III. Jedes Polyeder, dessen Ebenen sämmtlich regelmäfsige und einander gleiche Vielecke, und dessen Körperwinkel sämmtlich einander gleich sind, heifst, *regelmäfsiges Polyeder,* oder auch, *regulärer Körper.* Dergleichen regelmäfsiger Körper giebt es fünf. (Man sehe den Anhang zum sechsten und siebenten Buche.)

IV. Das *Prisma* ist ein Körper, welchen mehrere parallelogrammatische Ebenen umschliessen, die sich

*) Nämlich, weil die Durchschnitte von Ebenen grade Linien sind. A. d. Uebers.

an beiden Seiten in zwey gleiche und parallele Vielecke endigen.

Fig. 200. Um diesen Körper zu construiren, sey ABCDE irgend ein Vieleck. Zieht man in einer mit ABC parallelen Ebene, die Linien FG, GH, HI etc. parallel mit den Seiten AB, BC, CD etc. und ihnen gleich, so dafs ein Vieleck FGHIK entsteht, welches dem Vielecke ABCDE gleich ist; verbindet man darauf von einer Ebene zur andern die ähnlich liegenden Winkelscheitel mittelst gerader Linien AF, BG, CH u. s. w., so sind die Ebenen ABGF, BCHG etc. Parallelogramme, und der entstandene Körper ABCDEFGHIK ist ein Prisma.

V. Die parallelen Ebenen ABCDE und FGHIK heissen *Grundflächen* des Prisma, die übrigen parallelogrammatischen Ebenen zusammen genommen, machen die *Seitenfläche*, oder *ausspringende* (convexe) Fläche des Prisma aus. Die graden Linien AF, BG, HI etc. heissen *Kanten* des Prisma.

VI. Die *Höhe eines Prisma* ist die Entfernung seiner Grundflächen von einander, oder das Perpendikel aus irgend einem Puncte der oberen Grundfläche auf die untere.

VII. Ein *Prisma* heifst *senkrecht,* wenn die Kanten AF, BG u. s. w. senkrecht auf den Grundflächen stehen; jede der Kanten ist dann der Höhe des Prisma gleich. In jedem andern Falle ist das Prisma *schief* und die Höhe ist kleiner als die Länge der Kante.

VIII. Ein Prisma heifst *drey-, vier-, fünf-, sechsseitig* etc., je nachdem die Grundflächen *Drey-, Vier-, Fünf-, Sechsecke* etc. sind.

Fig. 206. IX. Die Seitenebenen eines Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind, sind sämmt-

lich parallelogrammatisch. Ein solches Prisma heifst *Parallelopipedum.*

Das *Parallelopipedum* heifst rechtwinklig wenn alle Seitenebenen, Rechtecke sind.

X. Unter den rechtwinkligen Parallelopipeden ist der *Cubus* oder *Würfel,* welcher also das regelmäfsige Hexaëder ist, zu bemerken. Seine Seitenebenen sind sechs gleiche Quadrate.

Fig. 196. XI. Die *Pyramide* entsteht, wenn sich mehrere dreyeckige Ebenen in einem und demselben Puncte S schneiden, und die in ihnen, dem Puncte S gegenüberstehenden verschiedenen Seiten in einer und derselben vieleckigen Ebene ABCDE liegen.

Das Vieleck ABCDE heifst *Grundfläche* der Pyramide, der Punct S, *Spitze* und die Dreyecke ASB, BSC etc. zusammengenommen bilden die *Seitenfläche* oder *ausspringende Fläche* der Pyramide.

XII. Die *Höhe* der Pyramide ist das Perpendikel aus der Spitze auf die Ebene der Grundfläche; verlängert, wenn es nöthig ist.

XIII. Die Pyramide heifst *drey- vierseitig* etc., je nachdem die Grundfläche ein *Dreyeck,* ein *Viereck* ist u. s. w.

XIV. Eine Pyramide ist *regelmäfsig,* wenn die Grundfläche zu den regelmäfsigen Vielecken gehört, und zugleich das Perpendikel aus der Spitze auf die Ebene der Grundfläche, durch den Mittelpunct derselben geht: dieses Perpendikel heifst alsdann *Axe der Pyramide.*

XV. Die grade Linie welche die Scheitel zweyer nicht auf einander folgenden Körperwinkel eines Polyeders mit einander verbindet, heifst *Diagonal des Polyeders.*

XVI. *Symmetrische Polyeder* werde ich zwey solche nennen, die eine gemeinschaftliche Grundfläche haben und auf gleiche Weise zusammengesetzt sind, das eine über, das andere unter der Grundfläche, und zwar so, dafs die Scheitel der ähnlich liegenden Körperwinkel von der Ebene der Grundfläche gleich weit entfernt sind, und in einerley Perpendikel auf diese Ebene liegen.

Fig. 202. Wenn z. B. die grade Linie ST auf der Ebene ABC senkrecht ist, und sie wird im Puncte O, wo sie die Ebene schneidet, halbirt, so sind die Pyramiden SABC und TABC, welche die gemeinschaftliche Grundfläche ABC haben, zwey symmetrische Polyeder.

XVII. Zwey *dreyeckige Pyramiden* sind *ähnlich*, wenn zwey ihrer Seitenebenen einzeln ähnlich sind, ähnlich liegen, und gegen einander gleiche Neigung haben.

Fig. 203. Also sind die Pyramiden SABC und TDEF ähnlich, wenn die Winkel ABC = DEF, BAC = EDF, ABS = DET, BAS = EDT sind, und wenn ausserdem die Neigung der Ebenen ABS und ABC gleich ist der Neigung der ähnlich liegenden Ebenen DTE und DEF.

XVIII. Wenn man ein Dreyeck durch drey beliebige Winkelscheitel eines Polyeders legt, die sich in einer und derselben Ebene befinden, so kann man sich vorstellen, dafs die Scheitel der verschiedenen andern Körperwinkel des Polyeders, welche ausser der Ebene der Grundfläche liegen, die Spitzen eben so vieler dreyeckiger Pyramiden sind, die zur gemeinschaftlichen Grundfläche das vorhin bezeichnete Dreyeck haben. Jede dieser Pyramiden bestimmt die Lage des zugehörigen Körperwinkels gegen die Grundfläche.

Demnach sind zwey *Polyeder ähnlich*, wenn sie gleiche Grundflächen haben, und die Scheitel der ähnlich liegenden Körperwinkel ausserhalb der Grundfläche, einzeln durch ähnliche dreyeckige Pyramiden bestimmt werden.

XIX. Ich werde die Scheitel der verschiedenen Körperwinkel eines Polyeders *Scheitel (Sommets) des Polyeders* nennen.

Anmerkung. Alle Polyeder, welche hier betrachtet werden sollen, haben ausspringende Winkel, oder sind *convex*. So heissen nämlich diejenigen Körper, deren äussere Fläche von einer graden Linie in nicht mehr als zwey geschnitten werden kann. In diesen Polyedern kann keine Seitenebene verlängert den Körper schneiden; also kann auch das Polyeder nicht zum Theil über und zum Theil unter der Ebene einer beliebigen von seinen Seiten liegen. Es liegt ganz an der nämlichen Seite einer solchen Ebene.

Erster Satz.

Lehrsatz.

Zwey Polyeder können nicht einerley und gleich viel Scheitel haben, ohne ganz in einander zu fallen.

Denn man setze, eins der beyden Polyeder sey gegeben, so müfsten, wenn man ein anderes mit dem nämlichen und eben so vielen Scheiteln construiren könnte, dessen Ebenen nothwendig nicht alle mit denen des ersten durch die nämlichen Puncte gehen, denn sonst würden die beiden Polyeder nicht mehr von einander verschieden seyn. Dann aber würden offenbar einige der neuen Ebenen das erste Polyeder schneiden; es würden also einige Scheitel über und andere unter diesen Ebenen liegen, welches bey einem convexen Polyeder nicht möglich ist: folglich müssen zwey Polyeder,

wenn sie die nämlichen und gleich viel Scheitel haben, nothwendig ganz in einander fallen.

Anmerkung. Wenn die Puncte A, B, C, K etc., welche die Scheitel eines Polyeders seyn sollen, gegeben sind, so ist es leicht, das Polyeder zu beschreiben.

Fig. 204. Man wähle zuerst drey benachbarte Puncte D, E, H von der Art, dafs die Ebene DEH, vielleicht noch durch andere Puncte K, C geht, alle übrige Puncte aber an einer Seite liegen, entweder über oder unter der Ebene; so wird diese Ebene DEH, oder DEHKC eine Ebene des Polyeders seyn. Durch eine Seite dieser Ebene, z. B. EH lege man eine Ebene und drehe dieselbe, bis sie einen neuen Punct F trifft, oder mehrere, wie F, I zugleich, so ist diese Ebene eine neue Ebene FEH des Polyeders FEHI. Man fahre fort, Ebenen durch die gefundenen Seiten zu legen, bis der Körper ganz umschlossen ist, so wird dieser Körper das verlangte Polyeder seyn; denn zwey verschiedene Polyeder mit den nämlichen Scheiteln sind nicht möglich.

Zweyter Satz.

Lehrsatz.

In zwey symmetrischen Polyedern sind ähnlich liegende Kanten einzeln gleich, und die Neigung zweyer zusammenstofsenden Ebenen in dem einen Körper ist der Neigung der ähnlich liegenden Ebenen in dem andern gleich.

Fig. 205. ABCDE sey die gemeinschaftliche Grundfläche der beiden Polyeder; m und n sollen die Scheitel zwey beliebiger Körperwinkel des einen Polyeders seyn, M′ und N′ die ähnlich liegenden Scheitel des andern, so müssen, der Erklärung zufolge die geraden Linien Mm und Nn′ auf der Ebene ABC senkrecht seyn, und in den Puncten m und n, wo sie die Ebene schneiden, von dieser Ebene halbirt werden. Nun behaupte ich, dafs die Entfernungen mn und m′n′ gleich sind.

Denn dreht man das Trapez $mM'N'n$ um mn, bis seine Ebene auf $mMNn$ fällt, so wird die Seite mM', wegen der rechten Winkel in m und n, auf die ihr gleiche mM und nN wird auf nN fallen; folglich werden die Trapeze in einander fallen, und es wird $MN = M'N'$ seyn.

P sey ein dritter Scheitel des obern Polyeders, und P' der ähnlich liegende im untern, so ist eben so $MP = M'P'$ und $NP = N'P'$; folglich ist das Dreyeck MNP durch drey beliebige Scheitel des obern Polyeders, dem Dreyecke $M'N'P'$ durch die drey ähnlich liegenden Scheitel des untern gleich.

Betrachtet man nun auf diese Weise zuerst alle Dreyecke auf der Oberfläche der Polyeder, so folgt schon, daſs die Oberflächen der beiden Polyeder aus einer gleichen Zahl von gleichen Dreyecken zusammen gesetzt sind.

Nun behaupte ich, daſs wenn Dreyecke aus der einen Oberfläche in einer und derselben Ebene liegen, und also eine und dieselbe vieleckige Seitenebene des Polyeders bilden, daſs sich dann die ähnlich liegenden Dreyecke des andern Polyeders ebenfalls in einer und derselben Ebene befinden, und eine gleiche Seitenebene des andern Polyeders geben.

In der That sollen MPN und NPQ zwey an einander grenzende Dreyecke seyn, die in einer und derselben Ebene liegen, $M'P'N'$, und $N'P'Q'$ aber die ähnlich liegenden; so ist der Winkel $MNP = M'N'P'$, der Winkel $PNQ = P'N'Q'$, und wenn man MQ und $M'Q'$ zöge, so würde das Dreyeck MNQ dem Dreyecke $M'N'Q'$ gleich seyn; also würde auch seyn $MNQ = M'N'Q'$. Aber weil $MPNQ$ nur eine Ebene ist, so ist der Winkel $MNQ = MNP + PNQ$; also ist auch $M'N'Q' = M'N'P' + P'N'Q'$. Wären aber die drey Ebenen $M'N'P'$, $P'N'Q'$

und M'N'Q' nicht eine einzige, so würden sie einen Körperwinkel bilden, und in diesem wäre M'N'Q' < M'N'P' + P'N'Q' (5s B. 20r S.). Da nun diese Bedingung nicht Statt findet, so liegen die beiden Dreyecke M'N'P' und P'N'Q' in einer und derselben Ebene.

Daraus folgt, dafs jede, sowohl dreyeckige als vieleckige Seitenebene des eines Polyeders der ähnlich liegenden Seitenebene des andern gleich ist, und dafs also die beiden Polygone von einer gleichen Zahl, einzeln gleicher Seitenebenen, umschlossen sind.

Nun ist noch übrig zu zeigen, dafs die Neigung zwey beliebiger an einander stofsender Seitenebenen in dem einen Polyeder der Neigung der ähnlich liegenden Seitenebenen in dem andern gleich ist.

Es sollen MPN und NPQ zwey Dreyecke seyn, die an einer und derselben Kante NP in den Ebenen zweyer an einander stofsenden Seitenflächen liegen; M'P'N' und N'P'Q' die ähnlich liegenden Dreyecke im andern Polyeder; so kann man sich in N einen von drey ebenen Winkeln MNQ, MNP und PNQ, und in N' einen von den drey ebenen Winkeln M'N'Q', M'N'P' und P'N'Q' gebildeten Körperwinkel vorstellen. Nun ist schon bewiesen, dafs diese ebenen Winkel gleich sind, also ist die Neigung zweyer Ebenen MNP und PNQ der Neigung der ähnlich liegenden Ebenen M'N'P' und P'N'Q' gleich (5s B. 22r S.).

Folglich sind in symmetrischen Polyedern die Kanten einzeln gleich, und die Ebenen zweyer beliebigen an einander liegenden Seitenflächen des einen Körpers machen unter einander den nämlichen Winkel, wie die Ebenen der ähnlich liegenden Seitenflächen des andern Körpers.

Anmerkung. Es ist zu bemerken, *dafs die Körperwinkel des einen Polyeders mit denen des andern symmetrisch sind;* denn wenn der Körperwinkel N durch die Ebenen MNP, PNQ, QNR etc. gebildet würde, so wird der ähnlich liegende Körperwinkel N′ durch die Ebenen M′N′P, P′N′Q′, Q′N′R′ etc. gebildet. Diese scheinen zwar eben so auf einander zu folgen, wie die andern; allein weil die beiden Körperwinkel gegen einander umgekehrt liegen, so folgt, dafs die winkliche Lage der Ebenen, welche den Körperwinkel N′ bilden, die umgekehrte von der Lage der Ebenen ist, welche den ähnlich liegenden Körperwinkel N bilden. Aufserdem sind die Neigungen der aufeinander folgenden Ebenen in beiden Körpern gleich, folglich sind die Körperwinkel unter einander symmetrisch. (Man sehe die Anmerkung zum 20n Satz im 5n Buche).

Aus der vorigen Bemerkung folgt, *dafs zu jedem Polyeder nur ein Polyeder symmetrisch ist.* Denn construirt man über die Grundfläche ein neues symmetrisches Polyeder zu dem gegebenen, so würden seine Körperwinkel und die des gegebenen immer symmetrisch seyn; folglich würden sie denen des symmetrischen Polyeders über der ersten Grundfläche gleich seyn. Ferner würden die ähnlich liegenden Kanten immer gleich seyn. Also würden die beiden über diese und jene Grundfläche construirten beiden symmetrischen Polyeder gleiche Kanten und gleiche Körperwinkel haben; also würden sie sich decken, und nur ein und dafslbe Polyeder geben.

Dritter Satz.

Lehrsatz.

Zwey Prismen sind gleich, wenn einer von ihnen zwischen drey einzeln gleichen und ähnlich liegenden Ebenen eingeschlossene Körperwinkel in dem einen so grofs als in dem andern.

Fig. 200. Die Grundflächen ABCDE und abcde, die Parallelogramme ABGF und abgf, desgleichen BCHG und bchg sollen gleich seyn, so behaupte ich, dafs das Prisma ABCI dem Prisma abci gleich ist.

Denn man lege die Grundflächen ABCDE und abcde auf einander, so fallen sie, weil sie gleich sind, zusammen. Nun sind die drey ebenen Winkel, welche den Körperwinkel B einschliessen, denen, welche den Körperwinkel b einschliessen, gleich, nämlich ABC = abc, ABG = abg und GBC = gbc und liegen ähnlich, also sind die Körperwinkel B und b gleich; mithin fällt die Kante BG auf die gleiche Kante bg. Auch fällt wegen der gleichen Parallelogramme ABGF und abgf, der Schenkel GF auf den gleichen Schenkel gf, und eben so GH auf gh. Also fällt die obere Grundfläche FGHIK gänzlich in die gleiche Fläche fghik, und die beiden Körper fallen ganz in einander, weil sie die nämlichen Scheitel haben. (1r S.)

Zusatz. Zwey senkrechte Prismen mit gleichen Grundflächen und Höhen sind congruent. Denn wenn die Kanten AB und ab, und die Höhen BG und bg gleich sind, sind die Rechtecke ABGF und abgf gleich; eben so die Rechtecke BGHC und bghc; also sind die drey Ebenen, welche den Körperwinkel B einschliessen, denen, welche den Körperwinkel b einschliessen, gleich. Mithin sind die beiden Prismen gleich.

Vierter Satz.

Lehrsatz.

In jedem Parallelepipedum sind die einander gegenüberliegenden Ebenen gleich und parallel.

Fig. 206. Nach der Erklärung dieses Körpers sind die Grundflächen ABCD und EFGH gleiche Parallelogramme, und ihre Seiten parallel. Es darf also nur bewiesen werden, dafs es sich mit zwey gegenüberliegenden Seitenflächen AEHD und BFGC eben so verhält. Es ist AD = BC, weil die Figur ABCD ein Parallelogramm ist; aus eben dem Grunde sind AE und BF gleich und parallel; also sind die Winkel DAE und CBF gleich (5s B. 13r S.), und die Ebenen DAE und CBF parallel; also sind auch die Parallelogramme DAEH und CBFG gleich. Eben so wird bewiesen, dafs die gegenüberliegenden Parallelogramme ABFE und DCGH gleich und parallel sind.

Zusatz. Weil von den sechs Ebenen, die ein Parallelepipedum einschliessen, die gegenüberliegenden allemal gleich und parallel sind, so können jede Ebene und die ihr gegenüberliegende als Grundflächen des Parallelepipedums betrachtet werden.

Anmerkung. Wenn drey grade Linien AB, AE, AD gegeben sind, die durch einen und denselben Punct A gehen, und mit einander beliebige Winkel machen, so kann man mit denselben ein Parallelepipedum construiren; man darf nämlich nur durch den Endpunct jeder der drey Linien eine Ebene mit der Ebene der beiden andern Linien parallel legen, und zwar durch den Punct B eine Ebene mit DAE, durch D eine Ebene mit BAE, und durch E eine Ebene mit BAD parallel. Die Durchschnitte dieser Ebenen bilden das verlangte Parallelepipedum.

Fünfter Satz.

Lehrsatz.

In jedem Parallelepipedum sind die gegenüberliegenden Körperwinkel symmetrisch, und die Diagonalen, welche die Scheitel dieser Winkel verbinden, schneiden und halbiren sich.

Fig. 206. Wir wollen z. B. den Körperwinkel A mit dem ihn gegenüberliegenden G vergleichen; der dem Winkel EFB gleiche Winkel EAB ist auch gleich HGC, der Winkel DAE = DHE = CGF, und der Winkel DAB = DCB = HGF; folglich sind die drey ebenen Winkel, welche den Körperwinkel A umschliessen, denen die G einschliessen, gleich. Ihre gegenseitige Lage aber ist, wie leicht zu sehen, verschieden; also sind erstlich die Körperwinkel A und G symmetrisch (5s B. 13r S.).

Nun wollen wir uns zwey Diagonalen EC und AG durch gegenüberliegende Scheitel vorstellen. Weil AE und CG gleich und parallel sind, so ist die Figur AEGC ein Parallelogramm. Also schneiden und halbiren sich die Diagonalen. Eben so wird bewiesen, dafs sich die Diagonalen EC und DF schneiden und halbiren; also schneiden und halbiren sich die vier Diagonalen in einem und demselben Puncte, welchen man als den Mittelpunct des Parallelepipedums ansehen kann.

Sechster Satz.

Lehrsatz.

Fig. 207. *Die Ebene BDHF durch zwey einander gegenüberliegende parallele Kanten BF und DH des Parallelepipedums AG, theilt dasselbe in zwey symmetrische dreyseitige Prismen ABDHEF und GHFBCD.*

Erstlich sind diese beiden Körpertheile Prismen; denn die Dreyecke ABD und EFH sind gleich, weil sie gleiche und parallele Seiten haben; die Seitenflächen ABFE, ADHE und BDHF sind Parallelogramme. Also ist der Körper ABDHEF, ein Prisma. Eben so verhält es sich mit dem Körper GHFBCD. Ich behaupte nun, dafs diese beiden Prismen symmetrisch sind.

Man construire über der Grundfläche ABD ein mit dem Prisma ABDEFH symmetrisches Prisma ABDE'F'H'. Dem oben bewiesenen Satze zufolge (2r S.) sind die Ebenen ABF'E' und ABFE, ADH'E' und ADHE gleich; vergleicht man nun die Prismen GHFBCD und ABDH'E'F', so sind die Grundflächen GHF und ABD gleich; ferner die Parallelogramme ABF'E' und ABFE = GHDC, ADH'E' und ADHE = GFBC; also sind die drey Ebenen, welche den Körperwinkel G in dem Prisma GHFBCD umschliefsen, und die drey Ebenen, welche den Körperwinkel A in dem Prisma ABDH'E'F' umschliefsen, gleich und in ähnlicher Lage; folglich sind diese beiden Prismen gleich (3r S.), und können in einander gelegt werden. Aber das eine von ihnen ABDH'E'F', und das Prisma ABDHEF sind symmetrisch, also sind auch die andern GHFBCD und ABDHEF symmetrisch.

Siebenter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 201. *In jedem Prisma ABCI sind die Schnitte paralleler Ebenen, NOPQR und STVXY gleiche Vielecke.*

Denn die Seiten NO und ST sind parallel, weil sie die Durchschnitte einer Ebene ABGF mit zwey anderen parallelen Ebenen sind. Sie liegen ferner zwischen den Parallelen NS und OT, welche Kanten des Prisma sind. Also ist NO = ST. Aus gleichem Grunde sind die Sei-

ten OP, PQ, QR etc. in dem Schnitte NOPQR, einzeln den Seiten TV, VX, XY etc. in dem Schnitte STVXY gleich. Da nun die gleichen Seiten parallel sind, so folgt, dafs die Winkel NOP, OPQ des ersten Schnitts, einzeln den Winkeln STV, TVX etc. des andern gleich sind; folglich sind die beiden Schnitte NOPQR und STVXY gleiche Vielecke.

Zusatz. Jeder mit der Grundfläche eines Prisma parallele Schnitt defselben ist dieser Grundfläche gleich.

Achter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 208. *Die beiden dreyeckigen symmetrischen Prismen ABDHEF und BCDFGH, in welche sich das Parallelepipedum AG theilen läfst, sind gleichen Inhalts.*

Durch die Scheitel B und F lege man, senkrecht auf die Kante BF, die Ebenen Badc und Fehg, welche die drey andern Kanten AE, DH, CG des Parallelepipedums einerseits in a, d, c, andererseits in e, h, g schneiden, so sind die Ebenen Badc und Fehg gleiche Parallelogramme. Sie sind nämlich gleich, weil sie in Ebenen liegen, die auf einer und derselben graden Linie senkrecht stehen und folglich parallel sind (7r S.); sie sind Parallelogramme, weil zwey gegenüberliegende Seiten eines und defselben Schnitts aB, dc, die Durchschnitte zweyer parallelen Ebenen ABFE und DCGH mit einer und derselben Ebene sind.

Aus demselben Grunde sind auch BaeF und die andern Seitenflächen BFgc, cdhg, adhe des Körpers BadeFehg Parallelogramme; also ist dieser Körper ein Prisma (4te Erkl.), und zwar ein senkrechtes Prisma, weil die Kante BF senkrecht auf der Ebene der Grundfläche steht.

Theilt man nun das senkrechte Prisma Bh mittelst der Ebene BFHD in zwey dreyseitige senkrechte Prismen aBdeFh und BdcFhg, so behaupte ich, dafs das dreyseitige schiefe Prisma ABDEFH, und das dreyseitige grade Prisma aBdeFh gleichen Inhalts sind.

Denn weil diese beiden Prismen den Theil ABDheF gemeinschaftlich haben, so darf nur bewiesen werden, dafs die übrigen Theile, nämlich die Körper BaADd und FeEHh gleich grofs sind.

Weil ABFE und aBFe Parallelogramme sind, so sind die Seiten AE und ae, der mit ihnen parallelen Seite BF, und folglich einander gleich. Nimmt man also den gemeinschaftlichen Theil Ae hinweg, so bleibt Aa=Ee. Eben so wird bewiesen, dafs Dd=Hh.

Um nun die beiden Körper BaADd und FeEHh in einander zu legen, werde die Grundfläche Feh in die gleiche Fläche Bad gelegt; die Seiten eE und hH fallen dann in die gleichen Seiten aA und dD, weil sie auf der nämlichen Ebene Bad senkrecht sind, und der Punct e in a, der Punct h in d fällt. Also fallen diese beiden Körper ganz in einander; folglich ist das schiefe Prisma BADFEH dem senkrechten Prisma BadFeh an Inhalt gleich.

Eben so kann bewiesen werden, dafs das schiefe Prisma BDCFHG dem graden Prisma BdcFhg gleich ist. Aber die beiden graden Prismen BadFeh und BdcFhg sind einander gleich, weil sie die nämliche Höhe BF haben, und ihre Grundflächen Bad und Bdc die Hälften eines und defselben Parallelogramms sind (Zusatz zum 3n S.). Also sind die beiden dreyseitigen Prismen

BADFEH und BDCFHG, weil sie gleichen Inhalts mit gleichen Prismen sind, gleich groſs *).

Zusatz. Jedes dreyseitige Prisma ist die Hälfte eines Parallelepipedums AG, welches den nämlichen Körperwinkel A, und die nämlichen Kanten AB, AD, AE hat.

Neunter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 209. *Wenn zwey Parallelepipeden AG und AL eine ihrer Grundflächen ABCD gemeinschaftlich haben, ihre obern Grundflächen EFGH und IKLM aber in einer und derselben Ebene und zwischen den nämlichen Parallelen EK und HL liegen, so sind diese beide Parallelepipeden gleichen Inhalts.*

Es giebt drey verschiedene Fälle: nämlich, EI kann gröſser oder kleiner als EF, oder gleich EF seyn; der Beweis ist für alle drey derselbe. Ich behaupte zuerst, daſs das dreyseitige Prisma AEIDHM dem dreyseitigen Prisma BFKCGL gleich ist.

Weil AE mit BF und HE mit GF parallel ist, so ist der Winkel AEI = BFK, HEI = GFK und HEA = GFB. Von diesen sechs Winkeln umschlieſsen die drey ersten den Körperwinkel E, die drey andern den Körperwinkel F; da nun die umschlieſsenden ebenen Winkel einzeln gleich sind und ähnlich liegen, so folgt, daſs die Körperwinkel E und F gleich sind. Legt man nun das Prisma AEM in das Prisma BFL, und zwar die Grundfläche AEI in die Grundfläche BFK, so fallen diese Grundflächen, weil sie gleich sind, in einander,

*) Dieser Satz nebst seinem Beweise ist merkwürdig. Es beruhen darauf die Sätze von der Gleichheit der Prismen von gleicher Höhe und Grundebene, und von dem Inhalt der Pyramide. A. d. Uebers.

und die Seite EH fällt in die Seite FG, weil der Körperwinkel E dem Körperwinkel F gleich ist. Daraus folgt schon, dafs die beiden Prismen in ihrer ganzen Ausdehnung in einander fallen; denn die Grundfläche AEI und die Kante EH bestimmen das Prisma AEM, die Grundfläche BFK und die Kante FG das Prisma BFL (3r S.); folglich sind diese Prismen gleich.

Zieht man nun das Prisma AEM von dem Körper AL ab, so bleibt das Parallelepipedum AIL übrig; zieht man von dem nämlichen Körper AL das Prisma BFL ab, so bleibt das Parallelepipedum AEG übrig; folglich sind die beiden Parallelepipeden AIL und AEG gleich grofs.

Zehnter Satz.

Lehrsatz.

Zwey Parallelepipeden von gleicher Grundfläche und Höhe sind gleich grofs.

Fig. 210. ABCD sey die gemeinschaftliche Grundfläche der beiden Parallelepipeden AG und AL; weil sie gleiche Höhe haben, so liegen ihre oberen Grundflächen EFGH und IKLM in einer und derselben Ebene. Ferner sind die Seiten EF und AB gleich und parallel; eben so IK und AB, also sind EF und IK gleich und parallel; aus gleichem Grunde sind GF und LK gleich und parallel. Man verlängere die Seiten EF und HG, desgleichen LK und IM, bis sie sich schneiden und das Parallelogramm NOPQ bilden, so ist dieses Parallelogramm jeder der Grundflächen EFGH und IKLM gleich. Stellt man sich nun ein drittes Parallelepipedum vor, welches die nämliche untere Grundfläche ABCD, aber zur obern NOPQ hat, so ist dieses dritte Parallelepipedum so grofs als das Parallelepipedum AG (9r S.), denn beide haben einerley untere Grundfläche,

und die obern Grundflächen liegen in einer und derselben Ebene und zwischen den Parallelen GQ und FN. Aus demselben Grunde aber ist dieses dritte Parallelepidepum auch dem Parallelepipedo AL an Inhalt gleich; also sind die beiden Parallelepipeda AG und AL, welche einerley Grundfläche und Höhe haben, gleich grofs.

Eilfter Satz.

Lehrsatz.

Jedes Parallelepipedum kann in ein anderes rechteckiges Parallelepipedum von gleichem Inhalt verwandelt werden, welches mit ihm gleiche Höhe und gleich grofse Grundfläche hat.

Fig. 210. AG sey das gegebene Parallelepipedum. Aus den Puncten A, B, C, D ziehe man AI, BK, CL, DM auf die Ebene der Grundfläche senkrecht, so entsteht das Parallelepipedum AL, welches mit AG gleichen Inhalt hat, dessen Seitenflächen AK, BL etc. aber Rechtecke sind. Ist also die Grundfläche ABCD ein Rechteck, so ist AL das rechteckige Parallelepipedum, welches so grofs ist als das gegebene AG. Ist aber ABCD kein (Fig. 211.) Rechteck, so ziehe man AO und BN auf CD senkrecht, und OQ und NP senkrecht auf die Grundfläche, so entsteht der Körper ABNOIKPQ, welcher ein rechteckiges Parallelepipedum ist; denn nach der Construction ist die Grundfläche ABNO und die ihr gegenüber liegende IKPQ rechteckig; die Seitenflächen sind es ebenfalls, weil die Kanten AI, OQ etc. senkrecht auf der Grundfläche stehen; also ist der Körper AP ein rechteckiges Parallelepipedum. Aber die beiden Parallelepipeden AP und AL können betrachtet werden, als hätten sie gleiche Grundflächen ABKI, und gleiche Höhe AO; also sind sie gleich grofs; also ist das Paral-

lelepipedum AG, welches zunächst in ein gleich grofses Parallelepipedum AL verwandelt wurde, von neuem (Fig. 210 und 211) in ein gleich grofses rechteckiges Parallelepipedum AP verwandelt worden, welches dieselbe Höhe AI hat, und dessen Grundfläche ABNO so grofs ist als die Grundfläche ABCD.

Zwölfter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 212. *Rechteckige Parallelepipeden AG und AL von einerley Grundfläche ABCD, verhalten sich wie ihre Höhen AE und AI.*

Angenommen erstlich, dafs sich die Höhen AE und AI, wie zwey ganze Zahlen, z. B. wie 15 zu 8 verhalten, so theile man AE in 15 gleiche Theile, von welchen AI 8 enthalten wird, und ziehe durch die Theilungspuncte x, y, z etc., mit der Grundfläche parallele Ebenen. Diese Ebenen werden den Körper AG in 15 parallelepipedische Theile theilen, die einander gleich sind, weil sie gleiche Grundflächen und Höhen haben; denn die Grundflächen sind gleich, weil in einem Prisma jeder mit der Grundfläche ABCD parallele Schnitt, wie MIKL, dieser Grundfläche gleich ist (7r S.). Die Höhen sind gleich, weil sie die Theile Ax, xy, yz etc. selbst sind. Von den 15 gleichen Parallelepipeden sind aber 8 in AL enthalten; also verhält sich der Körper AG zum Körper AL wie 15 zu 8, oder überhaupt wie die Höhe AE zur Höhe AI.

Zweytens verhält sich, auch wenn das Verhältnifs von AE zu AI nicht in Zahlen ausgedrückt werden kann, dennoch Körp. AG : Körp. AL = AE : AI. Denn wäre es nicht so, so setze man, es sey Körp. AG : Körp. AL = AE : AO. Man theile AE in gleiche Theile, jeden kleiner als OI, so wird wenigstens ein

Theilungspunct M zwischen O und I fallen. Das Parallelepipedum, welches ABCD zur Grundfläche, und Am zur Höhe hat, sey P, so erhält man, weil sich die Höhen AE und Am wie zwey ganze Zahlen verhalten, Körp. AG : P = AE : Am. Aber nach der Voraussezzung ist Körp. AG : Körp. AL = AE : AO. woraus folgt Körp. AL : P = AO : Am. Nun ist AO gröfser als Am, also müfste, damit die Proportion Statt finde, der Körper AL gröfser als P seyn. Er ist aber im Gegentheil kleiner; also ist es unmöglich, dafs das vierte Glied der Proportion Körp. AG : Körp. AL = AE : x eine gröfsere Linie als AI ist. Eben so wird bewiesen, dafs das vierte Glied nicht kleiner als AI seyn kann; mithin ist es AI gleich; folglich verhalten sich rechtwinklige Parallelepipeden von einerley Grundfläche wie ihre Höhen *).

Dreyzehnter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 213. *Zwey rechteckige Parallelepipeden AG und AK von gleicher Höhe AE, verhalten sich wie ihre Grundflächen ABCD und AMNO.*

Nachdem man die beiden Körper wie es die Figur vorstellt, einen neben den andern gestellt hat, verlängere man die Ebene ONKL, bis sie die Ebene DCHG in PQ schneidet, so entsteht ein drittes Parallelepipedum AQ, welches man mit jedem der Parallelepipeden AG und AK vergleichen kann. Denn da die beiden Körper AG und AQ gleiche Grundfläche AEHD haben, so verhal-

*) Den zweyten Theil des Beweises kann man ersparen, wenn, wie eben allgemein gezeigt worden, dafs jeder Satz von zusammengehörigen Gröfsen von angebbaren auf nicht angebbare Zahlen ausgedehnt werden darf.

A. d. Uebers.

ten sie sich wie ihre Höhen AB und AO. Nicht minder verhalten sich die beiden Körper AQ und AK, weil sie gleiche Grundfläche AOLE haben wie ihre Höhen AD und AM; also hat man die beiden Proportionen

Körp. AG : Körp. AQ = AB : AO

Körp. AQ : Körp. AK = AD : AM.

Multiplicirt man diese Proportionen Glied um Glied, und läfst in dem Resultat den gemeinschaftlichen Multiplicator, Körp. AQ, weg, so erhält man

Körp. AG : Körp. AK = AB × AD : AO × AM.

Aber AB × AD drückt die Grundfläche ABCD und AO × OM die Grundfläche AMNO aus; also verhalten sich zwey rechteckige Parallelepipeden von gleicher Höhe, wie ihre Grundflächen.

Vierzehnter Satz.

Lehrsatz.

Rechteckige Parallelepipeden verhalten sich allgemein wie die Producte ihrer Grundflächen in die Höhen, oder wie die Producte ihrer drey Abmessungen.

Fig. 213. Denn, nachdem man die beiden Körper AG und AZ so gestellt hat, dafs ihre Oberflächen den gemeinschaftlichen Winkel BAE haben, verlängere man die nöthigen Ebenen, damit ein drittes Parallelepipedum AK entstehe, welches eben die Höhe hat wie AG, so erhält man, vermöge des vorigen Satzes:

Körp. AG : Körp. AK = ABCD : AMNO.

Es verhalten sich aber die beiden Parallelepipeden AK und AZ, welche die nämliche Grundfläche AMNO haben, wie ihre Höhen AE und AX; also ist

Körp. AK : Körp. AZ = AE : AX.

Man multiplicire diese beiden Proportionen mit einder Glied um Glied, und lasse in dem Resultat

den gemeinschaftlichen Multiplicator, Körp. AK weg, so kommt

$$\text{Körp. AG : Körp. AZ} = \text{ABCD} \times \text{AE : AMNO} \times \text{AX}.$$

Statt der Grundflächen ABCD und AMNO kann man aber setzen, $AB \times AD$ und $AO \times AM$; also erhält man

$$\text{Körp. AG : Körp. AZ} = AB \times AD \times AE : AO \times AM \times AX;$$

folglich verhalten sich zwey rechteckige Parallelepipeden etc.

Anmerkung. Hieraus folgt, dafs man zum Maafs eines rechteckigen Parallelepipedums das Product seiner Grundfläche in seine Höhe, oder das Product seiner drey Abmessungen annehmen kann. Nach diesem Princip läfst sich der Inhalt aller andern Körper messen.

Um dieses Maafs genau zu verstehen, mufs man sich erinnern, dafs unter Product zweyer oder mehrerer Linien das Product der Zahlen verstanden wird, welche diese Linien vorstellen, und dafs diese Zahlen von der Linien Einheit abhängen, welche willkürlich ist. Das Product der drey Abmessungen eines Parallelepipedums ist also eine Zahl, welche zwar an sich selbst nichts bedeutet, und welche sich verändern kann, je nachdem man eine andere Linien Einheit annimmt. Multiplicirt man aber noch die drey Abmessungen eines andern Parallelepipedums mit einander, indem man sie auf die nämliche Linien Einheit bezieht, so verhalten sich die beiden Producte wie die Körper, und die Vorstellung von der relativen Gröfse derselben wird deutlich.

Die Gröfse eines Körpers, sein Volumen oder seine Ausdehnung sind das, was man seinen *Inhalt* (solidité) nennt. Das Wort *Inhalt* wird insbesondere gebraucht um das *Maafs* eines Körpers zu bezeichen: so sagt man,

dafs der Inhalt eines rechteckigen Parallelepipedums gleich sey dem Product seiner Grundfläche in die Höhe, oder dem Product seiner drey Abmessungen.

Wenn die Seite eines Cubus 1 ist, so ist sein Inhalt, weil seine drey Abmessungen gleich sind, $1 \times 1 \times 1 = 1$. Ist die Seite 2 so ist der Inhalt $2 \times 2 \times 2$ oder 8, ist die Seite 3, so ist der Inhalt $3 \times 3 \times 3$ oder 27 u. s. w. Verhalten sich also die Seiten der Würfel wie 1, 2, 3 etc., so verhält sich der Inhalt derselben wie die Zahlen 1, 8, 27 etc. Daher nennt man auch in der Arithmetik ein Product von drey gleichen Factoren *Cubus*.

Verlangt man einen Cubus der den zweyfachen Inhalt eines gegebenen hat, so mufs sich die Seite des gesuchten Würfels zur Seite des gegebenen, wie die Cubicwurzel aus 2 zur Einheit verhalten. Die Quadratwurzel aus 2 kann man durch eine geometrische Construction leicht finden, nicht aber die Cubicwurzel, wenigstens nicht durch Operationen der Elementargeometrie, bey welchen nur grade Linien, von denen man zwey Puncte kennt und Kreisbogen, deren Mittelpuncte und Halbmesser gegeben sind, angewendet werden.

Wegen dieser Schwierigkeit ist die Aufgabe der *Verdoppelung des Würfels* bey den alten Geometern berühmt geworden, so wie die Aufgabe *von der Theilung eines Winkels in drey gleiche Theile*, welche ungefähr von der nämlichen Art ist. Indessen sind jetzt schon lange Auflösungen solcher Aufgaben bekannt, die, obgleich weniger einfach, als Constructionen der Elementargeometrie, diesen dennoch nichts an Genauigkeit und Strenge nachgeben.

Funfzehnter Satz.

Lehrsatz.

Der Inhalt eines Parallelepipedums und überhaupt eines beliebigen Prisma ist gleich dem Producte der Grundfläche in die Höhe.

Denn *erstlich* ist jedes Parallelepipedum an Inhalt gleich einem rechteckigen Parallelepipedo, von der nämlichen Höhe und gleich grofser Grundfläche (11r S.), und der Inhalt des letztern ist gleich dem Producte seiner Grundfläche in die Höhe; also ist der Inhalt des ersten ebenfalls gleich dem Producte der Grundfläche in die Höhe.

Zweytens ist jedes dreyseitige Prisma die Hälfte eines Parallelepipediums von der nämlichen Höhe und der doppelten Grundfläche (8r S). Der Inhalt des letztern aber ist gleich dem Producte seiner Grundfläche in die Höhe, also ist der Inhalt des dreyseitigen Prisma gleich dem Producte seiner Grundfläche, welche die Hälfte der Grundfläche des Parallelepipedums ausmacht, in seine Höhe.

Drittens. Jedes Prisma kann in so viel dreyseitige Prismen von der nämlichen Höhe getheilt werden, als die Zahl der Dreyecke, in welche sich die Grundfläche theilen läfst, Einheiten hat. Da nun der Inhalt jedes dreyseitigen Prisma gleich ist dem Producte der Grundfläche in die Höhe, die Höhe aber für alle die nämliche ist, so folgt, dafs die Summe aller partiellen Prismen gleich ist dem Producte der Summe aller Dreyecke, die ihnen zu Grundflächen dienen, in die gemeinschaftliche Höhe. Folglich ist der Inhalt eines beliebigen vielseitigen Prisma gleich dem Producte seiner Grundfläche in seine Höhe.

Zusatz. Wenn man zwey Prismen von gleicher Höhe vergleicht, so verhalten sich die Producte der Grundflächen in die Höhen wie die Grundflächen, *folglich verhalten sich zwey Prismen von gleicher Höhe wie die Grundflächen,* und aus demselben Grunde *Prismen von gleicher Grundfläche wie die Höhen.*

Sechszehnter Satz.

Lehnsatz.

Fig. 214. *Wenn eine Pyramide SABCDE von einer Ebene abd, parallel mit der Grundfläche geschnitten wird, so werden*

Erstlich die Seiten SA, SB, SC etc., und die Höhe SO in a, b, c etc., und o in gleichem Verhältniſs getheilt.

Zweytens ist der Schnitt abcde ein der Grundfläche ABCDE ähnliches Vieleck.

Denn *erstlich* sind die Schnitte AB, ab, der parallelen Ebenen ABC, abc, mit einer dritten Ebene SAB unter einander parallel (5s B. 10r S.); folglich sind die Dreyecke SAB und Sab ähnlich, und es verhält sich SA : Sa = SB : Sb. Eben so ist SB : Sb = SC : Sc u. s. w. Also werden alle Seiten SA, SB, SC etc. in gleichem Verhältniſs in a, b, c etc. geschnitten. Die Höhe SO wird in o im nämlichen Verhältniſs geschnitten; denn BO und bo sind parallel; folglich ist SO : So = SB : Sb.

Zweytens. Weil ab mit AB, bc mit BC, cd mit CD etc., parallel sind, so sind die Winkel abc = ABC, bcd = BCD u. s. w. Ferner ist wegen der ähnlichen Dreyecke SAB und Sab, AB : ab = SB : Sb, und wegen der ähnlichen Dreyecke SBC und Sbc, SB : Sb = BC : bc, also AB : ab = BC : bc. Eben so würde seyn BC : bc = CD : cd u. s. w. Folglich sind in den Vielecken ABCDE und abcde, die Winkel einzeln gleich

und ähnlich liegende Seiten proportional, mithin sind die Vielecke ähnlich.

Zusatz. SABCDE und SXYZ sollen zwey Pyramiden mit einer gemeinschaftlichen Spitze seyn, deren Höhen gleich sind, oder deren Grundflächen in einer und derselben Ebene liegen. Schneidet man diese Pyramiden mit einer den Grundflächen parallelen Ebene, so dafs die Schnitte abcde und xyz entstehen, so behaupte ich, dafs sich die Schnitte wie die Grundflächen ABCDE und XYZ verhalten.

Denn da die Vielecke ABCDE nnd abcde ähnlich sind, so verhält sich ihr Inhalt wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten AB und ab. Es ist aber AB : ab = SA : Sa; also ist ABCDE : abcde = $SA^2 : Sa^2$. Aus demselben Grunde ist XYZ : xyz = $SX^2 : Sx^2$. Da nun abcxyz nur eine und dieselbe Ebene ist, so ist auch SA : Sa = SX : Sx; folglich ist ABCDE : abcde = XYZ : xyz; also verhalten sich die Schnitte abcde und xyz, wie die Grundflächen ABCDE und XYZ.

Siebzehnter Satz.

Lehnsatz.

Fig. 215. *SABC sey eine dreyseitige Pyramide, S ihre Spitze, ABC ihre Grundfläche. Halbirt man die Kanten SA, SB, SC, AB, AC, BC, in D, E, F, G, H, I und zieht durch diese Puncte die Linien DE, EF, DF, EG, FH, EI, GI, GH, so behaupte ich, dafs man die Pyramide SABC als aus zwey, an Inhalt gleichen Prismen AGHFDE und EGICFH, und aus zwey gleichen Pyramiden, SDEF und EGBI zusammengesetzt, betrachten kann.*

Zufolge der Construction sind ED und BA, GE und AS parallel. Also ist die Figur ADEG ein Parallelogramm. Eben dies ist die Figur ADFH aus demselben Grunde; also sind die drey Linien AD, GE, HF gleich

und parallel; folglich ist der Körper AGHFDE ein Prisma (1s B. 5r S.).

Eben so wird bewiesen, daſs die beiden Figuren EFCI und CIGH Parallelogramme, und folglich die drey Linien EF, IC und GH gleich und parallel sind. Also ist auch der Körper EGICFH ein Prisma. Ich behaupte nun, daſs diese beiden dreyseitigen Prismen einander gleich sind.

Denn legt man über die Kanten GI, GE, GH das Parallelepipedum GX, so ist das dreyseitige Prisma GEICFH die Hälfte desselben; andrerseits ist das Prisma AGHFDE die Hälfte des Parallelepipedums GX (15r S.), weil beide gleiche Höhe haben, und das Dreyeck AGH, nämlich die Grundfläche des Prisma, die Hälfte des Parallelogramms GICH (2s B. 3r S.), der Grundfläche des Parallelepipedums, ist. Also sind die beiden Prismen EGICFH und AGHFDE gleich groſs. Zieht man diese beiden Prismen von der Pyramide SABC ab, so bleiben die beiden Pyramiden SDEF und EGBI übrig. Ich behaupte, daſs diese beiden Pyramiden einander gleich sind.

In der That ist wegen der gleichen Seiten BE = SE, BG = AG = DE, EG = AD = SD, das Dreyeck BEG gleich dem Dreyecke ESD. Aus demselben Grunde ist das Dreyeck BEI dem Dreyecke ESF gleich, die Neigung der beiden Ebenen BEG und BEI aber ist der Neigung der beiden Ebenen ESD und ESF gleich, weil BEG und ESD nur eine und dieselbe Ebene ausmachen, eben wie BEI und ESF. Legt man also, damit die Pyramiden SDEF und EGBI in einander fallen, das Dreyeck EBG auf das gleiche Dreyeck SDE, so fällt die Ebene BEI in die Ebene ESF; und da nun die Dreyecke EBI und SEF gleich sind und ähnlich liegen, so

fällt der Punct I in den Punct F, und die ganzen Pyramiden SDEF und EGBI fallen in einander.

Mithin ist die ganze Pyramide SABC aus den beiden dreyseitigen Prismen AGF und GIF, die gleich grofs sind, und aus den beiden gleichen Pyramiden SDEF und EGBI zusammen gesetzt.

Erster Zusatz. Man ziehe aus der Spitze S auf die Ebene ABC das Perpendikel SO, und P sey der Punct, wo dafselbe die mit ABC parallele Ebene DEF schneidet, so ist SP $= \frac{1}{2}$SO, weil SD $= \frac{1}{2}$SA ist (16r S.). Das Dreyeck DEF ist gleich $\frac{1}{4}$ABC. Mithin ist der Inhalt des Prisma AGHFDE $= \frac{1}{4}$ABC $\bowtie$ $\frac{1}{2}$SO, und der Inhalt der beiden Prismen AGHFDE und EGICFH, ist zusammen $= \frac{1}{4}$ABC $\bowtie$ SO. Diese beiden Prismen sind kleiner als die Pyramide SABC, weil sie darin enthalten sind; folglich ist der Inhalt einer dreyseitigen Pyramide gröfser als ein Viertel vom Producte ihrer Grundfläche in die Höhe.

Zweyter Zusatz. Zieht man die Linien DG und DH, so entsteht eine neue Pyramide ADGH, welche der Pyramide SDEF gleich ist; denn man kann die Grundfläche DEF auf die gleiche Fläche AGH legen: da alsdann die Winkel SDE und SDF den Winkeln DAG und DAH gleich sind, so ist klar, dafs DS auf AD (5s B. 25r S.) Anmerkung), und die Spitze S auf die Spitze D fällt. Aber die Pyramide ADGH ist kleiner als das Prisma AGHDEF, weil sie darin enthalten ist, also ist jede der Pyramiden SDEF und EGBI kleiner als das Prisma AGHDEF; folglich ist die Pyramide SABC, weil sie aus zwey Pyramiden und zwey Prismen zusammengesetzt ist, kleiner als vier dieser nämlichen Prismen. Der Inhalt eines dieser Prismen ist aber $= \frac{1}{8}$ABC $\bowtie$ SO und das vierfache davon $= \frac{1}{2}$ABC $\bowtie$ SO; also ist der

Inhalt der ganzen dreyseitigen Pyramide kleiner als die Hälfte vom Producte der Grundfläche in die Höhe.

Achtzehnter Satz.

Lehrsatz.

Der Inhalt einer dreyseitigen Pyramide ist gleich einem Drittheile des Products der Grundfläche in die Höhe.

Fig. 215. SABC sey eine beliebige dreyseitige Pyramide, ABC ihre Grundfläche, SO ihre Höhe, so behaupte ich, dafs der Inhalt der Pyramide SABC einem Drittheile des Products der Grundfläche ABC in die Höhe SO gleich ist, so dafs $SABC = \frac{1}{3} ABC \bowtie SO$, oder $= SO \bowtie \frac{1}{3} ABC$.

Denn wäre es anders, so müfste der Inhalt von SABC gleich dem Producte von SO entweder in eine gröfsere oder kleinere Fläche als $\frac{1}{3}$ ABC seyn.

Erstlich sey die Fläche gröfser, so dafs $SABC = SO \bowtie (\frac{1}{3} ABC + M)$. Macht man die nämliche Construction wie im vorigen Satze, so wird die Pyramide SABC in zwey gleich grofse Prismen AGHFDE und EGICFH, und in zwey gleiche Pyramiden SDFE und EGBI getheilt. Aber der Inhalt des Prisma AGHFDE ist $DEF \bowtie PO$, also ist der Inhalt der beiden Prismen $= DFE \bowtie 2PO$, oder $DFE \bowtie SO$. Zieht man diese beiden Prismen von der ganzen Pyramide ab, so ist der Rest gleich der doppelten Pyramide SDEF, also ist

$$2SDEF = SO \bowtie (\tfrac{1}{3} ABC + M - DEF);$$

aber weil SA gleich dem doppelten SD ist, so ist die Fläche ABC gleich dem vierfachen DFE (16r S.); folglich ist $\frac{1}{3} ABC - DFE = \frac{4}{3} DFE - DFE = \frac{1}{3} DFE$, also

$$2SDEF = SO \bowtie (\tfrac{1}{3} DEF + M);$$

und wenn man auf beiden Seiten die Hälfte nimmt

$$SDEF = SP \bowtie (\tfrac{1}{3} DEF + M).$$

Hieraus folgt, dafs, um den Inhalt der Pyramide SDEF zu finden, zu einem Drittheile der Grundfläche die nämliche Fläche M, die zu einem Drittheile der Grundfläche der grofsen Pyramide hinzu kam, addirt, und das Ganze mit der Höhe SP der kleinen Pyramide multiplicirt werden mufs.

Halbirt man SD in K, und legt durch K mit DEF die Ebene KLM parallel, so dafs sie in Q den Perpendikel SP schneidet, so läfst sich eben so beweisen, dafs der Inhalt der Pyramide SKLM gleich $SQ \bowtie (\frac{1}{3}KLM + M)$ ist.

Fährt man auf die Weise fort Pyramiden zu bilden, deren Seiten immer auf die Hälfte, und die Grundfläche auf dem vierten Theile abnehmen, so mufs man zuletzt zu einer Pyramide Sabc gelangen, deren Grundfläche abc kleiner als 6M ist; So sey die Höhe dieser Pyramide, so wird ihr Inhalt, dem Ausdrucke des Inhalts der vorigen Pyramiden zufolge, $SO \bowtie (\frac{1}{3}abc + M)$ seyn. Da nun $M > \frac{1}{6}abc$, so ist $\frac{1}{3}abc + M > \frac{1}{2}abc$; der Inhalt der Pyramide Sabc wäre also gröfser als $So \bowtie \frac{1}{3}abc$, welches ungereimt ist, weil im zweyten Zusatze des vorigen Satzes bewiesen worden, dafs der Inhalt der dreyseitigen Pyramide nothwendig kleiner als die Hälfte des Products der Grundfläche in die Höhe ist; also ist es erstlich unmöglich, dafs der Inhalt der Pyramide SABC gröfser ist als $SO \bowtie \frac{1}{3}ABC$.

Zweytens sey $SABC = SO \bowtie (\frac{1}{3}ABC - M)$ so läfst sich wie im ersten Falle beweisen, dafs der Inhalt der Pyramide SDEF, deren Abmessungen halb so grofs sind, gleich $SP \bowtie (\frac{1}{3}DEF - M)$ ist. Setzt man die Theilung der Pyramide in andere, deren Seiten immer halb so grofs sind, bis zu irgend einer, Sabc, fort, so erhält man auf eben diese Weise für den Inhalt der letzten Pyramide $Sabc = So\ (\frac{1}{3}abc - M)$. Da nun die

Grundflächen ABC, DEF, LKM abc eine abnehmende Reihe bilden, in welcher jedes Glied ein Viertheil des vorhergehenden ist, so wird man bald auf ein Glied kommen, welches gleich 12 M ist, oder welches zwischen 12 M und 3 M liegt. Weil also alsdann die Gröfse M gleich $\frac{1}{12}$abc, oder gröfser als $\frac{1}{12}$abc ist, so ist die Gröfse $\frac{1}{3}$abc — M gleich $\frac{1}{4}$abc, oder kleiner als $\frac{1}{4}$abc, folglich der Inhalt der Pyramide gleich SO $\bowtie$ $\frac{1}{4}$abc, oder kleiner als SO $\bowtie$ $\frac{1}{4}$abc. Dieses Resultat ist abermals ungereimt, weil nach dem ersten Zusatze des vorigen Satzes der Inhalt der dreyseitigen Pyramide nothwendig gröfser ist, als ein Viertheil des Products ihrer Grundfläche in die Höhe; folglich kann der Inhalt der Pyramide SABC, zweytens nicht kleiner als SO $\bowtie$ $\frac{1}{3}$ ABC seyn; mithin ist endlich der Inhalt der Pyramide SABC $\doteq$ SO $\bowtie$ $\frac{1}{3}$ ABC, oder = $\frac{1}{3}$ ABC $\bowtie$ SO, dem Lehrsatze gemäfs *).

Erster Zusatz. Jede dreyseitige Pyramide ist gleich einem Drittheile des dreyseitigen Prisma von der nämlichen Grundfläche und Höhe, denn ABC $\bowtie$ SO ist der Inhalt des Prisma, dessen Grundfläche ABC und dessen Höhe SO ist.

Zweyter Zusatz. Zwey dreiseitige Pyramiden von der nämlichen Höhe, verhalten sich wie ihre Grundflächen und zwey dreyseitige Pyramiden von der nämlichen Grundfläche wie ihre Höhen.

*) Dieser, dem euclidischen gewissermaafsen nachgebildete Beweis ist unstreitig sehr scharfsinnig. Jedoch glaube ich, läſst sich der Satz noch kürzer und elementarer, ja selbst direct beweisen. Mehrere hieher gehörige Bemerkungen, welche für eine Anmerkung zu weitläuftig seyn würden, werde ich im zweyten Bande meiner Sammlung mathematischer Abhandlungen aufnehmen, auf welche ich verweise. A. d. Uebers.

Neunzehnter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 214. *Jede Pyramide SABCDE hat zum Maaſse ein Drittheil des Products der Grundfläche ABCDE in die Höhe AO.*

Denn legt man Ebenen SEB, SEC durch S und durch die Diagonalen EB und EC, so wird die vieleckige Pyramide SABCDE in mehrere dreyseitige Pyramiden getheilt, welche alle die nämliche Höhe SO haben. Nun wird nach dem vorigen Lehrsatze jede dieser Pyramiden gemessen, wenn man die Grundflächen ABE, BCE und CDE mit einem Drittheile der Höhe SO multiplicirt; also hat die Summe der dreyseitigen Pyramiden, d. h. die vielseitige Pyramide SABCDE, das Product der Summe der Dreyecke ABE, BCE, CDE, oder des Vielecks ABCDE in $\frac{1}{3}$ SO zum Maaſse; folglich hat die ganze Pyramide zum Maaſse ein Drittheil des Products der Grundfläche in die Höhe.

Erster Zusatz. Jede Pyramide ist ein Drittheil des Prisma von der nämlichen Grundfläche und Höhe.

Zweyter Zusatz. Zwey Pyramiden von der nämlichen Höhe, verhalten sich wie ihre Grundflächen, und zwey Pyramiden von der nämlichen Grundfläche wie ihre Höhen.

Anmerkung. Man findet den Inhalt eines Polyëders, wenn man es in Pyramiden zerlegt, welches auf verschiedene Weise geschehen kann. Eine der einfachsten ist, die theilenden Ebenen durch die Spitze eines und desselben Körperwinkels zu legen; dadurch entstehen so viel partielle Pyramiden als das Polyëder Seitenebenen hat, diejenigen ausgenommen, welche den Körperwinkel bilden, von welchem die theilenden Ebenen ausgehen.

Zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

Symmetrische Polyëder sind gleich grofs.

Fig. 202. Denn: *Erstlich* haben zwey dreyeckige symmetrische Pyramiden wie SABC, TABC zum gemeinschaftlichen Maafse das Product der Grundfläche ABC in ein Drittheil der Höhe SO oder TO; folglich sind diese Pyramiden gleich grofs.

Zweytens läfst sich, wenn man auf irgend eine Weise eins der symmetrischen Polyëder in dreyseitige Pyramiden theilt, das andere Polyëder in symmetrische dreyseitige Pyramiden theilen. Da nun die dreyseitigen symmetrischen Pyramiden einzeln gleich grofs sind, so sind auch die Polyëder gleich grofs.

Anmerkung. Dieser Satz schien zwar unmittelbar aus dem zweyten Satze zu folgen, wo gezeigt wurde, dafs in zwey symmetrischen Polyëdern alle Bestimmungsstücke in dem einen und dem andern gleich sind; indessen war es doch nöthig den Satz besonders zu beweisen.

Ein und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

Wenn eine Pyramide von einer mit der Grundfläche parallelen Ebene geschnitten wird, so ist das Stück, welches übrig bleibt, wenn man die kleine Pyramide wegnimmt, gleich der Summe dreyer Pyramiden, welche die Höhe der abgekürzten Pyramide zur gemeinschaftlichen Höhe haben, und deren Grundflächen die untere und die obere Grundfläche der abgekürzten Pyramide, und eine mittlere proportionale Grundfläche zwischen jenen beiden sind.

Fig. 217. ABCDE sey eine von der Ebene abd parallel mit der Grundfläche geschnittene Pyramide;

TEGH sey eine dreyseitige Pyramide, deren Grundfläche mit derjenigen der Pyramide SABCDE gleich grofs ist, und die mit ihr gleiche Höhe hat. Man lege die beiden Grundflächen in eine Ebene, so bildet die Ebene abd verlängert, in der dreyseitigen Pyramide einen Schnitt fgh, der in der nämlichen Höhe über der gemeinschaftlichen Ebene der Grundflächen liegt; woraus folgt, dafs sich die Schnitte fgh und abd wie die Grundflächen FGH und ABD verhalten (16r S.). Weil nun die Grundflächen gleich grofs sind, so sind es auch die Schnitte. Die Pyramiden Sabcde und Tfgh sind also auch gleich grofs, denn sie haben gleiche Höhen und gleich grofse Grundflächen. Die ganzen Pyramiden SABCDE und TFGH sind aus dem nämlichen Grunde ebenfalls gleich grofs, also sind auch die abgekürzten Pyramiden ABDdab und FGHhfg gleich grofs; folglich darf nur, um den Satz allgemein zu beweisen, der Beweis desselben für die abgekürzte *dreyseitige* Pyramide gegeben werden.

Fig. 218. FGHhfg sey eine abgekürzte dreyseitige Pyramide mit parallelen Grundflächen. Durch die drey Puncte F, g, H lege man die Ebene FgH, welche von der abgekürzten dreyseitigen Pyramide, die dreyseitige Pyramide gFGH abschneidet. Diese Pyramide hat zur untern Grundfläche die, FGH der abgekürzten, und ihre Höhe zur Höhe, weil ihre Spitze g in der Ebene der obern Grundfläche fgh liegt.

Nachdem diese Pyramide abgezogen worden, bleibt die vierseitige Pyramide gfhHF übrig, deren Spitze g und deren Grundfläche fhHF ist. Man lege durch die drey Puncte f, g, H die Ebene fgH, welche die vierseitige Pyramide in zwey dreyseitige gFfH und gfhH theilt. Die letzte hat zur Grundfläche die obere Grundfläche gfh der abgekürzten Pyramide, und zur Höhe ihre Hö-

he, weil ihre Spitze H in der untern Grundfläche liegt. Bis hieher sind zwey von den dreyseitigen Pyramiden abgesondert, aus welchen die abgekürzte zusammengesetzt ist.

Die dritte Pyramide ist die dreyseitige gFfH. Man ziehe gK mit fF parallel, und stelle sich eine neue Pyramide fFHK vor, deren Spitze K, und deren Grundfläche FfH ist. Die beiden Pyramiden haben einerley Grundfläche FfH und einerley Höhe, weil ihre Spitzen g und K in einer mit Ff, und folglich mit der Ebene der Grundfläche parallelen Linie gK liegen; mithin sind diese Pyramiden gleich grofs. Aber die Pyramide fFKH kann angesehen werden, als hätte sie ihren Scheitel in f; dann aber hat sie gleiche Höhe mit der abgekürzten, und von ihrer Grundfläche FKH läfst sich zeigen, dafs sie die mittlere Proportionale zwischen den Grundflächen FGH und fgh ist. Denn die Dreyecke FHK und fgh haben einen gleichen Winkel F = f, und eine gleiche Seite FK = fg; also ist FHK : fgh = FH : fh (3s B. 24r S.). Aber es ist auch FHG : FHK = FG : FK oder fg. Nun geben die ähnlichen Dreyecke FGH und fgh, FG : fg = FH : fh; also FGH : FHK = FHK : fgh; folglich ist die Grundfläche FHK die mittlere Proportionale zwischen den beiden Grundflächen FGH und fgh. Mithin ist eine abgekürzte dreyseitige Pyramide mit parallelen Grundflächen so grofs als drey Pyramiden zusammen genommen, welche zur gemeinschaftlichen Höhe die Höhe der abgekürzten und zu Grundflächen die obere und die untere Grundfläche der abgekürzten und eine mittlere Proportionale zwischen beiden haben *).

*) So sinnreich auch der geometrische Beweis dieses Satzes ist, so ist doch ein auf den neunzehnten Satz gegründeter

Zwey und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

Fig. 216. *Wenn man ein dreyseitiges Prisma, dessen Grundfläche ABC ist, mit einer gegen die Grundfläche beliebig geneigten Ebene DEF schneidet, so ist der entstehen-*

algebraischer Beweis kürzer. Es sey nämlich in der 214ten Figur die Grundfläche der oben abgeschnittenen Pyramide Sac, nämlich abcde = B, die Höhe dieser Pyramide x, die Grundfläche der ganzen Pyramide SAC, nämlich ABCDE = A, die Höhe der abgekürzten = H, also die Höhe der ganzen Pyramide = H + x, so ist $\frac{(H+x)^2}{x^2} = \frac{A}{B}$, denn die Grundflächen verhalten sich wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten, und folglich, weil sich diese wie die Höhen verhalten, auch wie die Quadrate der letztern. Aus $\frac{(H+x)^2}{x^2} = \frac{A}{B}$ folgt $(H+x)^2 . B = Ax^2$, oder $(H+x)\sqrt{B} = x\sqrt{A}$ und hieraus $H\sqrt{B} = x(\sqrt{A} - \sqrt{B})$. Nun ist der Inhalt der ganzen Pyramide $\frac{1}{3} A (H+x)$, und der Inhalt der oben abgeschnittenen Pyramide $\frac{1}{3} Bx$, beydes zufolge des 19ten Satzes. Also ist der Inhalt der abgekürzten Pyramide, welchen man findet, wenn man den Inhalt der oben abgeschnittenen von dem Inhalt der ganzen Pyramide abzieht $= \frac{1}{3} A (H+x) - \frac{1}{3} Bx$ oder $= \frac{1}{3}(A-B)x + \frac{1}{3} AH$. Nun war vorhin $H\sqrt{B} = x(\sqrt{A} - \sqrt{B})$. Multiplicirt man dieses auf beyden Seiten mit $\sqrt{A} + \sqrt{B}$, so erhält man $H\sqrt{(AB)} + HB = x(A - B)$, also ist $\frac{1}{3} x (A - B) = \frac{1}{3} H\sqrt{(AB)} + \frac{1}{3} BH$; folglich ist der Inhalt der abgekürzten Pyramide $= \frac{1}{3} H\sqrt{(AB)} + \frac{1}{3} BH + \frac{1}{3} AH$, oder

$$\frac{1}{3} H (A + B + \sqrt{(AB)})]$$

welches der 21ste Satz ist.

Es ist vielleicht nicht unnütz, hier noch folgenden Satz einzuschalten.

Lehrsatz.

Eine abgekürzte Pyramide ist** kleiner **als ein Prisma, dessen Grundfläche der halben Summe der beyden Grundflächen der Pyramide, und dessen Höhe der Höhe der abgekürzten

de Körper ABCDEF gleich der Summe dreyer Pyramiden, deren Spitzen D, E, F sind, und deren gemeinschaftliche Grundfläche ABC ist.

Man lege durch die drey Puncte F, A, C die Ebene FAC, welche von dem schief abgeschnittenen Prisma ABCDEF die dreyseitige Pyramide FABC abschneidet.

Pyramide gleich ist, und zwar um eine Pyramide, von deren Grundfläche, in sofern man sie in eine, den Grundflächen der abgekürzten Pyramide ähnliche Figur, verwandelt, die Seiten dem Unterschiede ähnlich liegender Seiten der beyden Grundflächen der abgekürzten Pyramide gleich sind, und deren Höhe die Hälfte der Höhe der abgekürzten Pyramide ist.

Ferner ist die abgekürzte Pyramide grösser *als ein Prisma, von dessen Grundfläche, in sofern man sie in eine den Grundflächen der abgekürzten Pyramide ähnliche Figur verwandelt, die Seiten, den halben Summen ähnlich liegender Seiten der abgekürzten Pyramide gleich sind, oder was dasselbe ist, dessen verwandelte Grundfläche, der in der halben Höhe liegende, mit den Grundflächen der abgekürzten Pyramide parallele Schnitt derselben, die Höhe aber der Höhe der abgekürzten Pyramide gleich ist, und zwar um die Hälfte der vorhin beschriebenen, dem obigen Unterschiede gleichen, Pyramide.*

Denn man stelle sich vor, die beiden Grundflächen der abgekürzten Pyramide A und B wären in Quadrate verwandelt, deren Seiten durch a und b bezeichnet werden sollen, so dass $A = a^2$, $B = b^2$. Der Unterschied von a und b sey k, so dass $a = b + k$, so ist $A = (b + k)^2 = b^2 + 2bk + k^2$ und $B = b^2$. Der Inhalt der abgekürzten Pyramide, welcher $\frac{1}{3} H (A + B + \sqrt{(AB)})]$ war, ist also $= \frac{1}{3} H \ (b^2 + 2bk + k^2 + b^2 + b \ (b + c)] = \frac{1}{3} H \ (3b^2 + 3bk + k^2)$ oder $= H \ (b^2 + bk + \frac{1}{3} k^2)$. Nun ist der Inhalt des ersten Prisma, dessen Grundfläche die halbe Summe der beiden Grundflächen der Pyramide seyn soll, $= H. \frac{b^2 + 2bk + k^2 + b^2}{2} = H \ (b^2 + bk + \frac{1}{2} k^2)$; der Inhalt des zweyten Prisma, dessen Grundfläche der Schnitt

Diese Pyramide hat ABC zur Grundfläche und F zur Spitze.

Nachdem diese Pyramiden abgeschnitten worden, bleibt die vierseitige Pyramide FACDE übrig, deren Spitze F, und deren Grundfläche ACDE ist. Man lege durch die drey Puncte F, E, C die Ebene FEC, welche die vierseitige Pyramide in zwey dreyseitige FACE und FCDE theilt.

der abgekürzten Pyramide in der halben Höhe seyn soll, ist H. $\left(\frac{b + k + b}{2}\right)^2 = H(b + \frac{1}{2}k)^2 = H(b^2 + bk + \frac{1}{4}k^2)$.

Also ist der Inhalt

der abgekürzten Pyramide $= H(b^2 + bk + \frac{1}{3}k^2)$
des ersten Prisma $= H(b^2 + bk + \frac{1}{2}k^2)$
des zweyten Prisma $= H(b^2 + bk + \frac{1}{4}k^2)$

folglich ist die abgekürzte Pyramide um $\frac{1}{6}$ Hk^2 kleiner als das erste, und um $\frac{1}{12}$ Hk^2, also um halb so viel grölser als das zweyte Prisma. Es ist aber k^2 ein Quadrat, welches in derjenigen Höhe der quadratischen Pyramide liegt, in welcher die Seiten k des Schnitts dem Unterschiede der Seiten a und b der untern und obern quadratischen Grundfläche gleich sind. In der nämlichen Höhe sind die Seiten des Schnitts der Pyramide mit unverwandelten vieleckigen Grundflächen, den Unterschieden der Seiten der obern und untern Grundfläche gleich, weil sich, eben wie die Seiten der Quadrate, die Seiten der Vielecke, wie die nämlichen Höhen verhalten. Also drückt $\frac{1}{6}$ Hk^2 den Inhalt einer Pyramide aus, von deren Grundfläche, in sofern man sie in eine den Grundflächen der abgekürzten Pyramide ähnliche Figur verwandelt, die Seiten, den Unterschieden der ähnlich liegenden Seiten der Grundflächen der abgekürzten Pyramiden gleich sind, deren Höhe aber die Hälfte der Höhe der abgekürzten Pyramide ist, und um eine solche Pyramide ist die abgekürzte kleiner als das erste verglichene Prisma, um die Hälfte derselben grölser als das andere. A. d. Uebers.

Die Pyramide FAEC, welche zur Grundfläche das Dreyeck AEC, und zur Spitze den Punct F hat, ist so grofs als eine Pyramide EABC, welche ebenfalls AEC zur Grundfläche, und B zur Spitze hat. Denn diese beiden Pyramiden haben gleiche Grundflächen und gleiche Höhen, weil die mit den beiden Linien AE und CD parallele Linie BF, mit der Ebene ACE parallel ist; also ist die Pyramide FAEC so grofs als die Pyramide EABC, welche man so ansehen kann, als hätte sie ABC zur Grundfläche und E zur Spitze.

Die dritte Pyramide FCDE kann in AFCD verwandelt werden, denn diese beiden Pyramiden haben die nämliche Grundfläche FCD, und die nämliche Höhe, weil AE mit der Ebene FCD parallel ist: folglich sind die Pyramiden FCDE und AFCD gleich grofs. Nun kann die Pyramide AFCD in ABCD verwandelt werden, denn diese beiden Pyramiden haben die gemeinschaftliche Grundfläche ACD und einerley Höhe, weil ihre Spitzen F und B in einer, mit der Ebene der Grundfläche parallelen Linie liegen. Also ist die Pyramide FCDE, welche so grofs ist als AFCD, auch mit ABCD gleichen Inhalts. Diese letztere aber kann betrachtet werden, als hätte sie zur Grundfläche ABC, und zur Spitze D.

Also ist das schiefabgeschnittene Prisma ABCDEF gleich der Summe dreyer Pyramiden, welche ABC zur gemeinschaftlichen Grundfläche, und die Puncte D, E F zu Scheiteln haben *).

Zusatz. Wenn die Kanten AE, BF, CD auf der Ebene der Grundfläche senkrecht stehen, so sind sie

*) Dieser Satz ist also eine schöne Verallgemeinerung des 7ten Satzes im 12ten Buche des Euclids, von der Zerlegung eines Prisma in drey gleiche Pyramiden.

A. d. Uebers.

zugleich die Höhen der drey Pyramiden aus welchen das schiefabgeschnittene Prisma zusammengesetzt ist, so daſs der Inhalt dieses Prisma durch $\frac{1}{3} ABC \times AE + \frac{1}{3} ABC + BF + \frac{1}{3} ABC \times CD$ ausgedrückt werden kann, welche Gröſse sich auf $\frac{1}{3} ABC \times (AE + BF + CD)$ reduciren läſst.

Drey und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

In zwey ähnlichen dreyseitigen Pyramiden sind die ähnlich liegenden Seitenebenen ähnlich, und die ähnlich liegenden Körperwinkel gleich.

Fig. 203. Nach der Erklärung dreyseitiger Pyramiden, sind die beiden Pyramiden SABC und TDEF ähnlich, wenn die beiden Dreyecke SAB und ABC den Dreyecken TDE und DEF ähnlich sind, und mit ihnen eine ähnliche Lage haben, das heiſst, wenn die Winkel ABS = DET, BAS = EDT, ABC = DEF, BAC = EDF sind, und die Neigung der Ebenen SAB und ABC, der Neigung der Ebenen TDE und DEF gleich ist. Findet alles dieses Statt, so behaupte ich, daſs in diesen Pyramiden alle Seitenebenen ähnlich, und alle Körperwinkel gleich sind.

Man mache BG = ED, BH = EF, BI = ET, und ziehe GH, GI, IH, so ist die Pyramide TDEF der Pyramide IGBH gleich; denn wenn die Seiten GB und BH den Seiten DE und EF gleich sind, so ist das Dreyeck GBH dem Dreyecke DEF gleich, weil nach der Voraussetzung die Winkel GBH und DEF gleich sind. Um also die beiden Pyramiden in einander zu legen, darf man nur die Grundfläche DEF in die gleiche Grundfläche GBH legen; dann ist klar, daſs, weil die Ebene DTE gegen DEF eben die Neigung hat, wie SAB gegen ABC, die Ebene DET in ABS

fallen wird. Aber nach der Voraussetzung sind die Winkel DET und GBI gleich; also fällt ET auf die gleiche BI, und weil die vier Puncte D, E, F, T in die vier Puncte G, B, H, I fallen, so folgt (1r S.), dafs die Pyramide TDEF in die Pyramide IGBH fällt.

Nun ist wegen der gleichen Dreyecke DEF, GBH der Winkel BGH = EDF = BAC; also ist GH mit AC parallel. Aus demselben Grunde ist GI mit AS parallel; also ist die Ebene IGH mit SAC parallel (13r S.). Daraus folgt, dafs das Dreyeck IGH, oder das gleiche TDF dem Dreyecke SAC (15r S.), und das Dreyeck IBH, oder das gleiche TEF, dem Dreyecke SBC ähnlich ist; folglich sind in den beiden dreyseitigen Pyramiden SABC und TDEF, die vier Seitenebenen einzeln ähnlich, und die ähnlich liegenden Körperwinkel gleich.

Denn der Körperwinkel E ist schon in den ähnlich liegenden B gelegt worden, und man könnte eben so die andern in einander legen; aber es folgt auch unmittelbar, dafs zwey ähnlich liegende Körperwinkel gleich sind, z. B. T und S, weil sie von drey gleichen und ähnlich liegenden ebenen Winkeln eingeschlossen werden.

Folglich sind in zwey ähnlichen dreyseitigen Pyramiden die ähnlich liegenden Seitenebenen ähnlich, und die ähnlich liegenden Körperwinkel gleich.

Erster Zusatz. Die ähnlichen Dreyecke in den beiden Pyramiden geben die Proportionen AB : DE = BC : EF = AC : DF = AS : DT = SB : TE = SC : TF; *folglich sind in ähnlichen dreyseitigen Pyramiden die ähnlich liegenden Kanten proportional.*

Zweyter Zusatz. Und weil die ähnlich liegenden Körperwinkel gleich sind, so folgt, *dafs die Neigung zweyer beliebigen Seitenflächen einer Pyramide, der Nei-*

gung der beiden ähnlich liegenden Seitenflächen einer ähnlichen Pyramide gleich ist.

Dritter Zusatz. Wenn man die dreyseitige Pyramide SABC, mit einer Ebene GHI, parallel mit einer der Seitenflächen SAC schneidet, so ist die partielle Pyramide BGHI, der ganzen Pyramide BASC ähnlich; denn die Dreyecke BGI und BGH sind den Dreyecken BAS und BAC einzeln ähnlich, und mit ihnen in gleicher Lage; die Neigung ihrer Ebenen ist beiderseits gleich, also sind die beiden Pyramiden ähnlich.

Fig. 214. *Vierter Zusatz.* Allgemein, *wenn man eine beliebige Pyramide SABCDE mit einer der Grundfläche parallelen Ebene abcde schneidet, so ist die partielle Pyramide Sabcde der ganzen Pyramide SABCDE ähnlich.* Denn die Grundflächen ABCDE und abcde sind ähnlich, und wenn man AC und ac zieht, so ist, wie bewiesen worden, die dreyseitige Pyramide SABC der Pyramide Sabc ähnlich; also liegt der Punct S in Rücksicht der Grundfläche ABC, eben so wie der Punct S in Rücksicht der Grundfläche abc (18te Erkl.); folglich sind die beiden Pyramiden SABCDE und Sabcde ähnlich.

Anmerkung. Statt der eben angenommenen fünf Stücke, die der Erklärung zufolge in Betracht kommen, wenn zwey dreyseitige Pyramiden ähnlich seyn sollen, kann man fünf andere mit verschiedenen Verwechselungen annehmen, woraus eben so viele Lehrsätze entstehen, unter welchen folgender zu bemerken ist: *Zwey dreyseitige Pyramiden sind ähnlich, wenn ihre Kanten in gleichem Verhältnisse stehen.*

Fig. 203. Denn wenn die Proportionen AB : DE = BC : EF = AC : DF = AS : DT = SB : TE = SC : FT Statt finden, welche fünf Bestimmungen enthalten, so sind die Dreyecke ABS und ABC, den Dreyecken DET

und DEF ähnlich, und liegen auf dieselbe Weise. Eben so sind die Dreyecke SBC und TEF ähnlich, also sind die drey ebenen Winkel, welche den Körperwinkel B bilden, denen welche den Körperwinkel E einschliessen, einzeln gleich, woraus folgt, dafs die Neigung der Ebenen SAB und ABC der Neigung der ähnlich liegenden Ebenen TDE und DEF gleich ist, und dafs also die Pyramiden ähnlich sind *).

Vier und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

In zwey ähnlichen Polyëdern sind die ähnlich liegenden Seitenflächen ähnlich, und die ähnlich liegenden Körperwinkel gleich.

Fig. 219. ABCDE sey die Grundfläche des einen Polyëders; M und N sollen die Spitzen zweyer Körperwinkel ausser der Grundfläche seyn, welche durch die dreyseitigen Pyramiden MABC und NABC bestimmt werden, deren gemeinschaftliche Grundfläche ABC ist; in dem andern Polyëder sey abcde, die mit ABCDE ähnlich liegende Grundfläche; m und n sollen die mit M und N ähnlich liegenden Spitzen seyn, welche durch die der dreyseitigen Pyramiden MABC und NABC ähnlichen dreyseitigen Pyramiden mabc und nabc bestimmt werden, so behaupte ich zuerst, dafs sich die Entfernungen MN und mn, wie ähnlich liegende Seiten AB und ab, verhalten.

Denn weil die Pyramiden MABC und mabc ähnlich sind, so ist die Neigung der Ebenen MAC und BAC der Neigung der Ebenen mac und bac gleich; eben so

*) Diese Sätze von der Aehnlichkeit der Pyramiden sind mit denen von der Aehnlichkeit der Dreyecke analog.
A. d. Uebers.

ist die Neigung der Ebenen nac und bac der Neigung der Ebenen NAC und BAC gleich, weil die Pyramiden NABC und nabc ähnlich sind. Zieht man die ersten Neigungen von den andern ab, so folgt, daſs die Neigung der Ebenen NAC und MAC der Neigung der Ebenen nac und mac gleich ist. Wegen Aehnlichkeit der Pyramiden aber sind die Dreyecke MAC und mac, NAC und nac ähnlich; also haben die beiden dreyseitigen Pyramiden MNAC und mnac zwey ähnliche Seitenflächen, die ähnlich liegen und gegen einander gleiche Neigung haben; folglich sind diese Pyramiden ähnlich (21r S.), und ihre ähnlich liegenden Seitenflächen geben die Proportion MN : mn = AM : am. Es ist aber AM : am = AB : ab, also ist MN : mn = AB : ab.

P und p sollen zwey andere ähnlich liegende Spitzen der nämlichen Polyëder seyn, so ist eben so PN : pn = AB : ab und PM : pm = AB : ab; also MN : mn = PN : pn = PM : pm. *Also ist das Dreyeck PNM, welches drey beliebige Spitzen des einen Polyëders verbindet dem Dreyecke pnm, welches die ähnlich liegenden drey Spitzen des andern Polyëders verbindet, gleich.*

Sind nun Q und q zwey neue ähnlich liegende Spitzen, so sind auch die Dreyecke PQN und pqn ähnlich. Ich behaupte ferner, daſs die Neigung der Ebenen PQN und PMN der Neigung der Ebenen pqn und pmn gleich ist.

Denn zieht man QM und qm, so sind immer wieder die Dreyecke QNM und qnm ähnlich; folglich sind die Winkel QNM und qnm gleich. Man stelle sich in N einen Körperwinkel von den drey ebenen Winkeln QNM, QNP und PNM gebildet vor, desgleichen in n einen von den drey ebenen Winkeln qnm, qnp und pnm gebildeten Körperwinkel. Weil diese ebenen Win-

kel einzeln gleich sind, so folgt, dafs auch die Körperwinkel gleich sind. Also ist die Neigung der beiden Ebenen PNQ und PNM der Neigung der ähnlich liegenden Ebenen pnq und pnm gleich; folglich würde, wenn die beiden Dreyecke PNQ und PNM in einer und derselben Ebene lägen, in welchem Falle der Winkel QNM = QNP + PNM seyn würde, auch der Winkel qnm = qnp + pnm seyn, und auch die beiden Dreyecke qnp und pnm würden in einer und derselben Ebene liegen.

Alles was hier bewiesen worden, findet für beliebige Winkel M, N, P, Q in Vergleich zu den mit ihnen ähnlich liegenden m, n, p, q Statt.

Wir wollen jetzt annehmen, die Oberfläche eines der Polyëder wäre in Dreyecke ABC, ACD, MNP, NPQ getheilt, so sieht man, dafs die Oberfläche des andern Polyëders ähnliche und ähnlich liegende Dreyecke abc, acd, mnp, npq enthalten wird, und wenn mehrere von diesen Dreyecken wie MPN, NPQ etc. zu einer und der nämlichen Seitenfläche gehörten, und in einer und derselben Ebene lägen, so würden sich die ähnlich liegenden Dreyecke mpn, npq etc., ebenfalls in einer und derselben Ebene befinden. Also entspricht jede vieleckige Seitenfläche des eines Polyëders einer ähnlichen vieleckigen Seitenfläche des andern; mithin werden die beiden Polyëder von einer gleichen Zahl von ähnlichen und ähnlich liegenden Ebenen begrenzt. Ich behaupte, dafs auch die ähnlich liegenden Körperwinkel gleich sind.

Denn wenn zum Beyspiel der Körperwinkel N von den ebenen Winkeln QNP, PNM, MNR, QNR eingeschlossen wird, so begrenzen den ähnlich liegenden Körperwinkel n die ebenen Winkel qnp, pnm, mnr und qnr. Diese ebenen Winkel aber sind einzeln den vori-

gen gleich, und die Neigung zweyer an einander stossenden Ebenen ist gleich der Neigung der ähnlich liegenden Ebenen im andern Polyëder, also sind die beiden Körperwinkel, da sie in einander gelegt werden können, gleich.

Also sind endlich in zwey ähnlichen Polyëdern die ähnlich liegenden Seitenflächen ähnlich, und die ähnlich liegenden Körperwinkel gleich.

Zusatz. Aus diesem Beweise folgt, dafs wenn man mit vier Spitzen eines Polyëders, eine dreyseitige Pyramide construirt, und mit vier ähnlich liegenden Spitzen eines ähnlichen Polyëders eine zweyte, diese beiden Pyramiden ähnlich sind; denn ihre ähnlich liegenden Seiten sind proportional (21r S. Zusatz).

Man sieht auch, dafs sich zwey ähnlich liegende Diagonalen (2s B. 17r S.), z. B. AN und an wie ähnlich liegende Seiten AB und ab verhalten *).

Fünf und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

Zwey ähnliche Polyëder können in gleich viel ähnliche und ähnlich liegende dreyseitige Pyramiden getheilt werden.

Denn die Oberflächen der beiden Polyëder können, wie schon gezeigt ist, in gleich viel ähnliche und ähnlich liegende Dreyecke getheilt werden. Man betrachte alle diese Dreyecke an dem einen Polyëder, diejenigen ausgenommen, welche den Köperwinkel A einschliessen, als Grundfläche eben so vieler dreyseitiger Pyramiden, deren Scheitel A ist; so machen diese Pyramiden zusammengenommen das Polyëder aus. Man theile das andere Polyëder auf dieselbe Weise in Pyramiden,

*) Diese Sätze haben Analogie mit den Sätzen von Vielecken in der Ebene. A. d. Uebers.

welche zum gemeinschaftlichen Scheitel den mit A ähnlich liegenden Scheitel des Winkels a haben; so ist klar, dafs die Pyramide, welche vier Scheitel des einen Polyëders verbindet, der Pyramide, welche die vier ähnlich liegenden Scheitel des andern Polyëders verbindet, ähnlich ist etc.

Sechs und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

Zwey ähnliche Pyramiden verhalten sich an Inhalt, wie die Würfel ihrer ähnlich liegenden Seiten.

Fig. 214. Denn wenn zwey Pyramiden ähnlich sind, so kann die kleinere in die gröfsere gelegt werden und zwar, so dafs sie einen Körperwinkel wie S gemein haben. Die Grundflächen ABCDE und abcde sind alsdann parallel; denn weil die ähnlich liegenden Seitenflächen ähnlich sind (22r S.), so sind die Winkel Sab und SAB, Sbc und SBC etc. gleich; folglich sind die Ebenen abc und ABC parallel (5s B. 13r S.). Nun sey SO aus der Spitze S auf der Ebene ABC senkrecht, und o der Punct in welchem dieses Perpendikel die Ebene abc schneidet, so ist dem oben bewiesenen zufolge (15r S.), SO : So = SA : Sa = AB : ab, und folglich

$$\tfrac{1}{3}\,SO : \tfrac{1}{3}\,So = AB : ab.$$

Aber die Grundflächen ABCDE und abcde sind ähnliche Figuren, also ist

$$ABCDE : abcde = AB^2 : ab^2.$$

Multiplicirt man die Glieder der einen Proportion mit den Gliedern der andern, der Reihe nach, so erhält man

$$ABCDE \times \tfrac{1}{3}SO : abcde \times \tfrac{1}{3}So = AB^3 : ab^3.$$

Aber ABCDE $\times \tfrac{1}{3}$SO ist der Inhalt der Pyramide SABCDE (18r S.), und abcde $\times \tfrac{1}{3}$ So, der Inhalt der

Pyramide Sabcde; also verhalten sich zwey ähnliche Pyramiden, dem Inhalte nach, wie die Würfel ähnlich liegender Seiten.

Sieben und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

Zwey ähnliche Polyëder verhalten sich wie die Würfel ähnlich liegender Seiten.

Fig. 219. Denn zwey ähnliche Polyëder können in gleich viel ähnliche dreyseitige Pyramiden getheilt werden (23r S.). Zwey ähnliche dreyseitige Pyramiden APNM und apnm verhalten sich aber wie die Würfel der ähnlich liegenden Seiten AM und am, oder wie die Würfel der ähnlich liegenden Seiten AB und ab. Das nämliche Verhältnifs findet zwischen zwey beliebigen andern ähnlich liegenden Pyramiden Statt. Also verhält sich die Summe aller Pyramiden, aus welchen das eine Polyëder zusammengesetzt ist, das heifst das Polyëder selbst, zu dem andern, wie der Würfel einer beliebigen Seite des ersten, zum Würfel der ähnlich liegenden Seite des andern.

Allgemeine Anmerkung.

In algebraischen Zeichen, das heifst, auf die kürzeste Weise, sind die Hauptsätze dieses Buchs von den Polyëdern folgende:

Es sey B die Grundfläche eines Prisma, H seine Höhe, so ist der Inhalt des Prisma $B \rtimes H$ oder BH.

Es sey B die Grundfläche einer Pyramide, H seine Höhe, so ist der Inhalt der Pyramide $B \rtimes \frac{1}{3} H$, oder $H \rtimes \frac{1}{3} B$ oder $\frac{1}{3}$ BH.

Es sey H die Höhe einer abgekürzten Pyramide, mit parallelen Grundflächen; A und B sollen die Grund-

flächen seyn, so ist $\sqrt{(AB)}$ die mittlere Proportionale zwischen den Grundflächen, und der Inhalt der abgekürzten Pyramide ist $\frac{1}{3} H \times (A + B + \sqrt{(AB)})$.

Es sey B die Grundfläche eines schief abgeschnittenen Prisma; H, H', H'' sollen die Höhen seiner drey obern Ecken seyn, so ist der Inhalt des schief abgeschnittenen Prisma $\frac{1}{3} B \times (H + H' + H'')$.

Endlich sollen P und p den Inhalt zweyer ähnlichen Polyëder ausdrücken, A und a zwey ähnlich liegende Seiten oder Diagonalen derselben, so ist $P : p = A^3 : a^3$.

Siebentes Buch.

Die Kugel.

Erklärungen.

I. Die *Kugel* ist ein Körper, den eine krumme Fläche begrenzt, deren Puncte sämmtlich von einem Puncte innerhalb gleich weit entfernt sind, welcher *Mittelpunct* heifst.

Fig. 220. Man kann sich die Kugel durch Umdrehung des Halbkreises DAE um den Durchmesser entstehend vorstellen; denn alle Puncte einer durch diese Bewegung von der krummen Linie DAE beschriebenen Fläche sind gleich weit vom Mittelpuncte entfernt.

II. Der *Halbmesser* der Kugel ist jede grade Linie vom Mittelpuncte nach irgend einem Puncte der Oberfläche. *Der Durchmesser, oder die Axe,* ist jede grade Linie, welche durch den Mittelpunct geht, und an beiden Enden von der Kugelfläche begrenzt wird. Alle Halbmesser der Kugel sind gleich; alle Durchmesser der Kugel sind ebenfalls gleich, und so lang als der doppelte Halbmesser.

III. Es wird bewiesen werden, dafs jeder Schnitt der Kugel mit einer Ebene ein Kreis ist (1r S.). Ein solcher Schnitt, wenn er durch den Mittelpunct geht, heifst *gröfster Kreis*, und wenn er nicht durch den Mittelpunct geht, *kleiner Kreis*.

IV. *Eine Ebene berührt die Kugel,* wenn sie nur einen Punct mit ihrer Oberfläche gemein hat *).

V. *Der Pol eines Kugelkreises* ist derjenige Punct der Kugelfläche, der gleich weit von allen Puncten des Kreisumfanges entfernt ist. Es wird gezeigt werden (6r S.), dafs jeder Kreis, jeder gröfste und jeder kleine, immer zwey Pole hat.

VI. Das *Kugeldreyeck* ist derjenige Theil der Kugelfläche, welcher zwischen den Bogen drey gröfster Kreise liegt.

Diese Bogen, welche die *Seiten* des Dreyecks heissen, werden hier immer kleiner angenommen, als der halbe Umfang. Die Winkel welche die Ebenen mit einander machen, in welchen die Bogen liegen, heissen Winkel des Dreyecks.

VII. Das Kugeldreyeck heifst *rechtwinklig, gleichschenklig, gleichseitig,* wie das gradlinige Dreyeck, in ähnlichen Fällen.

VIII. Das *Kugelvieleck* ist ein von mehreren Bogen gröfster Kreise begrenzter Theil der Kugelfläche.

IX. Das *Kugelzweyeck* (fuseau) **), ist derjenige Theil der Kugelfläche, welche zwischen zwey gröfsten Halbkreisen liegt, die einen gemeinschaftlichen Durchmesser haben.

X. Ich werde denjenigen Theil vom Körper der Kugel, welcher zwischen zwey solchen Halbkreisen liegt, und welchem das Zweyeck zur Grundfläche dient, *Keil* (coin) oder *Kugelschnitt* (onglet sphérique) nennen.

*) Genauer „wenn zwischen ihr und der Kugel keine andere Ebene hindurch gehen kann, ohne die Kugel zu schneiden.“ A. d. Uebers.

**) Dieses Wort für fuseau mag neu seyn. Es drückt aber den Begriff vollständig aus. A. d. Uebers.

XI. *Kugelpyramide* ist der Theil des Kugelkörpers, welcher zwischen den Ebenen eines Körperwinkels liegt, dessen Spitze im Mittelpuncte ist. Die Grundfläche der Pyramide ist das Kugelvieleck zwischen den nämlichen Ebenen.

XII. *Zone* nennt man einen zwischen zwey parallelen Ebenen liegenden Theil der Kugelfläche. Die parallelen Ebenen sind die *Grundflächen* der Zone. Eine der Ebenen kann die Kugel berühren. Alsdann hat die Zone nur *eine* Grundfläche.

XIII. *Kugelabschnitt* heifst der zwischen zwey parallelen Ebenen liegende Theil des Kugelkörpers. Die Ebenen sind des Abschnitts *Grundflächen.*

Eine der Ebenen kann die Kugel berühren. Alsdann hat der Abschnitt nur eine Grundfläche.

XIV. Die *Höhe einer Zone oder eines Abschnitts* ist die Entfernung zwischen den beiden parallelen Ebenen, welche die Grundflächen der Zone oder des Abschnitts sind.

Fig. 220. XV. So wie der Halbkreis DAE durch Umdrehung um den Durchmesser DE die Kugel beschreibt, so beschreibt jeder Kreisausschnitt wie DCF oder FCH einen *Kugelausschnitt.*

Erster Satz.

Lehrsatz.

Jeder Schnitt der Kugelfläche mit einer Ebene ist ein Kreis.

Fig. 221. AMB sey der Schnitt einer Ebene mit der Kugel, deren Mittelpunct C ist. Aus dem Puncte C ziehe man CO auf AMB senkrecht und mehrere Linien CM, CM nach verschiedenen Puncten der den Schnitt begrenzenden krummen Linie AMB.

Die schrägen Linien CM, CM, CB siud gleich, weil sie Halbmesser der Kugel sind. Sie sind also gleich weit von dem Perpendikel CO entfernt (5s B. 5r S.), mithin sind alle Linien OM, OM, OB gleich lang; folglich ist der Schnitt AMB ein Kreis aus dem Mittelpuncte O.

Erster Zusatz. Wenn der Schnitt durch den Mittelpunct der Kugel geht, so ist sein Halbmesser dem Halbmesser der Kugel gleich; folglich sind alle gröſste Kreise einander gleich.

Zweiter Zusatz. Zwey gröſste Kreise theilen sich immer in zwey gleiche Theile; denn ihr Durchschnitt ist, weil er durch den Mittelpunct geht, ein Durchmesser.

Dritter Zusatz. Jeder gröſste Kreis theilt die Kugel und ihre Fläche in zwey gleiche Theile; denn wenn man die beiden Halbkugeln, nachdem man sie getrennt hat, so auf die gemeinschaftliche Grundfläche legt, daſs ihre erhöhten Theile nach einer Seite hin liegen, so müssen die beiden Flächen ganz in einander fallen, weil es sonst Puncte darin geben würde, die ungleich weit vom Mittelpuncte entfernt sind.

Fig. 221. *Vierter Zusatz.* Die grade Linie durch die Mittelpuncte eines kleinen Kreises und der Kugel, steht allemal auf der Ebene des kleinen Kreises senkrecht.

Fünfter Zusatz. Die kleinen Kreise sind um so kleiner, je weiter sie vom Mittelpuncte der Kugel entfernt liegen. Denn je gröſser der Abstand CO ist, je kleiner ist die Sehne AB oder der Durchmesser des kleinen Kreises AMB.

Sechster Zusatz. Durch jede zwey in der Kugelfläche gegebene Puncte kann man einen Bogen eines gröſsten Kreises legen; denn die beiden gegebenen Puncte und der Mittelpunct der Kugel, sind drey Puncte

welche die Lage einer Ebene bestimmen. Befinden sich die beiden Puncte in den Endpuncten eines Durchmessers, so liegen sie mit dem Mittelpuncte der Kugel in grader Linie, und es können alsdann unendlich viele gröfste Kreise durch die beiden gegebenen Puncte gezogen werden.

Zweyter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 222. *In jedem Kugeldreyecke ABC ist jede Seite kleiner als die Summe der beiden andern.*

O sey der Mittelpunct der Kugel. Man ziehe die Halbmesser OA, OB, OC. Die Ebenen AOB, AOC, COB bilden im Puncte O einen Körperwinkel, und die Winkel AOB, AOC, COB haben zum Maafse die Seiten AB, AC und BC des Kugeldreyecks ABC. Jeder der drey ebenen Winkel welche einen Körperwinkel bilden, ist aber kleiner als die Summe der beiden andern (5s B. 21r S.); also ist jede Seite des Dreyecks ABC kleiner als die Summe der beiden andern.

Dritter Satz.

Lehrsatz.

Der kürzeste Weg in der Kugelfläche von einem Puncte derselben bis zu einem andern, ist der Bogen des gröfsten Kreises, durch die beiden gegebenen Puncte.

Fig. 223. ANB sey der Bogen eines gröfsten Kreises durch A und B, und M, wenn es möglich ist, ein Punct der kürzesten Linie zwischen A und B aufserhalb jenes Bogens. Durch den Punct M ziehe man die Bogen gröfster Kreise MA und MB, und mache BN = BM.

Dem vorigen Lehrsatze zufolge ist der Bogen ANB kürzer als AM + MB; zieht man BN = BM auf der

einen und der andern Seite ab, so bleibt AN < AM. Aber die Entfernung zwischen B und M, sie mag in dem Bogen BM selbst liegen oder eine beliebige andere Linie seyn, ist der Entfernung zwischen B und N gleich; denn wenn man sich die Ebene des gröfsten Kreises BM um den durch B gehenden Durchmesser drehen läfst, so kann man den Punct M nach dem Punct N führen, und dann fällt die kürzeste Linie zwischen M und B, welche sie auch seyn mag, in diejenige zwischen N und B; folglich haben die beiden Wege von A nach B, der eine durch M, der andere durch N, einen gleichen Theil zwischen M und B und N und B. Nun ist aber der erste ganze Weg nach der Voraussetzung der kürzere, also wäre die Linie von A nach M kürzer als die Linie von A nach N, welches ungereimt ist, weil der Bogen AM länger ist als der Bogen AN; folglich kann kein Punct der kürzesten Linie zwischen A und B aufserhalb des Bogens ANB liegen, mithin ist dieser Bogen selbst die kürzeste Linie zwischen seinen Endpuncten *).

*) Dieser Beweis, so wie er hier ausgedrückt ist, scheint nicht ganz strenge zu seyn, weil zuletzt nur von den Kreisbogen AM und AN die Rede ist, und es also wohl noch zwischen A und M einen andern Weg geben könnte, der kürzer ist als der Bogen AN. Vielleicht ist der Beweis so zu verstehen. Zuerst wird bemerkt, dafs, welches auch der Weg von B nach M seyn mag, immer ein *gleicher* Weg von B nach N auf der Kugelfläche gezogen werden kann, das heifst, ein Weg, der gegen den Bogen BN eben so liegt, wie der Weg zwischen B und M gegen den Bogen BM; dafs also die Wege von B nach A, durch M und durch N, welche sie auch seyn mögen, einen *gleichen* Theil von B nach M, und von B nach N haben. Nun nehme man auf dem Bogen AB, von A aus, einen, dem Bogen AM gleichen Bogen an, so wird sein anderer Endpunct über N hinaus, zwischen N und B fallen, weil der Bogen AM gröfser ist als der Bogen AN. Welcher also auch der Weg

Vierter Satz.

Lehrsatz.

Die Summe der drey Seiten eines Kugeldreyecks ist kleiner als der Umfang eines gröſsten Kreises.

Fig. 224. ABC sey ein beliebiges Kugeldreyeck; man verlängere die Seiten AB und AC, bis sie sich von

von A nach M seyn mag, immer wird derselbe, wenn man ihn mit der Ebene des Bogens AM in die Ebene des Bogens AN dreht, über N hinausreichen; also reicht man mit dem Wege zwischen M und B von B aus bis an den Punct N, und mit dem Wege zwischen A und M nicht allein bis an den Punct N, sondern darüber hinaus, und muſs, um sich mit dem ersten Theile des Weges zwischen A und B zu verbinden, wiederum bis N zurück gehen, woraus zu folgen scheint, daſs der Weg von B nach A über M, länger ist als irgend ein anderer Weg, der nicht durch M geht, und daraus folgt weiter, daſs der kürzeste Weg nicht durch irgend einen Punct M auſser dem Bogen BNA gehen kann; daſs also der Bogen BNA selbst der kürzeste Weg von B nach A sey.

Doch läſst sich auch hieran noch zweifeln; denn es wäre ja möglich, daſs die unbekannten kürzesten Wege von A nach M und von M nach B zusammengenommen um so viel kürzer sind, als der Rückweg von dem Puncte über N hinaus, bis N.

Besser scheint es den Satz eben so zu beweisen, wie man beweiset, daſs in der Ebene eine grade Linie der kürzeste Weg von einem gegebenen Puncte bis zu einem andern ist. Man findet diesen letzten Beweis in meiner oben erwähnten Abhandlung über die Anwendung der Rechnung mit veränderlichen Gröſsen, S. 53.

Auf die Kugelfläche angewendet würde derselbe, wie, folgt lauten.

Fig. 8. Angenommen, der Weg AMB, welcher kein gröſster Kreis, sondern irgend eine, gegen AB überall concave Linie ist, sey in der Kugelfläche der kürzeste Weg von A nach B, so wäre also der gröſste Kreis AB länger

neuem in D schneiden. Die Bogen ABD und ACD sind halbe Umfänge, weil sich zwey gröſste Kreise immer in gleiche Theile theilen (1r S.), in dem Dreyecke BCD aber ist die Seite BC < BD + CD (2r S.). Thut man auf beiden Seiten AB + AC hinzu, so erhält man AB + AC + BC < ABD + ACD, das heiſst, AB + AC + BC ist kleiner als der Umfang.

als AMB. Man lege durch einen in AMB befindlichen Punct M, zwey gröſste Kreise AM und MB, so ist nach dem obigen zweyten Satze, AM + MB > AB; folglich übertrifft der Weg AM + MB den vermutheten kürzesten Weg AMB, um noch mehr als AB. Legt man nun durch zwey neue Puncte der Linie AMB, wie P und Q, gröſste Kreise PA, PM, QB, QM, so ist AP + PM + MQ + QB abermals länger als AM + MB, und übertrifft also AMB um noch mehr. So kann man fortfahren, Wege anzugeben, die AMB noch immer mehr übertreffen. Nothwendig aber muſs es unter diesen längern Wegen, in dem begrenzten Raum zwischen AB und AMB, einen *längsten* geben. Durch so viele Puncte von AMB man aber auch mit gröſsten Kreisen gehen mag, findet man den *längsten* Weg nicht, weil jeder neue immer wieder länger ist; folglich liegt der längste Weg gar nicht zwischen AB und AMB. Er könnte also nur in AMB selbst liegen. Dieses aber anzunehmen ist ungereimt, weil AMB sich selbst gleich ist, und folglich nicht sich selbst am meisten übertreffen kann. Mithin kann der kürzeste Weg von A nach B keine gegen AB concave Linie seyn. Aber auch keine etwa abwech- (Fig. 9.) seind concave und convexe Linie wie APQB, Fig. 8. Denn zieht man in eine solche, von einem Wendungspuncte zum andern, gröſste Kreise, wie AP, PQ, QB, so sind die gegen dieselben concaven Theile der Linie APQB, wie so eben bewiesen, einzeln länger als die Bogen AP, PQ, QB. Zusammen sind sie aber schon länger als AB, also ist APQB um so mehr länger als AB. Mithin giebt es keine Linie in der Kugelfläche auſser AB, die kürzer wäre als der gröſste Kreis AB, und folglich ist der gröſste Kreis AB der kürzeste Weg in der Kugelfläche von A nach B.

Fünfter Satz.

Lehrsatz.

Die Summe der Seiten jedes Kugelvielecks ist kleiner als der Umfang eines gröſsten Kreises.

Fig. 225. Es sey z. B. das Fünfeck ABCDE gegeben. Man verlängere die Seiten AB und DC bis sie sich in F schneiden; weil BC kleiner ist als BF + CF, so ist der Umfang des Fünfecks ABCDE kleiner als der Umfang des Vierecks AEDF. Man verlängere die Seiten AE und FD bis sie sich in G schneiden, so ist ED < EG + GD; also ist der Umfang des Vierecks AEDF kleiner als der Umfang des Dreyecks AFG. Dieser aber ist kleiner als der Umfang eines gröſsten Kreises, also ist um so mehr der Umfang des Vielecks ABCDE kleiner als der Kreisumfang.

Es giebt noch einen andern, aus der Statik hergenommenen Beweis des Satzes, der zugleich nicht blos auf die Kugel paſst, sondern auf jede krumme Fläche.

Ein Faden nämlich, der, wenn er zwischen zwey Puncten einer krummen Oberfläche angespannt wird, nothwendig auf der Oberfläche die kürzeste Linie zwischen diesen beiden Puncten bezeichnen muſs, kann nicht anders in Ruhe seyn, als wenn die Richtungen seines Drucks auf die Fläche, auf derselben senkrecht sind. Diese Richtungen liegen nothwendig mit den einzelnen Theilen des Fadens in einerley Ebenen. Für beliebige Flächen sind die Ebenen diejenigen, in welchen die Krümmungskreise liegen. Bey der Kugel fallen sie in eine einzige Ebene, nämlich in diejenige, durch die beiden gegebenen Puncte und den Mittelpunct der Kugel. Eine solche Ebene aber schneidet die Kugelfläche in einem gröſsten Kreise, der durch die gegebenen Puncte geht; also ist dieser der kürzeste Weg zwischen den beiden Puncten.

Doch ist der Beweis nicht rein geometrisch, und folglich dem vorigen nicht vorzuziehen.

A. d. Uebers.

Anmerkung. Dieser Satz ist im Grunde mit dem 22n Satze des 5n Buches eins; denn wenn O der Mittelpunct der Kugel ist, so kann man sich in O einen, von den ebenen Winkeln AOB, BOC, COD etc. gebildeten Körperwinkel vorstellen, und die Summe dieser ebenen Winkel ist kleiner als vier rechte, welches hier behauptet wird. Der Beweis aber ist von demjenigen im fünften Buche verschieden. An beiden Orten wird übrigens vorausgesetzt, daſs das Vieleck ABCDZ keine einspringende Winkel hat, oder daſs keine Seite verlängert, die Figur schneidet.

Sechster Satz.

Lehrsatz.

Fig. 220. *Wenn man den Durchmesser DE auf die Ebene eines gröſsten Kreises AMB senkrecht zieht, so sind die Endpuncte dieses Durchmessers Pole des Kreises AMB, und aller mit demselben parallelen kleinen Kreise wie FNG.*

Denn weil DC auf der Ebene AMB senkrecht ist, so ist es auch auf allen den graden Linien CAM, C, CB etc. senkrecht, welche in dieser Ebene durch seinen Fuſs gehen; also sind alle die Bogen DA, DM, DB etc. Viertelkreise. Eben dieses sind die Bogen EA, EM, EB etc.; also sind die Puncte D und E von allen Puncten des Umfanges AMB gleich weit entfernt, mithin sind sie Pole des Umfanges (5te Erkl.).

Zweytens ist der auf der Ebene AMB senkrechte Halbmesser DC auch auf der parallelen Ebene FNG senkrecht; mithin geht er durch den Mittelpunct O des Kreises FNG (1r S.); folglich entfernen sich die schrägen Linien DF, DN, DG gleich weit von dem Perpendikel DO, und sind einander gleich. Da aber die Sehnen gleich sind, so sind auch die Bogen gleich; also sind alle

Bogen DF, DN, DG etc. einander gleich, mithin ist der Punct D ein Pol des kleinen Kreises FNG, und aus den nämlichen Gründen ist E der andere Pol.

Erster Zusatz. Jeder Bogen DM von einem Puncte des gröfsten Kreises AMB nach seinem Pole ist ein Viertelkreis, welcher der Kürze wegen auch *Quadrant* heifsen soll. Ein solcher Quadrant macht zugleich einen rechten Winkel mit dem Bogen AM. Denn weil die Linie DC auf der Ebene AMC senkrecht steht, so ist jede Ebene DMC durch die Linie DC senkrecht auf der Ebene AMC (6s B. 18r S.); folglich ist der Winkel zwischen diesen Ebenen, das heifst, nach der 6ten Erklärung, der Winkel AMD, ein rechter Winkel.

Zweyter Zusatz. Um den Pol eines gegebenen Bogens AM zu finden, ziehe man den unbestimmten Bogen MD auf AM senkrecht, und mache MD einem Viertelkreise gleich, so ist D einer der Pole des Bogens MD; oder man ziehe auch in den beiden Puncten A und M die Bogen AD und MD auf AM senkrecht, so ist der Durchschnittspunct D dieser beiden Bogen der gesuchte Pol.

Dritter Zusatz. Umgekehrt, wenn die Entfernung des Puncts D von jedem der Puncte A und M einem Quadranten gleich ist, so behaupte ich, dafs der Punct D der Pol des Bogens AM ist, und dafs zugleich die Winkel DAM und AMD rechte sind.

Denn der Mittelpunct der Kugel sey C. Man ziehe die Halbmesser CA, CD, CM. Weil die Winkel ACD und MCD rechte sind, so ist die Linie CD auf den beiden Linien CA und CM, und folglich auf ihrer Ebene senkrecht; mithin ist der Punct D der Pol des Bogens AM, und folglich sind die Winkel DAM und AMD rechte.

Anmerkung. Die Eigenschaften der Pole machen, dafs es eben so leicht ist, auf der Kugelfläche Kreisbogen zu ziehen, als auf der Ebene. Man sieht z. B. dafs wenn man den Bogen DF, oder jede andere Linie von derselben Länge um den Punct D dreht, der Endpunct F einen kleinen Kreis FNG, und wenn man den Quadranten DFA um den Punct D dreht, der Endpunct A einen Bogen des gröfsten Kreises AM beschreibt.

Wenn der Bogen AM verlängert werden soll, oder wenn nur die Puncte A und M gegeben sind, durch welche der Bogen gehen soll, so wird der Pol D mittelst des Durchschnitts der Bogen bestimmt, die aus dem Puncte A und M mit Halbmessern beschrieben werden, welche den Sehnen des Quadranten gleich sind. Ist der Pol D gefunden, so beschreibt man mit dem nämlichen Halbmesser aus D den Bogen AM und seine Verlängerung.

Soll endlich aus dem gegebenen Puncte P ein Bogen auf einen gegebenen Bogen AM senkrecht gezogen werden, so verlängert man den letztern bis S, so weit bis PS einem Quadranten gleich ist. Dann beschreibt man aus dem Pole S mit dem nämlichen Halbmesser den Bogen PM, welcher der verlangte senkrechte Bogen ist.

Siebenter Satz.

Lehrsatz.

Jede im Endpuncte eines Halbmessers auf demselben senkrechte Ebene berührt die Kugelfläche.

Fig. 226. FAG sey eine auf dem Halbmesser OA durch seinen Endpunct senkrechte Ebene. Nimmt man in dieser Ebene einen beliebigen Punct M an, und zieht OM und AM, so ist der Winkel OAM ein rechter, und folglich die Linie OM länger als OA. Der Punct M liegt also ausserhalb der Kugel, und weil es sich eben so

für jeden andern Punct der Ebene FAG verhält, so folgt, dafs diese Ebene nur einen einzigen Punct A mit der Kugelfläche gemein hat, mithin berührt sie diese Fläche (4te Erkl.).

Anmerkung. Es kann eben so bewiesen werden, dafs zwey Kugelflächen nur einen Punct mit einander gemein haben, und folglich einander berühren, wenn die Entfernung ihrer Mittelpuncte gleich ist der Summe oder dem Unterschiede ihrer Halbmesser. Die Mittelpuncte und der Berührungspunct liegen dann immer in grader Linie.

Achter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 226. *Der Winkel BAC, welchen zwey Bogen gröfster Kreise AB und AC mit einander machen, ist gleich dem Winkel FAG zwischen den Tangenten dieser Bogen im Puncte A; er hat auch zum Maafse den Bogen DE, aus dem Puncte A als Pol beschrieben, so weit er zwischen den Seiten AB und AC liegt, und verlängert, wenn es nöthig ist.*

Denn die Tangente AF in der Ebene des Bogens AB, ist auf dem Halbmesser AO senkrecht; die Tangente AG in der Ebene des Bogens AC, ist auf dem nämlichen Halbmesser AO senkrecht. Also ist der Winkel FAG gleich dem Winkel zwischen den Ebenen OAB und OAC (5s B. 17r S.), welcher auch der Winkel zwischen den Bogen AB und AC ist, und durch BAC bezeichnet werden kann.

Ferner, wenn der Bogen AD ein Quadrant ist, wie AE, so sind die Linien OD und OE auf AO senkrecht, und der Winkel DOE ist auch hier dem Winkel zwischen den Ebenen AOD und AOE gleich; folglich ist DE das Maafs des Winkels dieser Ebenen, oder das Maafs des Winkels CAB.

Zusatz. Die Winkel der Kugeldreyecke können unter einander mittelst Bogen gröſster Kreise verglichen werden, welche aus ihren Scheiteln, als aus Polen beschrieben, und von den Seiten begrenzt werden. Auf diese Weise läſst sich auch ein Winkel einem gegebenen Winkel gleich machen.

Fig. 228. *Anmerkung.* Im Scheitel gegenüberstehende Winkel wie ACO, und BCN sind gleich, denn beide liegen zwischen den Ebenen ACB und OCN.

Auch sieht man, daſs, wenn zwey Bogen ACB und OCN zusammenstoſsen, die beiden an einander liegenden Winkel ACO und OCB zusammen allezeit gleich zwey rechten sind *).

Neunter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 227. *Wenn ein Dreyeck ABC gegeben ist, und man beschreibt aus den Puncten A, B, C als aus Polen, die Bogen EF, FD, DE, daſs sie das Dreyeck DEF bilden, so sind umgekehrt die drey Puncte D, E, F die Pole der Seiten BC, AC und AB.*

Denn da der Punct A der Pol des Bogens EF ist, so ist AE ein Quadrant, und weil C der Pol des Bogens DE ist, so ist auch CE ein Quadrant; also ist der Punct E um einen Quadranten von jedem der Puncte A und C entfernt; folglich ist er der Pol des Bogens AC (6r S. 3r Zusatz). Eben so wird bewiesen, daſs D der Pol des Bogens BC und F der Pol des Bogens AB ist.

Zusatz. Folglich kann das Dreyeck ABC eben so mittelst des Dreyecks DEF beschrieben werden, wie DEF mittelst des Dreyecks ABC.

*) Diese Sätze sind denen von Scheitel- und Nebenwinkeln in der Ebene ähnlich. A. d. Uebers.

Zehnter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 227. *Es sey alles wie im vorigen Lehrsatze, so hat jeder Winkel in den Dreyecken ABC und DEF zum Maafs den halben Umfang weniger der gegenüberstehenden Seite im andern Dreyecke.*

Man verlängere, wenn es nöthig ist, die Seiten AB und AC, bis sie EF in G und H schneiden, so hat der Winkel A, weil der Punct A der Pol von GH ist, zum Maafse den Bogen GH, Aber der Bogen EH ist ein Quadrant, wie GF, weil E der Pol von AH und F der Pol von AG ist, also ist EG + GF ein halber Umfang, Aber EH + GF ist mit EF + GH einerley; also ist der Bogen GH, welcher den Winkel A misset, gleich einem halben Umfange weniger der Seite EF; eben so hat der Winkele B zum Maafs ½ Umf. — DF, und der Winkel C zum Maafse ½ Umf. — DE.

Diese Eigenschaft kommt den beiden Dreyecken wechselseitig zu, weil sie auf die nämliche Art eines durch das andere beschrieben werden. Also haben die Winkel D, E, F des Dreyecks DEF der Reihe nach, ½ Umf. — BC, ½ Umf. — AC, ½ Umf. AB zum Maafse. In der That hat z. B. der Winkel D den Bogen MI zum Maafse. Es ist aber MI + BC = MC + BI = ½ Umf.; also ist der Bogen MI, oder das Maafs des Winkels D = ½ Umf. — BC und so die andern.

Fig. 228. *Anmerkung.* Es lassen sich ausser dem Dreyecke DEF noch drey andere durch die Durchschnitte der drey Bogen DE, EF, DF bilden. Aber der gegenwärtige Satz findet nur für das centrale Dreyeck Statt, welches sich von den drey andern dadurch unterscheidet, dafs die beiden Winkel A und D auf der nämlichen Seite von BC, die beiden B und E auf der

Fig. 227. nämlichen Seite von AC, und die beiden C und F auf der nämlichen Seite von AB liegen.

Man giebt den beiden Dreyecken ABC und DEF verschiedene Namen. Wir wollen sie *Polardreyecke* nennen.

Eilfter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 229. *Wenn das Dreyeck ABC gegeben ist, und man beschreibt aus dem Pole A mit AC den Bogen eines kleinen Kreises DEC, und aus dem Pole B mit BC eben so den Bogen DFC, und zieht aus dem Puncte D, wo sich die Bogen DFC und DEC schneiden, die Bogen gröſster Kreise AD und DB, so behaupte ich, daſs in dem dadurch gebildeten Dreyecke ADB, alle Theile denen des Dreyecks ACB gleich sind.*

Denn vermöge der Construction ist AD = AC und DB = BC, AB aber ist gemeinschaftlich, also sind die Seiten der beyden Dreyecke einzeln gleich. Nun behaupte ich, daſs auch die den gleichen Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich sind.

Denn man setze den Mittelpunct der Kugel in O, so kann man sich in O einen, von den drey ebenen Winkeln AOB, AOC und BOC gebildeten, Körperwinkel vorstellen; desgleichen einen Körperwinkel mit den Ebenen AOB, AOD und BOD. Da nun die Seiten des Dreyeck ABC. den Seiten des Dreyecks ABD gleich sind, so sind die ebenen Winkel, welche einen dieser Körperwinkel bilden, den ebenen Winkeln, welche den andern Körperwinkel bilden, gleich; es ist aber für diesen Fall schon bewiesen (5s B. 23r S.), daſs die Ebenen, in welchen sich die gleichen Winkel befinden, gegen einander einerley Neigung haben; mithin sind die Winkel des Kugeldreyecks DAB den Winkeln des Ku-

geldreyecks CAB gleich, nämlich DAB = BAC, DBA = ABC und ADB = ACB; folglich sind die Seiten und Winkel des Dreyecks ADB den Seiten und Winkeln des Dreyecks ACB gleich.

Anmerkung. Die Gleichheit dieser Dreyecke ist indessen keine absolute, oder kein Decken; denn es kann gleichwol unmöglich seyn, das eine Dreyeck genau in das andere zu legen, in sofern sie nicht wenigstens gleichschenklig sind. Diese Gleichheit ist die, welche wir symmetrische genannt haben. Deshalb sollen auch die Dreyecke ACB und ADB *symmetrische* heifsen.

Zwölfter Satz.

Lehrsatz.

Zwey Dreyecke auf einer und derselben Kugelfläche, oder auf gleichen Kugelflächen, sind in allen ihren Theilen gleich, wenn ein Winkel und die beiden ihn einschliessenden Seiten in dem einen so grofs sind als in dem andern.

Fig. 230. Es sey die Seite AB = EF, die Seite AC = EG und der Winkel BAC = FEG, so kann das Dreyeck EFG in das Dreyeck ABC, oder in das mit diesem symmetrischen ABD eben so gelegt werden, wie zwey gradlinige Dreyecke, die einen gleichen Winkel zwischen gleichen Seiten haben; folglich sind alle Bestimmungsstücke des Dreyecks EFG denen des Dreyecks ABC gleich, das heifst, ausser den drey Stücken, welche der Voraussetzung nach gleich sind, ist die Seite BC = FG, der Winkel ABC = EFG, und der Winkel ACB = EGF.

Dreyzehnter Satz.

Lehrsatz.

Zwey Dreyecke in einer und derselben oder in gleichen Kugelflächen, sind in allen ihren Theilen gleich, wenn eine

Seite und die beiden daran liegenden Winkel in dem einen so groſs sind, als in dem andern.

Denn das eine Dreyeck kann in das andere, oder in sein symmetrisches eben so gelegt werden, wie im gleichen Falle gradlinigte Dreyecke. (Man sehe den 7ten Satz im 1sten Buche.)

Vierzehnter Satz.

Lehrsatz.

Wenn alle drey Seiten in einem Kugeldreyecke einzeln so groſs sind als die drey Seiten in einem Andern, so sind auch alle drey Winkel gleich, und die gleichen Winkel liegen den gleichen Seiten gegenüber.

Fig. 229. Dieser Satz folgt aus dem eilften Satze, welchem zufolge mit drey gegebenen Seiten AB, AC, BC, nur zwey Dreyecke ACB und ABD beschrieben werden können, die in Rücksicht der Lage ihrer Theile verschieden, in Rücksicht der Gröſse derselben aber gleich sind. Also sind zwey Dreyecke mit einerley Seiten entweder völlig, oder wenigstens symmetrisch gleich. In beiden Fällen haben sie einerley Winkel und die nämlichen Winkel stehen den nämlichen Seiten gegenüber.

Funfzehnter Satz.

Lehrsatz.

In jedem gleichschenkligen Kugeldreyecke liegen den gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber; und umgekehrt, wenn ein Kugeldreyeck zwey gleiche Winkel hat, so ist es gleichschenklig.

Fig. 231. *Erstlich.* Es sey die Seite AB = AC, so behaupte ich, daſs der Winkel C = B ist: denn zieht man aus dem Scheitel A nach der Mitte der Grundlinie D den Bogen AD, so haben die beiden Dreyecke ABD

und ADC einerley Seiten, nämlich AD gemeinschaftlich, BD = DC und AB = AC; folglich sind in denselben nach dem vorigen Lehrsatze die Winkel gleich, und folglich ist B = C.

Zweytens. Es sey der Winkel B = C, so behaupte ich, dafs AC = AB; denn wäre nicht die Seite AB = AC, so sey AB die gröfsere. Man mache BO = AC und ziehe OC. Die beiden Seiten BO und BC wären alsdann den beiden Seiten AC und BC gleich; der Winkel zwischen den ersten OBC wäre gleich dem Winkel zwischen den andern ACB; folglich wären alle übrigen Bestimmungsstücke der beiden Dreyecke BOC und AOB gleich, und es wäre der Winkel OCB = ABC. Aber nach der Voraussetzung ist der Winkel ABC = ACB; also wäre OCB = ACB, welches unmöglich ist; mithin kann AB von AC nicht verschieden seyn; folglich sind die den gleichen, B und C gegenüberliegenden Seiten AB und AC gleich.

Anmerkung. Aus dem nämlichen Beweise folgt, dafs der Winkel BAD = DAC und der Winkel BDA = ADC ist; folglich sind diese beiden Winkel rechte; *mithin ist der aus dem Scheitel eines gleichschenkligen Kugeldreyecks nach der Mitte der Grundlinie gezogene Bogen, auf dieser Grundlinie senkrecht, und halbirt den Winkel am Scheitel.*

Sechszehnter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 232. *Wenn in einem Kugeldreyecke ABC der Winkel A gröfser ist als der Winkel B, so ist die dem Winkel A gegenüberliegende Seite BC gröfser als die dem Winkel B gegenüberliegende Seite AC; und umgekehrt, wenn die Seite BC gröfser ist als CA, so ist der Winkel A gröfser als der Winkel B.*

Erstlich. Es sey der Winkel A > B. Man mache den Winkel BAD = B, so ist AD = DB (15r S.). Aber AD + DC > AC. Setzt man DB statt AD, so erhält man DB + DC oder BC > AC.

Zweytens. Wenn BC > AC, so behaupte ich, dafs der Winkel BAC gröfser ist als ABC; denn wäre BAC = ABC, so wäre BC = AC, und wäre BAC < ABC, so wäre vermöge des eben bewiesenen Satzes BC < AC, welches beides gegen die Voraussetzung ist. Also ist der Winkel BAC gröfser als der Winkel ABC.

Siebzehnter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 233. *Wenn die beiden Seiten AB und AC des Kugeldreyecks ABC, den beiden Seiten DE und DF des Dreyecks DEF, welches in der nämlichen Kugelfläche liegt, gleich sind, der Winkel A aber gröfser ist als der Winkel D, so behaupte ich, dafs die dritte Seite BC des ersten Dreyecks gröfser ist, als die dritte Seite EF des zweyten.*

Der Beweis ist dem des zehnten Satzes im ersten Buche vollkommen ähnlich *).

Achtzehnter Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwey Dreyecke auf einer und derselben Kugelfläche, oder auf gleichen Kugelflächen einerley Winkel haben, so haben sie auch einerley Seiten.

A und B sollen die beiden gegebenen Dreyecke, P und Q ihre Polardreyecke seyn, weil die Dreyecke A und B einerley Winkel haben, so haben die Polardrey-

*) Alle diese Sätze vom 12ten ab, correspondiren mit ganz ähnlichen Sätzen von gradlinigen Dreyecken.

A. d. Uebers.

ecke P und Q einerley Seiten (10r S.). Weil aber die Polardreyecke P und Q einerley Seiten haben, so haben sie auch einerley Winkel (14r S.). Und endlich, weil die Dreyecke P und Q einerley Winkel haben, so haben die Dreyecke A und B, die wiederum die Polardreyecke von P und Q sind, einerley Seiten (10r S.). Also haben die Dreyecke A und B zugleich mit einerley Winkeln auch einerley Seiten.

Der Satz läſst sich auch wie folgt, ohne die Polardreyecke beweisen.

Fig. 234. Die Dreyecke ABC und DEF sollen einerley Winkel haben, so daſs A = D, B = E, C = F, so behaupte ich, daſs die Seiten AB = DE, AC = DF und BC = EF sind.

Man mache in der Verlängerung der Seiten, AB und AC, AG = DE und AH = DF, ziehe GH und verlängere die Bogen BC und GH bis sie sich in I und K schneiden.

Nach der Construction sind die beiden Seiten AG und AH den Seiten DF und DE gleich. Der eingeschlossene Winkel GAH ist gleich BAC = EDF; also sind die Dreyecke AGH und DEF in allen ihren Theilen gleich (12r S.); also ist der Winkel AGH = DEF = ABC und der Winkel AHG = DFE = ACB.

In den Dreyecken IBG und KBG, ist die Seite BG gemeinschaftlich, und der Winkel IBG = GBK. Da nun IGB + BGK gleich zwey rechten ist, eben wie GBK + IBG, so ist BGK = IBG; folglich sind die Dreyecke IBG und GBK gleich (13r S.), und es ist IG = BK und IB = GK.

Eben so kann man, daraus, daſs der Winkel AHG = ACB ist, schlieſsen, daſs die Dreyecke ICH und HCK eine gleiche Seite zwischen zwey gleichen Win-

keln haben; also sind sie gleich, und es ist IH = CK und HK = IC.

Zieht man nun von den gleichen Linien BK und IG die gleichen Linien CK und IH ab, so sind die Reste BC und GH gleich. Aufserdem ist der Winkel BCA = AHG und der Winkel ABC = AGH; folglich sind in den Dreyecken ABC und AHG zwey Winkel und die Seite dazwischen die nämlichen, mithin sind sie gleich; aber die Dreyecke DEF und AHG sind in allen ihren Theilen gleich, also sind auch die Dreyecke DEF und ABC gleich, und man erhält AB = DE, AC = DF, BC = EF; folglich haben zwey Kugeldreyecke zugleich die nämlichen Seiten, wenn sie die nämlichen Winkel haben, und zwar den nämlichen Winkeln gegenüber.

Anmerkung. Dieser Satz findet bey gradlinigen Dreyecken nicht Statt, wo aus der Gleichheit der Winkel nur die Proportionalität der Seiten geschlossen werden kann.

Es ist leicht einzusehen woher dieser Unterschied zwischen gradelinigen und Kugeldreyecken komme. In dem gegenwärtigen Satze nämlich, eben wie in den Sätzen 12. 13. 14 und 17, wo Kugeldreyecke mit einander verglichen werden, ist ausdrücklich gesagt, dafs diese Dreyecke auf einer und derselben Kugelfläche, oder auf gleicken Kugelflächen gezogen seyn sollen. Nun verhalten sich ähnliche Bogen wie die Halbmesser, also können zwey Dreyecke auf gleichen Kugeln nicht ähnlich seyn, ohne dafs sie auch gleich wären. Es ist also nicht befremdend, dafs die Gleichheit der Winkel und die Gleichheit der Seiten zugleich Statt finden.

Es würde nicht so seyn, wenn die Dreyecke auf ungleichen Kugelflächen beschrieben wären. Alsdann

würden die Dreyecke ähnlich seyn, wenn die Winkel gleich sind, und die ähnlich liegenden Seiten würden sich wie die Halbmesser der Kugeln verhalten.

Neunzehnter Satz.

Lehrsatz.

Die Summe der Winkel jedes Kugeldreyecks ist kleiner als sechs, und gröſser als zwey rechte.

Denn *Erstlich* ist jeder Winkel eines Kugeldreyecks kleiner als zwey rechte. (Man sehe die unten folgende Anmerkung.) Also ist die Summe der drey Winkel kleiner als sechs rechte.

Zweytens ist das Maaſs jedes Winkels eines Kugeldreyecks gleich dem halben Umfange weniger der zugehörigen Seite des Polardreyecks (10r S.). Also hat die Summe der drey Winkel zum Maaſse drey halbe Umfänge weniger der Summe der Seiten des Polardreyecks. Diese letzte aber ist kleiner als ein ganzer Umfang (4r S.); also ist der Rest, wenn man diese Summe von drey halben Umfängen abzieht, gröſser als ein halber Umfang, welcher das Maaſs von zwey rechten Winkeln ist; folglich ist zweytens die Summe der drey Winkel eines Kugeldreyecks gröſser als zwey rechte.

Erster Zusatz. Die Summe der Winkel ist nicht in allen Kugeldreyecken gleich groſs wie in gradlinigen Dreyecken; sie wechselt von zwey bis zu sechs rechten Winkeln, kann aber beyde Grenzen nicht erreichen. Zwey gegebene Winkel bestimmen also den dritten nicht.

Zweyter Zusatz. Ein Kugeldreyeck kann zwey und drey rechte, zwey und drey stumpfe Winkel haben.

Fig. 235. Wenn das Dreyeck ABC *zweyrechtwinklig* (bi-rectangle) ist, das heiſst, wenn es zwey rechte

Winkel B und C hat, so ist der Scheitel A der Pol der Grundlinie BC (6r S.), und die Seiten AB und AC sind Quadranten.

Wenn auch der dritte Winkel A ein rechter ist, so ist das Dreyeck ABC *dreyrechtwinklig* (tri-rectangle). Alle seine Winkel sind dann rechte und die Seiten Quadranten. Das dreyrechtwinklige Dreyeck ist achtmal in der Kugelfläche enthalten. Dieses zeigt sich in der 236n Figur, wenn daselbst der Bogen MN einen Quadrant bedeutet.

Anmerkung. Bey allem Obigen wird vorausgesetzt, dafs die Seiten der Kugeldreyecke, nach der sechsten Erklärung, kleiner sind als halbe Umfänge; hieraus folgt, dafs die Winkel kleiner sind als zwey rechte; denn wenn die Seiten AB und AC kleiner sind als Fig. 224. halbe Umfänge so müssen sich diese Bogen verlängert in D schneiden. Aber die beiden Winkel ABC und CBD zusammen betragen zwey rechte, also ist der Winkel ABC allein, kleiner als zwey rechte.

Es giebt indefs Kugeldreyecke, mit Seiten die gröfser sind als halbe Umfänge, und mit Winkeln die gröfser sind als zwey rechte. Denn wenn man die Seite AC bis zu einem ganzen Umfange ACE verlängert, so ist das was übrig bleibt, wenn man das Dreyeck ABC von der Halbkugel abzieht, ein neues Dreyeck, welches auch durch ABC bezeichnet werden kann, und dessen Seiten AB, BC und AEDC sind. Die Seite AEDC ist gröfser als der halbe Umfang AED, und der gegenüberliegende Winkel B um CBD gröfser als zwey rechte.

Dafs bey der Erklärung der Dreyecke solche Dreyecke, deren Seiten und Winkel gröfser als zwey rechte sind, ausgeschlossen wurden, geschah deshalb, weil ihre Auflösung oder die Bestimmung ihrer Theile mit

der Auflösung von Dreyecken, welche der Erklärung gemäfs sind, überein kommt.

Denn man sieht leicht, dafs, wenn man die Winkel und Seiten des Dreyecks ABC kennt, auch die Winkel und Seiten des andern Dreyecks ABC, welches von der Halbkugel übrig bleibt, bekannt sind.

Zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

Fig. 236. *Das Zweyeck AMBNA verhält sich zur Kugelfläche wie der Winkel MAN des Zweyecks zu vier rechten, oder wie der Bogen MN, welcher diesen Winkel mifst, zum Umfange.*

Ist der Bogen MN zum Umfange MNPQ in einem rationalen Verhältnisse, z. B. wie 5 zu 48, so theile man den Umfang in 48 Theile, von welchen dann MN fünf enthält. Nun ziehe man durch den Pol und die Theilungspuncte eben so viele Viertelkreise, so hat man 48 Dreyecke in der Halbkugel AMNPQ, welche alle einander gleich sind, weil sie alle die nämlichen Bestimmungsstücke haben. Die ganze Kugel enthält also 96 dieser partiellen Dreyecke und das Zweyeck AMBNA, 10; also verhält sich das Zweyeck zur Kugel wie 10 zu 96, oder wie 5 zu 48, das heifst wie der Bogen MN zum Umfange.

Ist der Bogen MN zu dem Umfange nicht commensurabel, so wird aus den nämlichen Gründen, die man schon bey mehreren Beyspielen sahe *), beweisen, dafs sich das Zweyeck immer zur Kugel verhält wie der Bogen MN zum Umfange.

*) Und welche auch in einen *allgemeinen* Beweis gebracht werden können. A. d. Uebers.

Erster Zusatz. Zweyecke verhalten sich wie ihre Winkel.

Zweyter Zusatz. Oben wurde bemerkt, daſs die ganze Kugelfläche acht dreyrechtwinkligen Dreyecken gleich ist (19r S.). Wird also die Fläche eines dieser Dreyecke zur Einheit angenommen, so läſst sich die Kugelfläche durch die Zahl 8 ausdrücken. Die Fläche des Zweyecks, dessen Winkel A ist, kann durch 2A ausgedrückt werden (wenn die Einheit des Winkels A der rechte Winkel ist). Denn es ist $2A : 8 = A : 4$. Es giebt also hier zwey verschiedene Einheiten: die eine für die Winkel, welche der rechte Winkel ist; die andere für die Flächen, welche das dreyrechtwinklige oder dasjenige Kugeldreyeck ist, dessen Winkel alle rechte, und dessen Seiten alle Quadranten sind.

Anmerkung. Der Kugelschnitt, welcher zwischen den Ebenen AMB und ANB liegt, verhält sich zum Körper der ganzen Kugel, wie der Winkel A zu vier rechten. Denn wenn die Zweyecke gleich sind, so sind auch die Schnitte gleich; folglich verhalten sich zwey Schnitte wie die Winkel zwischen den Ebenen von welchen sie begrenzt werden.

Ein und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

Symmetrische Kugeldreyecke sind gleichen Inhalts.

Fig. 237. ABC und DEF sollen zwey symmetrische Dreyecke seyn, das heiſst, zwey Dreyecke, welche die nämlichen Seiten haben, so daſs AB = DE, AC = DF, CB = EF, jedoch so, daſs sie nicht in einander gelegt werden können; so behaupte ich, daſs ABC und DEF an Inhalt gleich sind.

P sey der Pol des kleinen Kreises durch die drey Puncte A, B und C *). Aus diesen Puncten ziehe man die gleichen Bogen PA, PB, PC (6r S.). Im Puncte F mache man den Winkel DFQ = ACP, den Bogen FQ = CP und ziehe DQ und EQ.

Die Seiten DF und FQ sind den Seiten AC und CP gleich. Die Winkel DFQ und ACP sind auch gleich, also sind die beiden Dreyecke DFQ und ACP in allen ihren Theilen gleich (12r S.); folglich sind die Seiten DQ und AP und die Winkel DQF und APC gleich.

Da in den gegebenen Dreyecken DFE und ABC die Winkel DFE und ACB, die den Seiten DE und AB gegenüber liegen, gleich sind (11r S.), so bleibt, wenn man die nach der Construction gleichen Winkel DFQ und ACP abzieht, der Winkel QFE gleich PCB übrig. Ferner sind die Seiten QF und FE den Seiten PC und CB gleich, also sind die Dreyecke FQE und CPB in allen ihren Theilen gleich; folglich sind auch die Seiten QE und PB und die Winkel FQE und CPB gleich.

Erwägt man, dafs zugleich die Dreyecke DFQ und ACP, welche einerley Seiten haben, gleichschenklig sind, so folgt, dafs sie eines in das andere gelegt werden können: denn wenn PA auf QF gelegt worden, so wird die Seite PC in die gleiche Seite QD fallen, folglich fallen die beiden Dreyecke ganz in einander; mithin sind sie einander, und die Flächen DQF und APC sind an Inhalt gleich. Aus demselben Grunde sind die

*) Der Kreis durch die drey Puncte A, B und C, oder der um das Dreyeck ABC beschriebene Kreis kann nur ein kleiner Kreis auf der Kugelfläche seyn; denn wäre er ein gröfster Kreis, so würden die drey Seiten AB, BC, AC in einer und derselben Ebene liegen: das Dreyeck ABC würde sich auf eine seiner Seiten reduciren.

A. d. Verf.

Flächen FQE und CPB und DQE und APB gleich. Also ist DQF + FQE — DQE = APC + CPB — APB oder DEF = ABC; folglich sind die symmetrischen Dreyecke ABC und DEF an Inhalt gleich.

Anmerkung. Die Pole P und Q könnten innerhalb der Dreyecke ABC und DEF liegen, alsdann müſste man die Dreyecke DQF, FQE und DQE addiren, um das Dreyeck DEF zusammenzusetzen; eben so die drey Dreyecke APC, CPB und APB, um das Dreyeck ABC zusammenzusetzen. Beweis und Folgerung würden aber die nämlichen seyn.

Zwey und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

Fig. 238. *Wenn sich zwey gröſste Kreise AOB und COD wie man will in der Halbkugel AOCBD schneiden, so ist die Summe der gegenüberliegenden Dreyecke AOC und BOD gleich einem Zweyecke, dessen Winkel BOD ist.*

Denn wenn man die Bogen OB und OD verlängert bis sie sich in der andern Halbkugel in N schneiden, so ist OBN ein halber Umfang, eben wie AOB. Zieht man auf beiden Seiten OB ab, so erhält man BN = AO. Aus demselben Grunde ist DN = CO und BD = AC; also haben die beiden Dreyecke AOC und BDN einerley Seiten. Auſserdem liegen sie so, daſs sie symmetrisch sind, also sind sie an Inhalt gleich (21r S.), und die Summe der Dreyecke AOC und BOD ist so groſs als das Zweyeck OBNDO, dessen Winkel BOD ist.

Anmerkung. Es ist auch klar, daſs die beiden Kugelpyramiden, welche die Dreyecke AOC und BOD zu Grundflächen haben, zusammengenommen dem Kugelschnitte gleich sind, dessen Winkel BOD ist.

Drey und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

Die Oberfläche jedes beliebigen Kugeldreyecks hat zum Maafse den Ueberschufs der Summe seiner drey Winkel über zwey rechte *).

Fig. 239. ABC sey das gegebene Dreyeck. Man verlängere seine Seiten bis sie den gröfsten Kreis DEFG schneiden, welcher beliebig ausserhalb des Dreyecks gezogen ist. Nach dem vorigen Lehrsatze sind die beiden Dreyecke ADE und AGH zusammengenommen dem Zweyecke gleich, dessen Winkel A ist, und welches 2 A zum Maafse hat (20r S.). Also ist $ADE + AGH = 2A$. Aus demselben Grunde ist $BGF + BID = 2B$ und $CIH + CFE = 2C$. Aber die Summe dieser sechs Dreyecke übertrifft die Halbkugel um das doppelte Dreyeck ABC. Die Halbkugel aber wird durch die Zahl 4 ausgedrückt. Also ist das doppelte Dreyeck $ABC = 2A + 2B + 2C - 4$, und folglich

$$ABC = A + B + C - 2;$$

folglich hat jedes Kugeldreyeck zum Maafse die Summe seiner Winkel weniger zwey rechte.

Erster Zusatz. So viel rechte Winkel in diesem Maafse enthalten sind, so viel dreyrechtwinklige Dreyecke, oder Achttheile der Kugelfläche, welche die Einheiten der Fläche waren, enthält das gegebene Dreyeck (20r S.). Zum Beyspiel, wenn jeder Winkel $\frac{4}{3}$ eines rechten ist, so sind die drey Winkel zusammen gleich 4 rechten, und das gegebene Dreyeck wird durch $4 - 2$ oder 2 ausgedrückt, also ist es zwey dreyrechtwinkligen

*) Das heifst: *Die Oberfläche jedes beliebigen Kugeldreyecks verhält sich zur halben Kugelfläche wie der Ueberschufs der Summe seiner drey Winkel über zwey rechte, zu vier rechten.*
A. d. Uebers.

Dreyecken, oder einem Viertheile der Kugelfläche gleich.

Zweyter Zusatz. Das Kugeldreyeck ABC ist einem Zweyecke gleich, dessen Winkel $\frac{A + B + C}{2} - 1$ ist. Die Kugelpyramide, deren Grundfläche ABC ist, gleicht an körperlichen Inhalt einem Kugelschnitte, dessen Winkel $\frac{A + B + C}{2} - 1$ ist.

Anmerkung. So wie das Kugeldreyeck ABC mit dem dreyrechtwinkligen Dreyecke verglichen wurde, kann auch die Kugelpyramide, welche ABC zur Grundfläche hat, mit der dreyrechtwinkligen Pyramide verglichen werden, welches dieselbe Proportion giebt. Auch der Körperwinkel in der Spitze der Pyramide, läfst sich eben so mit dem Körperwinkel in der Spitze der dreyrechtwinkligen Pyramide vergleichen. Denn diese Vergleichung beruht auf das Ineinanderfallen der Theile. Fallen nun die Grundflächen der Pyramiden in einander, so ist klar, dafs auch die Pyramiden selbst und folglich auch die Körperwinkel an der Spitze in einander fallen müssen. Daraus folgt Nachstehendes:

Erstlich. Zwey dreyseitige Kugelpyramiden verhalten sich wie ihre Grundflächen; und weil eine vielseitige Pyramide in mehrere dreyseitige Pyramiden getheilt werden kann, so folgt, dafs sich zwey beliebige Kugelpyramiden wie die Vielecke verhalten, die ihre Grundflächen sind.

Zweytens. Die Körperwinkel an der Spitze zweyer Pyramiden verhalten sich ebenfalls wie die Grundflächen. Um also zwey beliebige Körperwinkel zu vergleichen, darf man nur ihre Spitzen in die Mittelpuncte zweyer gleichen Kugeln legen. Dann verhal-

ten sich die Körperwinkel wie die Kugelvielecke zwischen ihren Ebenen oder Seiten.

Der Winkel an der Spitze der dreyrechtwinkligen Pyramide wird von drey auf einander senkrechten Ebenen gebildet. Dieser Körperwinkel, welchen man *rechten Körperwinkel (angle solide droit)* nennen kann, eignet sich zum Maafse der andern Körperwinkel. Auf die Weise giebt die nämliche Zahl, welche die Fläche eines Kugelvielecks ausdrückt, das Maafs des zugehörigen Körperwinkels. Z. B. wenn die Fläche des Kugelvielecks $\frac{3}{4}$ ist, das heifst, wenn sie $\frac{3}{4}$ eines dreyrechtwinkligen Dreyecks ist, so ist auch der zugehörige Körperwinkel $\frac{3}{4}$ eines rechten Körperwinkels.

Vier und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

*Die Fläche eines Kugelwinkels hat zum Maafse die Summe seiner Winkel, weniger so viel mal zwey rechten, als das Vieleck Seiten hat, weniger zwey *).*

Fig. 240. Man ziehe von einer beliebigen Ecke des Vielecks nach allen übrigen Ecken Diagonalen AC, AD, so wird dadurch das Vieleck ABCDE in so viel Dreyecke getheilt, als es Seiten hat weniger zwey. Die Fläche jedes Dreyecks hat aber zum Maafse die Summe seiner Winkel weniger zwey rechten, und es ist klar, dafs die Summe aller Winkel der Dreyecke gleich ist der Summe der Winkel des Vielecks; also ist die Fläche des Vielecks gleich der Summe seiner Winkel weniger

*) Das heifst: *Die Fläche eines Kugelvielecks verhält sich zur Fläche der halben Kugel, wie der Ueberschufs der Summe seiner Winkel über so viel mal zwey rechte, als das Vieleck Seiten hat, weniger zwey, zu vier rechten.*

A. d. Uebers.

so viel mal zwey rechten, als es Seiten hat weniger zwey.

Anmerkung. Es sey s die Summe der Winkel eines Kugelvielecks, n die Zahl seiner Seiten; nimmt man den rechten Winkel zur Einheit an, so hat die Fläche des Kugelvielecks $s - 2(n - 2)$, oder $s - 2n + 4$ zum Maafse.

Fünf und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

S sey die Zahl der Körperwinkel eines Polyëders, H die Zahl seiner Seitenebenen, A die Zahl seiner Kanten; so behaupte ich, dafs immer $S + H = A + 2$ ist.

Man nehme innerhalb des Polyëders einen beliebigen Punct an, und ziehe von demselben nach allen Ecken grade Linien. Nun stelle man sich vor, dafs aus dem nämlichen Puncte eine Kugelfläche beschrieben sey; dieselbe wird von allen den Linien in eben so viel Puncten geschnitten; diese Puncte verbinde man mit einander durch Bogen gröfster Kreise, so dafs auf der Kugelfläche Vielecke entstehen, die den Seitenflächen des Polyëders entsprechen, und ihnen an Zahl gleich sind. Fig. 240. ABCDE sey eines dieser Vielecke und n die Zahl seiner Seiten, so ist seine Fläche $s - 2n + 4$, wenn s die Summe der Winkel A, B, C, D, E bedeutet. Drückt man auf diese Weise die Flächen aller Kugelvielecke aus und rechnet sie zusammen, so ist ihre Summe der Kugelfläche die durch 8 ausgedrückt wird, zugleich aber der Summe aller Winkel der Vielecke gleich, weniger zweymal die Zahl ihrer Seiten und plus viermal die Zahl der Flächen. Da nun aber alle Winkel welche um einen Punct liegen, zusammen gleich vier rechten sind, so ist die Summe aller Winkel der Vielecke gleich, so oft mal vier rechten als Körperwinkel da sind, also

gleich 4 S. Das Zweyfache der Zahl der Seiten AB, BC, CD etc., aber ist gleich dem Vierfachen der Zahl der Kanten oder gleich 4 A, weil jede Kante immer die Seite zweyer Seitenflächen zugleich ist. Also ist $8 = 4S - 4A + 4H$, oder wenn man auf jeder Seite den vierten Theil nimmt, $2 = S - A + H$, also

$$S + H = A + 2.$$

Zusatz. Hieraus folgt, *dafs die Summe der ebenen Winkel, welche die Körperwinkel eines Polyëders bilden, gleich ist, so oft mal vier rechten Winkeln, als Einheiten in S — 2 sind, wenn S die Zahl der Körperwinkel des Polyëders bedeutet.*

Denn betrachtet man eine Seitenfläche, deren Seitenzahl n ist, so ist die Summe der Winkel dieser Seitenfläche gleich 2n — 4 rechten Winkel (1s B. 25r S.). Aber die Summe aller 2n, oder das Zweyfache der Zahl der Seiten aller Seitenflächen ist = 4A, und die Zahl 4 so oft genommen als Seitenflächen da sind, ist = 4H; also ist die Summe der Winkel aller Seitenflächen = 4A — 4H. Aber nach dem vorhin bewiesenen Satze ist $A - H = S - 2$, also ist $4A - 4H = 4(S - 2)$. *Folglich ist die Summe der ebenen Winkel etc.*

Sechs und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

Fig. 272 u. 273. *Von allen Kugeldreyecken mit zwey gegebenen Seiten CB und CA und einer dritten willkürlichen, ist das gröfste Dreyeck ABC dasjenige, in welchem der Winkel C zwischen den gegebenen Seiten gleich ist der Summe der beiden andern Winkel A nnd B.*

Man verlängere die beiden Seiten AC und AB, bis sie sich in D schneiden, so entsteht ein Kugeldreyeck BCD, in welchem der Winkel BCD auch der Summe der beiden andern Winkel BDC und BCD gleich ist:

denn weil BCD + BCA zwey rechten Winkeln gleich ist, eben wie CBA + CBD, so ist BCD + BCA = CBA + CBD. Man füge BDC = BAC hinzu, so ist BCD + BCA + BDC = CBA + CBD + BAC. Aber nach der Voraussetzung ist BCA = CBA + BAC; also ist CBD = BCD + BDC.

Nun ziehe man BI unter dem Winkel CBI = BCD, so dafs also IBD = BDC, so sind die beiden Dreyecke IBC und IBD gleichschenklig, und es ist IC = IB = ID: also ist der Punct I, in der Mitte von DC, von den drey Puncten B, C und D gleich weit entfernt. Aus demselben Grunde ist der Punct O, in der Mitte von AB, von den drey Puncten A, B und C gleich weit entfernt.

Fig. 272. Nun sey CA' = CA, und der Winkel BCA' > BCA; zieht man A'B und verlängert die Bogen A'C und A'B bis sie sich in D' schneiden, so ist der Bogen D'CA' ein halber Umfang, eben wie DCA; also, weil CA' = CA, so ist auch CD' = CD. Aber in dem Dreyecke CID' ist CI + ID' > CD'; also ist ID' > CD — CI, oder ID' > ID.

Man halbire in dem gleichschenkligen Dreyecke CIB den Winkel I am Scheitel durch den Bogen EIF, welcher auf BC in dessen Mitte senkrecht stehen wird. Nimmt man nun zwischen I und E einen Punct L an, so ist die Entfernung BL, welche LC gleich ist, kleiner als BI; denn wie in dem 9ten Satze des 1sten Buchs kann bewiesen werden dafs BL + LC < BI + IC; also dafs, wenn man auf beiden Seiten die Hälfte nimmt, BL < BI. Aber in dem Dreyecke D'LC ist D'L > D'C — CL, und folglich um so mehr D'L > DC — CI, oder D'L > DI, oder D'L > BI; also D'L > BL. Sucht man also in dem Bogen EIF einen Punct in gleicher Entfernung von den drey Puncten B, C, D', so kann derselbe nur in der Verlängerung von EI nach F zu liegen. I' sey der ge-

suchte Punct, so dafs $D'I' = BI' = CI'$, so hat man die gleichen Winkel $I'BC = I'CB$, $I'BD' = I'D'B$, $I'CD' = I'D'C$, weil die Dreyecke $I'CB$, $I'CD'$ und $I'BD'$ gleichschenklig sind. Aber die Winkel $D'BC$ und CBA' betragen zusammen zwey rechte, eben wie $D'CB + BCA'$; also ist

$$D'BI' + I'BC + CBA' = 2$$
$$BCI' - I'CD' + BCA' = 2$$

Nimmt man die beiden Summen zusammen und erwägt, dafs $I'BC = BCI'$ und $D'BI' - I'CD' = B'DI' - I'D'C = CD'B = CAB'$, so erhält man

$$2\,I'BC + CA'B + CBA' + BCA' = 4;$$

also ist $CA'B + CBA' + BCA' - 2$ (welches das Maafs des Inhalts des Dreyecks $A'BC$ ist) $= 2 - 2\,I'BC$, so dafs der *Inhalt* von $A'BC = 2 - 2$ *Wink.* $I'BC$ ist; eben so ist für das Dreyeck ABC der *Inhalt* von $ABC = 2 - 2$ Wink. ABC. Bewiesenermaafsen ist aber der Winkel $I'BC$ gröfser als der Winkel IBC; also ist der Inhalt von $A'BC$ kleiner als der Inhalt von ABC.

Fig. 273. Der nämliche Beweis und die nämliche Folgerung findet Statt, wenn man, indem man den Bogen $CA' = CA$ nimmt, den Winkel $BC'A < BCA$ macht; also ist das Dreyeck ABC unter allen mit den zwey nämlichen gegebenen und einer dritten willkürlichen Seite das gröfseste.

Fig. 241. *Erste Anmerkung.* Das Dreyek ABC, das gröfste unter allen mit zwey gegebenen Seiten CA und CB, kann in einen Halbkreis beschrieben werden, dessen Durchmesser die Sehne der dritten Seite AB ist. Denn da O in der Mitte von AB liegt, so sind OC und OB gleich; folglich gehet der Umfang des kleinen Kreises, der aus dem Puncte O, als Pol, mit dem Abstande OB beschrieben wird, durch die drey Puncte A, B und C. Ferner ist die Linie BA ein Durchmesser dieses klei-

nen Kreises; denn der Mittelpunct, welcher zugleich in der Ebene des kleinen Kreises und in der Ebene des Bogens vom gröfsten Kreise BOA liegen mufs (1r S. 4r Zusatz), mufs nothwendig in den Durchschnitt dieser beiden Ebenen fallen, welcher die grade Linie BA ist; also ist BA ein Durchmesser.

Zweyte Anmerkung. Da in dem Dreyecke ABC der Winkel C der Summe der beiden andern A und B gleich ist, so folgt, dafs die Summe der drey Winkel dem doppelten Winkel C gleich ist. Aber diese Summe ist immer gröfser als zwey rechte; also ist der Winkel C immer gröfser als ein rechter.

Dritte Anmerkung. Wenn man die Seiten CB und CA verlängert bis sie sich in E schneiden, so ist das Dreyeck BAE gleich dem vierten Theile der Kugelfläche. Denn der Winkel E ist $= C = ABC + CAB$; also sind die drey Winkel des Dreyecks BAE zusammen den vieren ABC, ABE, CAB und BAE gleich, deren Summe gleich vier rechten ist; folglich ist der Inhalt des Dreyecks BAE $= 4 - 2 = 2$ (24r S.), welches der vierte Theil der Kugelfläche ist.

Vierte Anmerkung. Es würde kein Maximum geben, wenn die Summe der beiden gegebenen Seiten CA und CB gleich oder gröfser wären, als der halbe Umfang eines gröfsten Kreises. Denn weil das Dreyeck ABC in einen Halbkreis der Kugel eingeschrieben werden soll, so ist die Summe der beiden Seiten CA und CB kleiner als der halbe Umfang BCA (3r S.), und also kleiner als der halbe Umfang eines gröfsten Kreises.

Ein Maximum findet, im Fall die Summe der beiden gegebenen Seiten gröfser als der halbe Umfang eines gröfsten Kreises ist, deshalb nicht Statt, weil alsdann das Dreyeck immerfort zunimmt, je gröfser der von den gegebenen Seiten eingeschlossene Winkel ist; wächst

dieser Winkel bis zu zwey rechten, so fallen die drey Seiten in eine und dieselbe Ebene und bilden einen ganzen Kreisumfang. Das Kugeldreyeck wird alsdann der Halbkugel gleich, und hört auf ein Dreyeck zu seyn.

Sieben und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

Von allen Kugeldreyecken mit einer gegebenen Seite und gegebenem Umfange, ist das gröſseste dasjenige, in welchem die beiden nicht bestimmten Seiten gleich sind.

Fig. 242. Es sey AB die gegebene, den beiden Dreyecken ACB und ADB gemeinschaftliche Seite, und $AC + CB = AD + DB$, so behaupte ich, daſs das gleichschenklige Dreyeck ACB, in welchem $AC = CB$, gröſser ist, als das nicht gleichschenklige ADB.

Denn da diese Dreyecke den Theil AOB gemein haben, so darf nur gezeigt werden, daſs das Dreyeck BOD kleiner ist als AOC. Der Winkel CBA ist gleich CAB, und gröſser als OAB; also ist die Seite AO gröſser als OB (21r S.). Man mache $OI = OB$, $OK = OD$, und ziehe KI, so ist das Dreyeck $OKI = DOB$. Behauptet man nun, daſs das Dreyeck DOB, oder das ihm gleiche Dreyeck KOI nicht kleiner sey als OAC, so wäre es gleich oder gröſser. In beiden Fällen müſste der Punct K auf der verlängerten OC liegen, weil I zwischen A und O liegt, denn sonst würde das Dreyeck OKI in dem Dreyecke CAO enthalten, und folglich kleiner seyn. Nun ist CA der kürzeste Weg von C nach A und $CK + KI + IA > CA$. Aber $CK = OD - CA$, $AI = AO - OB$, $KI = BD$, also $OD - CO + AO - OB + BD > CA$ und reducirt $AD - CB + BD > CA$, oder $AD + BD > AC + CB$. Diese Ungleichheit ist aber der Voraussetzung $AD + BD = AC + CB$ entgegen,

also kann der Punct K nicht in die Verlängerung von OC fallen; folglich fällt er zwischen O und C, und folglich ist das Dreyeck KOI, oder das gleiche Dreyeck ODB kleiner als ACO, mithin das gleichschenklige Dreyeck ACB gröſser als das nicht gleichschenklige ADB von der nämlichen Grundlinie und gleichem Umfange.

Anmerkung. Die beiden letzten Sätze sind dem ersten und dritten Satze im Anhange zum vierten Buche ähnlich. Man kann also daraus für die Kugelvielecke Folgerungen ziehen, welche den dortigen für die gradlinigen Vielecke ähnlich sind.

Folgende sind die vorzüglichsten:

1. *Unter allen Kugelvielecken von gleichem Umfange und von der nämlichen Seitenzahl ist das gröſste das gleichseitige.*

Der Beweis ist der nämliche wie der des zweyten Satzes im Anhange zum vierten Buche.

2. *Unter allen Kugelvielecken, deren Seiten bis auf eine gegeben sind, ist das gröſste dasjenige, welches in einem Halbkreise beschrieben werden kann, dessen Durchmesser die Sehne der einen nicht bestimmten Seite ist.*

Der Beweis folgt aus dem 16ten Satze, wie man in dem vierten Satze des oben erwähnten Anhanges gesehen hat. Damit das Maximum Statt finde, muſs die Summe der gegebenen Seiten kleiner seyn als der halbe Umfang des gröſsten Kreises.

3. *Das gröſste unter allen Kugelvielecken von gegebenen Seiten ist dasjenige, welches in einem Kreise, der Kugel eingeschrieben werden kann.*

Der Beweis ist der nämliche wie der des 6ten Satzes zum Anhange des vierten Buchs.

4. *Das gröſste unter den Kugelvielecken von gleichem Umfange und gleicher Seitenzahl ist dasjenige mit gleichen Winkeln und gleichen Seiten.*

Dieses folgt aus dem obigen ersten und dritten Zusatze.

Anmerkung. Alle Sätze vom Maximo bey Kugelvielecken gelten auch von den Körperwinkeln, deren Maaſs sie sind *).

*) Diese Sätze zeichnen wieder Legendres Lehrbuch besonders aus. A. d. Uebers.

Anhang
zum sechsten und siebenten Buche.

Die regelmäſsigen Polyëder.

Erster Satz.

Lehrsatz.

Es giebt nur fünf verschiedene regelmäſsige Polyëder; denn *regelmäſsige Polyëder* sind nach der Erklärung diejenigen, deren Seitenflächen regelmäſsige Vielecke, und deren Körperwinkel alle gleich sind. Beide Bedingungen zusammen finden nur in wenigen Fällen Statt.

Erstlich. Wenn die Seitenflächen gleichseitige Dreyecke sind, so kann jeder Körperwinkel des Polyëders mit drey, vier, oder fünf solcher Dreyecke umschlossen werden; daraus entstehen drey reguläre Körper, das Tetraëder, Octaëder und Icosaëder. Mehr regelmäſsige Polyëder können aus gleichseitigen Dreyecken nicht zusammengesetzt werden, denn sechs Winkel eines gleichseitigen Dreyecks machen schon vier rechte aus, und bilden also keinen Körperwinkel (5s B. 21r S.).

Zweytens. Sind die Seitenflächen Vierecke, so kann man nur drey ihrer Winkel um eine körperliche Ecke zusammenstellen. Daraus entsteht das Hexaëder oder der Würfel.

Vier Winkel des Vierecks machen schon zusammen vier rechte aus, und bilden also keinen Körperwinkel.

Drittens. Sind die Seitenflächen Fünfecke, so kann man wieder nur drey Winkel derselben um eine körperliche Ecke legen, woraus das regelmäſsige Dodecaëder entsteht.

Weiter kann man nicht gehen: vom regelmäſsigen Sechsecke sind schon drey Winkel vier rechten gleich, und drey Winkel des Siebenecks betragen noch mehr; folglich giebt es nur fünf regelmäſsige Polyëder, drey mit gleichseitigen Dreyecken, eins mit Vierecken und eins mit Fünfecken.

Anmerkung. In dem folgenden Satze wird bewiesen, daſs die fünf regelmäſsigen Polyëder wirklich existiren, und daſs man alle ihre Abmessungen bestimmen kann, wenn man ihre Kanten kennt.

Zweyter Satz.

Aufgabe.

Aus der gegebenen Seitenfläche, oder selbst nur aus der Kante eines regelmäſsigen Polyëders, daſselbe zu construiren.

Diese Aufgabe enthält fünf besondere Aufgaben, welche nach einander aufgelöset werden sollen.

Construction des Tetraëders.

Fig. 243. ABC sey das gleichseitige Dreyeck, welches zu einer der Seitenflächen des Tetraëders dienen soll. Man errichte auf die Ebene ABC, in dem Mittelpuncte O des Dreyecks ABC, das Perpendikel OS; man schneide daſselbe im Puncte S so ab, daſs AS=AB und ziehe SB und SC, so ist die Pyramide SABC das verlangte Tetraëder.

Denn weil OA, OB und OC gleich sind, so entfernen sich die schrägen Linien SA, SB und SC gleich weit vom Perpendikel SO, und sind gleich. Eine von

ihnen SA ist gleich AB; also sind die vier Seitenflächen der Pyramide SABC Dreyecke, welche dem gegebenen Dreyecke ABC gleich sind. Die Körperwinkel dieser Pyramide sind einander gleich, weil sie jeder von drey gleichen ebenen Winkeln umschlossen werden; also ist diese Pyramide ein regelmäſsiges Tetraëder.

Construction des Hexaëders.

Fig. 244. ABCD sey das gegebene Quadrat. Ueber der Grundfläche ABCD, construire man ein senkrechtes Prisma, dessen Höhe AE der Seite AB gleich ist; so ist klar, daſs die Seitenflächen dieses Prisma gleiche Quadrate, und daſs seine Körperwinkel unter einander gleich sind, weil jeder von drey rechten Winkeln umschlossen wird; also ist dieses Prisma ein regelmäſsiges Hexaëder, oder ein Würfel.

Construction des Octaëders.

Fig. 245. AMB sey das gegebene gleichseitige Dreyeck. Ueber der Seite AB beschreibe man das Quadrat ABCD; im Puncte O, dem Mittelpuncte des Quadrats, errichte man auf seine Ebene, das Perpendikel TS und schneide es an beiden Enden T und S so ab, daſs OT = OS = AO. Hierauf ziehe man SA, SB, TA etc., so entsteht ein Körper SABCDT, welcher aus zwey viereckigen Pyramiden SABCD, TABCD zusammengesetzt ist, die in ihrer gemeinschaftlichen Grundfläche ABCD zusammenstoſsen; und dieser Körper ist das verlangte regelmäſsige Octaëder.

Denn das Dreyeck AOS ist in O rechtwinklig, eben wie das Dreyeck AOD; die Seiten AO, OS, OD sind gleich; also sind die Dreyecke gleich, und folglich ist AS = AD. Eben so wird bewiesen, daſs alle die andern rechtwinkligen Dreyecke AOT, BOS, COF etc.

dem Dreyecke AOD gleich sind; folglich sind alle Seiten AB, AS, AT etc. einander gleich, und folglich ist der Körper SABCDT unter acht Dreyecken begriffen, die sämmtlich dem Dreyecke ABM gleich sind. Ich behaupte ferner, daſs die Körperwinkel des Polyëders einander gleich sind, z. B. S = B.

Denn offenbar sind die Dreyecke SAC und DAC gleich; folglich ist der Winkel ASC ein rechter; also ist die Figur SATC ein dem Quadrate ABCD gleiches Quadrat. Vergleicht man aber die Pyramide BASCT mit der Pyramide SABCD, so kann die Grundfläche ASTC der erstern auf die Grundfläche ABCD der zweyten gelegt werden; da alsdann der Punct O ein gemeinschaftlicher Mittelpunct ist, so wird die Höhe OB der ersten in die Höhe OS der zweyten, und die beiden Pyramiden werden zusammenfallen; folglich ist der Körperwinkel S gleich dem Körperwinkel B, und mithin der Körper SABCDT ein regelmäſsiges Octaëder.

Anmerkung. Wenn drey gleiche grade Linien AC, BD, ST auf einander senkrecht stehen und einander in der Mitte schneiden, so sind die Endpuncte dieser graden Linien die Scheitel eines regelmäſsigen Octaëders.

Construction des Dodecaëders.

Fig. 246. ABCDE sey das gegebene regelmäſsige Fünfeck, ABP und CBP sollen zwey ebene Winkel seyn, die dem Winkel ABC gleich sind. Mit diesen ebenen Winkeln construire man den Körperwinkel B, und bestimme nach dem 24sten Satze des 5ten Buchs die wechselseitige Neigung zweyer seiner Ebenen. Diese Neigung werde durch K bezeichnet. Man construire eben so in den Puncten C, D, E, A Körperwinkel, die dem in B gleich sind und eben so liegen. Die Ebenen CBP

und BCG werden in einander fallen, weil sie beide gegen die Ebene ABCD die Neigung K haben. Man kann also in der Ebene PBCG das dem Fünfecke ABCDE gleiche Fünfeck BCGFP beschreiben. Thut man ein Gleiches in jeder der Ebenen CDI, DEL etc., so entstehet eine ausspringende Oberfläche PFGH etc., welche aus sechs regelmäfsigen Fünfecken zusammengesetzt ist, die einander gleich sind, und deren jedes gegen das anliegende unter dem Winkel K geneigt ist. Es sey pfgh etc. eine zweyte, der PFGH etc. gleiche Fläche, so behaupte ich, dafs diese Flächen so zusammengesetzt werden können, dafs sie eine einzige ununterbrochene ausspringende Fläche bilden. Denn der Winkel opf z. B. kann in die beiden Winkel OPB und BPF gefügt werden, so dafs ein, dem Winkel B gleicher Körperwinkel P entsteht; bey der Zusammenfügung wird nichts in der Neigung der Flächen BPF und BPO geändert, weil diese Neigung grade die ist, welche dem Körperwinkel zugehört. Aber indem der Körperwinkel P gebildet wird, legt sich die Seite pf auf die gleiche Seite PF, und in dem Puncte F vereinigen sich die drey ebenen Winkel PFG, pfe und efg, welche einen Körperwinkel bilden, der dem schon construirten gleich ist; diese Zusammenfügung geschieht ferner, ohne etwas, weder an dem Winkel P, noch an der Fläche efgh etc. zu ändern; denn die schon in P zusammenstossenden Ebenen PFG, efp haben unter einander die gehörige Neigung K, gleich den Ebenen efg, efp. Fährt man so von einem Winkel zum andern fort, so sieht man, dafs sich die beiden Flächen ganz in einander fügen lassen, und nur eine einzige in sich selbst fortlaufende Fläche bilden: diese Fläche wird die eines regelmäfsigen Dodecaëders seyn, weil sie aus zwölf regelmäfsigen Fünfecken zusammengesetzt ist, und alle ihre Körperwinkel einander gleich sind.

Construction des Icosaëders.

Fig. 247. ABC sey eine der gegebenen Flächen, so mufs man zuerst einen Körperwinkel mit fünf der Ebene ABC gleichen, und gegen einander gleichförmig geneigten Ebenen beschreiben. Zu dem Ende beschreibe man über der Seite B'C', welche BC gleich ist, das regelmäfsige Fünfeck B'C'H'I'D'. Im Mittelpuncte dieses Fünfecks errichte man auf seiner Ebene ein Perpendikel, welches in A' so abgeschnitten wird, dafs B'A' = B'C', und ziehe A'C', A'H', A'I', A'D', so wird der von den fünf Ebenen B'A'C', C'A'H' etc. umschlossene Körperwinkel A', der verlangte Körperwinkel seyn. Denn die schrägen Linien A'B', A'C' etc., sind einander gleich, eine davon A'B', ist gleich der Seite B'C', also sind alle die Dreyecke B'A'C', C'A'H etc., einander und dem Dreyecke ABC gleich.

Aufserdem ist leicht zu sehen, dafs die Ebenen B'A'C', C'A'H' etc., gleiche Neigung gegen die anstofsenden Ebenen haben; denn die Körperwinkel B', C' etc. sind einander gleich, weil sie jeder von zwey Winkeln des gleichseitigen Dreyecks und einem regelmäfsigen Fünfecke gebildet werden. Die Neigung zweyer Ebenen an den gleichen Winkeln, werde durch K bezeichnet. Diese Neigung kann nach dem 24n Satze des 5n Buchs bestimmt werden. Der Winkel K wird zugleich die Neigung jeder der Ebenen seyn, welche den Körperwinkel A', oder den daran liegenden Winkel bilden.

Beschreibt man nun in den Puncten A, B, C Körperwinkel die dem Winkel A' gleich sind, so wird eine ausspringende Fläche DEFG etc. entstehen, die aus zehn gleichseitigen Dreyecken zusammengesetzt ist, deren jedes gegen das anstossende die Neigung K hat, und die Winkel D, E, F etc., in seinem Umfange werden abwechselnd drey und zwey Winkel des gleichseitigen

Dreyecks enthalten. Nun stelle man sich eine zweyte Fläche vor, welche der Fläche DEFG etc. gleich ist, so können diese Flächen an einander gefügt werden, wenn man jeden dreyfachen Winkel der einen Fläche an den zweyfachen der andern legt; weil nun die Ebenen dieser Winkel schon unter einander die Neigung K haben, welche nöthig ist, um einen Körperwinkel zu bilden der das Fünffache von A ist, so wird bey der Zusammenfügung der Flächen an denselben nichts geändert, sondern beide Flächen bilden nur eine einzige ununterbrochene Fläche, die aus zwanzig gleichseitigen Dreyecken besteht. Diese Fläche ist die des regelmäſsigen Icosaëders, weil alle Körperwinkel derselben einander gleich sind.

Dritter Satz.

Aufgabe.

Die Neigung zweyer an einander stoſsenden Ebenen eines regelmäſsigen Polyëders zu finden.

Diese Neigung läſst sich aus der oben beschriebenen Construction der fünf regelmäſsigen Polyëder mit Hülfe des 24sten Satzes im 5ten Buche finden, nach welchem aus den, einen Körperwinkel umschliessenden drey ebenen Winkeln, der Winkel zwischen zwey seiner Ebenen gefunden wird.

Fig. 243. *Im Tetraëder* ist jeder Körperwinkel von drey gleichseitigen Dreyecken umschlossen. Man muſs also durch den erwähnten Satz den Winkel zwischen zwey dieser Ebenen suchen: derselbe ist der Winkel zweyer zusammenstoſsenden Seitenflächen des Tetraëders.

Fig. 244. *Im Hexaëder* ist der Winkel zwischen zwey zusammenstoſsenden Seiten ein rechter.

Fig. 245. *Im Octaëder* beschreibe man mit zwey Winkeln eines gleichseitigen Dreyecks und einem rech-

ten Winkel einen Körperwinkel, so ist die Neigung der beiden Ebenen, in welchen die Winkel des Dreyecks liegen, diejenige von zwey zusammenstossenden Seitenflächen des Octaëders.

Fig. 246. *Im Dodecaëder* wird jeder Körperwinkel von drey Winkeln regelmäſsiger Fünfecke gebildet; also ist die Neigung der Ebenen von zwey dieser Winkel gleich derjenigen zweyer an einanderstoſsenden Seitenflächen des Dodecaëders.

Fig. 247. *Im Icosaëder* beschreibe man mit zwey Winkeln eines gleichseitigen Dreyecks und einem Winkel des regelmäſsigen Fünfecks einen Körperwinkel, so ist die Neigung zweyer Ebenen, in welchen die Winkel der Dreyecke liegen, diejenige zweyer an einanderstoſsenden Seitenflächen des Icosaëders.

Vierter Satz.

Aufgabe.

Aus der gegebenen Kante eines regelmäſsigen Polyëders den Halbmesser der in und um das Polyëder beschriebenen Kugel zu finden.

Fig. 248. Zuerst muſs bewiesen werden, daſs jedes regelmäſsige Polyëder in und um eine Kugel beschrieben werden kann.

AB sey die gemeinschaftliche Kante zweyer an einanderstoſsenden Seitenflächen; C und E sollen die Mittelpuncte dieser Seitenflächen, und CD und ED die Perpendikel aus den Mittelpuncten auf die gemeinschaftliche Kante AB seyn, welche auf D, die Mitte der Seite, fallen werden. Die beiden Perpendikel machen unter einander einen gegebenen Winkel, welcher der Neigung der beiden zusammenstoſsenden Seitenflächen gleich ist, so wie sie durch die vorige Aufgabe gefunden wird. Zieht man nun in der auf AB senkrechten Ebene

CDE auf CD und ED die unbestimmten Perpendikel CO und EO, welche sich in O schneiden, so behaupte ich, dafs O der Mittelpunct der in- und umschriebenen Kugel ist; der Halbmesser der ersten ist OC, der andern OA.

Denn weil die Apothemen CD und DE gleich sind, die Hypothenuse DO aber gemeinschaftlich ist, so sind die rechtwinkligen Dreyecke CDO und ODE (1s B. 18r S.), und folglich die Perpendikel OC und OE gleich. Aber weil AB auf der Ebene CDE senkrecht ist, so ist die Ebene ABC auf CDE senkrecht (5s B. 17r S.), oder CDE auf ABC. Ferner ist in der Ebene CDE, der Durchschnitt der Ebenen CDE und ABC auf CD senkrecht; folglich ist CO auf der Ebene AEC senkrecht (5s B. 18r S.). Aus demselben Grunde ist EO auf der Ebene ABE senkrecht, folglich schneiden sich die beiden auf zwey an einander stofsende Seitenflächen durch ihren Mittelpunct gezogenen Perpendikel CO und EO, in einem und demselben Puncte O, und sind gleich. Nun nehme man an, dafs ABC und ABE zwey beliebige andere zusammenstofsende Seitenflächen vorstellen. Die Apotheme CD behält immer die nämliche Gröfse, eben wie der Winkel CDO, der die Hälfte von CDE ist; also sind das rechtwinklige Dreyeck CDO und seine Seite CO für alle Seitenflächen des Polyëders die nämlichen; beschreibt man daher mit dem Halbmesser OC aus O eine Kugel, so wird dieselbe alle Seitenflächen des Polyëders in ihren Mittelpuncten berühren (denn die Ebenen ABC und ABE sind auf den Halbmessern in ihren Endpuncten senkrecht), und die Kugel ist in das Polyëder eingeschrieben, oder das Polyëder um die Kugel beschrieben.

Man ziehe OA und OB; so entfernen sich, weil CA = CB ist, die beiden schrägen Linien OA und OB

gleich weit vom Perpendikel und sind folglich gleich. Ganz so verhält es sich mit zwey beliebigen andern Linien aus dem Mittelpuncte O nach den Endpuncten einer beliebigen Kante; also sind alle diese Linien einander gleich. Beschreibt man also mit dem Halbmesser OA, aus O eine Kugelfläche, so geht dieselbe durch die Scheitel aller Körperwinkel des Polyëders; folglich ist diese Kugel um das Polyëder oder das Polyëder in die Kugel beschrieben.

Die Auflösung der Aufgabe selbst hat nun keine Schwierigkeit weiter, und ist folgende:

Fig. 249. Wenn die Seite einer Seitenfläche des Polyëders gegeben ist, so beschreibe man diese Seitenfläche, CD sey ihre Apotheme. Nun suche man nach der vorigen Aufgabe die Neigung zweyer an einander liegenden Flächen des Polyëders, und mache den Winkel CDE dieser Neigung gleich. Ferner mache man DE gleich CD, und ziehe CO und EO auf CD und ED senkrecht; diese beiden Perpendikel werden sich in O schneiden, und CO wird der Halbmesser der in das Polyëder beschriebenen Kugel seyn.

In der Verlängerung von DC mache man CA gleich dem Halbmesser des um die Seitenflächen des Polyëders beschriebenen Kreises, so ist OA der Halbmesser der um das Polyëder beschriebenen Kugel.

Denn die Dreyecke CDO und CAO der 249sten Figur sind den Dreyecken CDO und CAO der 248sten Figur gleich. Sind also CD und CA die Halbmesser der in und um eine Seitenfläche des Polyëders beschriebenen Kreise, so sind OC und OA die Halbmesser der in und um das Polyëder beschriebenen Kugeln *).

*) Alle dergleichen Constructionen gehören, meines Erachtens, nicht zur reinen Geometrie, sondern schon zu Anwendungen derselben. A. d. Uebers.

Anmerkung. Man kann aus diesen Sätzen mehrere Folgerungen ziehen.

Erstens. Jedes regelmäfsige Polyëder kann in so viel regelmäfsige Pyramiden getheilt werden, als das Polyëder Seitenflächen hat. Die gemeinschaftliche Spizze der Pyramiden ist der Mittelpunct des Polyëders, welcher zugleich der Mittelpunct der in- und umschriebenen Kugel ist.

Zweytens. Der körperliche Inhalt eines regelmäfsigen Polyëders ist gleich seiner Oberfläche, multiplicirt mit einem Drittheile des Halbmessers der eingeschriebenen Kugel.

Drittens. Regelmäfsige Polyëder einerley Art sind ähnliche Körper, und ihre ähnlich liegenden Abmessungen sind proportional; also verhalten sich auch die Halbmesser der in- und umschriebenen Kugeln wie die Kanten dieser Polyëder.

Viertens. Wenn man ein regelmäfsiges Polyëder in einer Kugel beschreibt, so theilen die durch den Mittelpunct und die Kanten des Polyëders gelegten Ebenen die Kugelfläche in so viel gleiche und ähnliche regelmäfsige Kugelvielecke, als das Polyëder Seitenflächen hat.

Achtes Buch.

Die drey runden Körper.

Erklärungen.

Fig. 250. I. Der durch Umdrehung des Rechtecks ABCD um die unbewegliche Seite AB entstehende Körper heifst *Cylinder.*

Da bey der Umdrehung die Seiten AD und BC beständig auf AB senkrecht bleiben, so beschreiben sie die gleichen Kreisflächen DHP und CGQ, welche man *Grundflächen des Cylinders* nennt. Die Seite CD beschreibt die *Cylinderfläche.*

Die unbewegliche Linie AB heifst *Axe des Cylinders.*

Jeder Schnitt des Cylinders KLM senkrecht auf der Axe, ist ein den Grundflächen gleicher Kreis: denn während sich das Rechteck ABCD um AB dreht, beschreibt die auf AB senkrechte Linie IK, eine der Grundfläche gleiche Kreisfläche, und diese Kreisfläche ist nichts anders als ein im Puncte I auf der Axe senkrechter Schnitt.

Jeder Schnitt PQGH, in welchem die Axe liegt, ist ein dem zweyfachen erzeugenden Rechtecke ABCD gleiches Rechteck.

Fig. 251. II. Der durch Umdrehung eines rechtwinkligen Dreyecks SAB um die unbewegliche Cathete SA entstehende Körper heifst *Kegel.*

Die Seite AB beschreibt eine Kreisfläche BCDE, welche *Grundfläche des Kegels* heifst; die Hypothenuse SB beschreibt die *Kegelfläche.*

Der Punct S heiſst *Spitze des Kegels*, SA *des Kegels Axe* oder *Höhe*, und SB *Seite* oder *Apotheme*.

Jeder Schnitt des Kegels HKFI, senkrecht auf der Axe, ist ein Kreis; jeder Schnitt SDE, in welchem die Axe liegt, ist ein gleichschenkliges, dem doppelten beschreibenden Dreyecke SAB gleiches Dreyeck.

III. Wenn man von dem Kegel SCDB, mittelst eines mit der Grundfläche parallelen Schnitts, den Kegel SFKH abschneidet, ſo heiſst der übrig bleibende Körper, *abgekürzter Kegel.*

Man kann sich vorstellen, der abgekürzte Kegel entstehe, wenn sich ein Trapez ABHG, dessen Winkel A und G rechte sind, um die Seite AG dreht. Die unbewegliche Linie AG heiſst dann *Axe oder Höhe des abgekürzten Kegels.* Die Kreise BDC und HFK sind seine *Grundflächen*, BH ist seine *Seite*.

IV. Zwey Cylinder oder Kegel heissen *ähnlich*, wenn sich ihre Axen wie die Durchmesser ihrer Grundflächen verhalten.

Fig. 252. V. Wenn man in den Kreis ACD, welcher einem Cylinder zur Grundfläche dient, ein Vieleck ABCDE beschreibt, und auf der Grundfläche ABCDE ein senkrechtes Prisma von der Höhe des Cylinders errichtet, so heiſst dieses Prisma, *in den Cylinder eingeschrieben*, oder der Cylinder, *um das Prisma beschrieben*.

Es ist klar, daſs die Kanten AF, BG, CH etc. des Prisma, weil sie auf der Ebene der Grundfläche senkrecht sind, in der convexen Oberfläche des Cylinders liegen; folglich berühren sich der Cylinder und das Prisma, längs der Kanten.

Fig. 253. VI. Eben so, wenn ABCD ein um die Grundfläche des Cylinders beschriebenes Vieleck ist, und man beschreibt über der Grundfläche ABCD ein senkrechtes Prisma, von der Höhe des Cylinders, so

heifst das Prisma, *um den Cylinder*, oder der Cylinder, *in das Prisma beschrieben.*

M, N etc. sollen die Berührungspuncte der Seiten AB, BC etc., und in den Puncten M, N etc. auf der Ebene der Grundfläche die Perpendikel MX, NY etc. errichtet seyn; so ist klar, dafs diese Perpendikel zugleich in der Oberfläche des Cylinders und des umschriebenen Prisma liegen; also sind sie Berührungslinien.

Anmerkung. Der Cylinder, der Kegel und die Kugel sind die *drey runden Körper*, mit welchen sich die Elementar-Geometrie beschäftiget.

Vorläufige Lehnsätze über die Oberflächen.

I.

Fig. 254. *Eine Ebene OABCD ist kleiner als jede andere Fläche PABCD zwischen denselben Grenzen ABCD.*

Dieser Satz ist für sich selbst so klar, dafs er wohl als Grundsatz gelten könnte; denn die Ebene ist unter den Flächen, was die grade Linie unter den Linien ist: die grade Linie aber ist die kürzeste zwischen zwey gegebenen Puncten; also ist auch die Ebene die kleinste Fläche unter allen Flächen zwischen denselben Grenzen. Da es indessen gut ist, so wenige Sätze als möglich zu Grundsätzen zu machen, so geben wir folgenden Beweis, welcher die etwa noch möglichen Zweifel hebt.

Da jede Fläche in der Länge und Breite ausgedehnt ist, so läfst sich nicht anders begreifen, dafs sie eine andere Fläche an Gröfse übertrifft, als wenn man sich vorstellt, dafs die Abmessungen der ersten in irgend einer Richtung gröfser sind als die der andern. Wenn also die Abmessungen einer Fläche nach allen Richtungen kleiner sind als die Abmessungen einer andern, so ist

klar, daſs die erste von beiden Flächen die kleinere ist. In welcher Richtung man nun auch mit einer Ebene BPD die gegebene Ebene nach BD, und die andere Fläche nach BPD schneiden mag, immer ist die grade Linie BD kürzer als BPD. Also ist die Ebene OABCD kleiner als die sie umgebende Fläche PABCD *).

*) Die Vorstellungen im Anfange dieses Beweises, von den Abmessungen einer Fläche nach beliebigen Richtungen, sind wohl etwas unbestimmt, weil man sich Abmessungen nicht anders als nach bestimmten Richtungen vorstellen kann; auch ist es nicht deutlich wie die Ausdehnung einer krummen Fläche nach beliebigen Richtungen gemessen werden kann. Der Beweis scheint also nicht ganz befriedigend. Es ist also besser, den Satz auf eine ähnliche Art zu beweisen, wie den, daſs die grade Linie der kürzeste Weg von einem Puncte zum andern ist, oder wie der 3te Satz im 7ten Buche, welches, wie folgt, geschehen kann.

Fig. 254. Man beschreibe nämlich über der Ebene ABCD ein beliebiges Polyëder, dessen Ecken in der krummen Fläche ABCDP liegen, so wird dessen Oberfläche allemal gröſser seyn als seine Grundfläche. Das Polyëder werde auf folgende Weise construirt: In der Ebene ABCD beschreibe man ein beliebiges gradliniges Vieleck, so daſs dessen Ecken in der krummen Linie ABCD liegen, in welcher die krumme Fläche die Ebene schneidet, und welche Linie überall concav angenommen werden soll, so daſs das Vieleck nirgend einspringende Winkel bekommt. Dieses Vieleck theile man beliebig, mittelst Diagonalen, in Dreyecke, so daſs die Summe der Dreyecke, dem Inhalte des Vielecks gleich ist, und errichte über den Seiten und Diagonalen der auf diese Weise entstehenden Figur, Ebenen, senkrecht auf ABCD. Diese senkrechten Ebenen werden die krumme Fläche nothwendig schneiden, und zwar werden jedesmal die drey Perpendikel über den drey Ecken eines Dreyecks, die krumme Fläche in drey verschiedenen Puncten treffen. Durch solche drey Puncte lege man jedesmal eine Ebene, so werden diese Ebenen, in sofern sie nicht etwa mit ABCD parallel sind, allemal gröſser seyn

II.

Fig. 255. *Jede convexe Fläche OABCD ist kleiner als eine beliebige andere sie umschliessende Fläche von dem nämlichen Umfange ABCD.*

Wir wiederholen, daſs unter *convexe Fläche* diejenige verstanden wird, welche von einer graden Linie in

als die in der Ebene ABCD senkrecht darunter liegenden Dreyecke, niemals, selbst wenn sie mit ABCD parallel sind, kleiner, welches durch die obigen Sätze leicht bewiesen werden kann. Die Summe aller jener neuen Dreyecke, die nun zusammen eine polyëdrische Oberfläche bilden, deren Ecken in der krummen Fläche ABCDP liegen, ist also nothwendig gröſser als das senkrecht darunter liegende, in der Ebene ABCD beschriebene Vieleck. Gesetzt nun, das ebene Vieleck wäre gröſser als der, senkrecht über ihm liegende Theil der krummen Oberfläche, oder ihm gleich, so wäre die ebenfalls senkrecht über dem Vielecke liegende polyëdrische Oberfläche noch um so mehr gröſser als jener Theil der krummen Fläche. Nun wurde vorausgesetzt, daſs die krumme Fläche gegen die Grundfläche ABCD überall concav ist, so liegt die polyëdrische Fläche ganz zwischen der krummen Fläche und der Grundfläche. Man theile jetzt ferner die Dreyecke der Grundfläche in kleinere Dreyecke und verfahre wie vorhin, so entsteht eine neue polyëdrische Oberfläche, die ganz zwischen der ersten und der krummen Fläche liegt, und gröſser ist als die erste, weil nunmehr über den Dreyecken in der Grundfläche, nicht mehr blos schräge Ebenen, sondern einzelne polyëdrische Oberflächen liegen, die sämmtlich gröſser sind als jene Ebenen. Also überträfe die zweyte polyedrische Oberfläche, die noch mehr Puncte mit der krummen gemein hat als die erste, die krumme Fläche an Gröſse noch mehr als die erste. Es muſs aber, wenn man auf dieselbe Weise mit der Theilung der Dreyecke fortfährt, nothwendig eine polyëdrische Fläche geben, die, indem ihre Ecken in der krummen Fläche liegen, diese am meisten übertrifft, weil der Raum, worin die neuen polyëdrischen Oberflächen beschrieben werden, zwischen

nicht mehr als zwey Puncten geschnitten werden kann: obgleich eine grade Linie in einer gewissen Richtung ganz in die convexe Fläche fallen mag. Beyspiele vom letztern sind der Kegel und Cylinder. Auch ist zu bemerken, daſs der Ausdruck, convexe Fläche, nicht auf krumme Flächen allein beschränkt ist, sondern auch

den vorigen Flächen und der krummen immer kleiner wird, und folglich die Gröſse der neuen Flächen, weil sie aus Ebenen bestehen, nicht unbegrenzt zunehmen kann. Allein eine solche *gröſste* polyëdrische Fläche läſst sich nicht finden, weil sich, welche auch dafür angenommen werden mag, immer eine neue, zwischen ihr und der krummen Fläche, angeben läſst, die noch gröſser ist. Also könnte diejenige polyëdrische Oberfläche, zwischen der Grundfläche und der krummen, welche die letzte am meisten übertrifft, weder in der Grundfläche, noch zwischen beiden liegen; folglich könnte sie nur *in* der krummen Fläche selbst liegen. Dieses anzunehmen ist aber ungereimt, weil die krumme Fläche nicht sich selbst am meisten übertreffen kann. Also ist die Voraussetzung, daſs die vieleckige Grundfläche gröſser als der, senkrecht darüber liegende Theil der krummen Fläche, oder ihm gleich seyn soll, unrichtig; folglich ist die vieleckige ebene Grundfläche nothwendig kleiner als der senkrecht darüber liegende Theil der krummen Fläche.

Nun kann man dem in der krummen Linie ABCD beschriebenen Vielecke so viel Ecken geben, als dasselbe Puncte mit der krummen Linie gemein hat; folglich seinen Inhalt dem von der krummen Linie ABCD umschlossenen Flächenraume so nahe kommen lassen als man will; also ist jede von graden Linien umschlossene Fläche, sie komme der krummlinigen ABCD so nahe als man will, kleiner als die senkrecht darüber liegende krumme Fläche. Sie ist also um so mehr kleiner als die *ganze* krumme Fläche ABCDP. Deshalb aber ist diese letztere auch nothwendig gröſser als die *ganze* krummlinige Grundfläche ABCD. Denn wäre sie kleiner, so lieſse sich allemal ein Vieleck innerhalb ABCD angeben, welches gröſser ist als derjenige

auf polyëdrische Flächen und auf solche Flächen paſst, welche aus mehrern Ebenen zusammengesetzt sind; desgleichen auf Flächen, die theils krumme, theils polyëdrisch sind.

Gesetzt nun, die Fläche OABCD wäre nicht kleiner als alle anderen, welche sie umgeben, so sey unter den letztern PABCD die kleinste, die also mindestens der Fläche OABCD gleich seyn muſs. Durch irgend einen Punct O lege man eine Ebene, welche die Fläche OABCD berührt ohne sie zu schneiden; diese Ebene wird die Fläche PABCD schneiden, und davon einen Theil trennen, welcher gröſser ist als die Ebene von dem nämlichen Umfange (1r Lehnsatz). Behält man nun den Rest der Fläche PABCD bey, so kann man die Ebene an die Stelle der abgeschnittenen Fläche setzen, wodurch eine neue Fläche entstehet, die ebenfalls noch die Fläche OABCD umgiebt, obgleich sie kleiner ist als PABCD.

PABCD aber sollte nach der Voraussetzung schon unter allen die kleinste seyn, also ist die Voraussetzung

Theil von ABCD, der etwa ABCDP gleich seyn soll, weil man mit einem solchen Vielecke dem Inhalte der Fläche ABCD so nahe kommen kann *als man will*, so daſs also ABCDP nicht *kleiner* seyn kann als ABCD. Da nun auch ABCDP nicht ABCD *gleich* ist, weil beide Flächen einerley Grenzen ABCD haben, und Gröſsen, die einerley Grenzen haben, nur dann gleich sind, wenn sie ganz in einander fallen, so ist ABCDP nothwendig gröſser als ABCD.

Dieser Beweis ist zwar darauf beschränkt, daſs sowohl die Fläche ABCDP gegen die Grundfläche überall concav, als darauf, daſs die krumme Linie ABCD nach aussen überall concav sey, allein nur mit dieser Einschränkung ist er auch für das was hier folgt, nothwendig.

Er darf nicht wohl übergangen werden, weil Alles was von den runden Körpern folgt, auf den Satz der zu beweisen war, beruht. A. d. Uebers.

nicht möglich; folglich ist die krumme Oberfläche OABCD kleiner als jede andere Fläche, welche OABCD umgiebt, und denselben Umfang ABCD hat.

Anmerkung. Durch ähnliche Schlüsse läfst sich beweisen, dafs

Fig. 256. *Erstlich,* wenn eine von den beiden Umfängen ABC und DEF begrenzte Fläche von einer andern umschlossen wird, die die nämlichen Grenzen hat, die umschlossene Fläche die kleinere ist.

Fig. 257. *Zweytens,* dafs wenn eine convexe Fläche AB von allen Seiten von einer andern Fläche MN umgeben ist, die beiden Flächen mögen Puncte, Linien, oder Ebenen, oder auch gar keine Stelle gemein haben, erstere immer kleiner ist als die umgebende.

Denn unter den letztern kann keine seyn, welche die kleinste unter allen übrigen ist, weil man allemal eine, die convexe Fläche berührende Ebene CD, ziehen könnte, welche kleiner wä e als die Fläche CMD (1r Lehnsatz); also würde die Fläche CND kleiner seyn als MN, welches gegen die Voraussetzung ist, weil vielmehr MN unter allen die kleinste seyn sollte; folglich ist die convexe Fläche AB die kleinste unter allen welche sie umschliessen.

Erster Satz.

Lehrsatz.

Der körperliche Inhalt eines Cylinders ist gleich dem Producte seiner Grundfläche in die Höhe.

Fig. 258. Der Halbmesser der Grundfläche des gegebenen Cylinders sey CA, H seine Höhe. Man bezeichne mit Krfl. CA die Fläche eines Kreises, dessen Halbmesser CA ist, so behaupte ich, dafs der körperliche Inhalt des Cylinders = Krfl. CA × H ist. Denn wenn Krfl. CA × H nicht das Maafs des gegebenen Cy-

linders wäre, so wird dieses Product das Maafs eines gröfsern oder kleinern Cylinders seyn. Angenommen eines kleinern, z. B. eines Cylinders, dessen Höhe H, und von dessen Grundfläche CD der Halbmesser ist.

Man beschreibe um den Kreis, dessen Halbmesser CD ist, ein regelmäfsiges Vieleck GHIP, dessen Seiten den Umfang vom Halbmesser CA nicht erreichen (4s B. 10r S.). Nun stelle man sich ein senkrechtes Prisma vor, welches das Vieleck GHIP zur Grundfläche und H zur Höhe hat, so umgiebt dieses Prisma den Cylinder, von dessen Grundfläche der Halbmesser CD ist. Der körperliche Inhalt des Prisma (14r S.) ist gleich dem Producte der Grundfläche GHIP in die Höhe H; die Grundfläche GHIP aber ist kleiner als der Kreis, dessen Halbmesser CA ist, also ist der körperliche Inhalt des Prisma kleiner als Krfl. CA $\times$ H. Aber Krfl. CA $\times$ H soll nach der Voraussetzung der körperliche Inhalt des in das Prisma beschriebenen Cylinders seyn; also wäre das Prisma kleiner als der Cylinder: der Cylinder aber ist im Gegentheile kleiner als das Prisma, weil er von demselben umgeben ist; also ist es unmöglich, dafs Krfl. CA $\times$ H das Maafs eines Cylinders sey, dessen Höhe H, und von dessen Grundfläche der Halbmesser CD ist, oder allgemein ausgedrückt: es ist unmöglich dafs *das Product der Grundfläche eines Cylinders in seine Höhe den körperlichen Inhalt eines kleinern Cylinders gebe.*

Ich behaupte zweytens, dafs eben dieses Product keinen gröfsern Cylinder ausdrücken kann: denn, um eine neue Figur zu ersparen, sey CD der Halbmesser der Grundfläche des *gegebenen* Cylinders, und wenn es möglich ist, Krfl. CD $\times$ H das Maafs eines gröfsern Cylinders, z. B. des Cylinders, dessen Höhe H, und von dessen Grundfläche CA der Halbmesser ist.

Macht man die nämliche Construction wie im ersten Falle, so hat das um den gegebenen Cylinder beschriebene Prisma zum Maafse GHIP $\times$ P: der Inhalt von GHIP aber ist gröfser als Krfl. CD; also ist der Inhalt des Prisma gröfser als Krfl. CD $\times$ H. Das Prisma müfste also gröfser seyn als der Cylinder von der nämlichen Höhe, welcher Krfl. CA zur Grundfläche hat. Das Prisma ist aber im Gegentheile kleiner als der Cylinder, weil dieser es umgiebt; also ist es unmöglich, *dafs das Product der Grundfläche eines Cylinders in seine Höhe das Maafs eines gröfsern Cylinders sey.*

Folglich ist der körperliche Inhalt eines Cylinders gleich dem Producte seiner Grundfläche in die Höhe.

Erster Zusatz. Cylinder von der nämlichen Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen, und Cylinder von der nämlichen Grundfläche wie die Höhen.

Zweyter Zusatz. Aehnliche Cylinder verhalten sich wie die Würfel der Höhen, oder wie die Würfel der Durchmesser der Grundflächen. Denn die Grundflächen verhalten sich wie die Quadrate der Durchmesser, und weil die Cylinder ähnlich sind, verhalten sich die Durchmesser der Grundflächen wie die Höhen (4te Erkl); also verhalten sich die Grundflächen wie die Quadrate der Höhen; folglich verhalten sich die Grundflächen multiplicirt mit den Höhen, oder die Cylinder selbst, wie die Würfel der Höhen.

Anmerkung. R sey der Halbmesser der Grundfläche eines Cylinders, H seine Höhe, so ist der Inhalt der Grundfläche πR^2 (4s B. 12r S.); also der körperliche Inhalt des Cylinders $= \pi R^2 \times H$, oder $\pi R^2 H$.

Zweyter Satz.

Lehnsatz.

Die convexe Oberfläche eines senkrechten Prisma ist gleich dem Producte des Umfanges seiner Grundfläche in die Höhe.

Fig. 252. Denn diese Oberfläche ist gleich der Summe der Rechtecke AFGB, BGHC, CHID etc. aus welchen sie zusammengesetzt ist. Die Höhen dieser Rechtecke AF, BG, EH etc. sind sämmtlich der Höhe des Prisma gleich; ihre Grundlinien AB, BC, CD etc. zusammengenommen machen den Umfang der Grundfläche aus; also ist die Summe dieser Rechtecke oder die convexe Oberfläche des Prisma gleich dem Producte des Umfanges seiner Grundfläche in die Höhe.

Zusatz. Wenn zwey senkrechte Prismen gleich hoch sind, so verhalten sich die convexen Oberflächen derselben wie die Umfänge ihrer Grundflächen.

Dritter Satz.

Lehnsatz.

Die convexe Oberfläche des Cylinders ist gröſser als die convexe Oberfläche jedes eingeschriebenen Prisma und kleiner als die convexe Oberfläche jedes umschriebenen Prisma.

Fig. 252. Die convexen Oberflächen des Cylinders und des eingeschriebenen Prisma ABCDEF sind Flächen von einerley Länge, weil in beiden jeder mit AF parallele Schnitt gleich AF ist. Schneidet man nun um die Breite der Flächen zu finden, dieselben mit Ebenen, welche mit der Grundfläche parallel oder auf AF senkrecht sind, so ist der eine Schnitt dem Umfange der Grundfläche, der andere dem Umfange des Vielecks ABCDE gleich, welcher kleiner ist als der Kreisumfang.

Weil also die Breite der cylindrischen Oberfläche bey gleicher Länge gröfser ist als die Breite der prismatischen Fläche, so folgt, dafs die erste Oberfläche gröfser ist als die zweyte.

Mit gleichen Gründen wird bewiesen, dafs die convexe Oberfläche des Cylinders kleiner ist als die Oberfläche des umschriebenen Prisma BCDKLH.

Vierter Satz.

Lehrsatz.

Die convexe Oberfläche eines Cylinders ist gleich dem Umfange seiner Grundfläche multiplicirt mit der Höhe.

Fig. 258. CA sey der Halbmesser der Grundfläche des gegebenen Cylinders, H seine Höhe. Bezeichnet man durch Umf. CA den Kreisumfang vom Halbmesser CA, so behaupte ich, dafs Umf. CA $\times$ H die convexe Oberfläche des Cylinders ist. Denn wäre es anders, so müfste CA $\times$ H die Oberfläche eines gröfsern oder kleinern Cylinders seyn: angenommen eines kleinern, z. B. des Cylinders, dessen Höhe H, und von dessen Grundfläche der Halbmesser CD ist.

Man beschreibe um den Kreis vom Halbmesser CD ein regelmäfsiges Vieleck GHIP, dessen Seiten den Umfang vom Halbmesser CA nicht erreichen. Darauf stelle man sich ein senkrechtes Prisma vor, welches zur Höhe H und zur Grundfläche das Vieleck GHIP hat. Die convexe Oberfläche dieses Prisma ist gleich dem Producte der Höhe H in den Umfang des Vielecks GHIP (2r S.). Dieser Umfang ist kleiner als der Kreisumfang vom Halbmesser CA; also ist die convexe Oberfläche des Prisma kleiner als Umf. CA $\times$ H. Aber Umf. CA $\times$ H ist, nach der Voraussetzung, der convexen Oberfläche des Cylinders gleich, von dessen Grundfläche CD der Halbmesser ist, welcher Cylinder in das Prisma

eingeschrieben wurde; also würde die convexe Oberfläche des Prisma kleiner seyn als die des eingeschriebenen Cylinders. Sie ist aber im Gegentheile gröſser (3r S.); also ist die Voraussetzung, von welcher man ausging, ungereimt, und folglich kann, *erstlich: das Product des Umfanges der Grundfläche eines Cylinders in die Höhe, nicht das Maaſs von der convexen Oberfläche eines kleinern Cylinders seyn.*

Ich behaupte zweytens, daſs das nämliche Product nicht die Oberfläche eines gröſsern Cylinders ausdrükken kann. Denn um die Figur zu benutzen sey CD der Halbmesser der Grundfläche des gegebenen Cylinders und, wenn es möglich ist, Umf. CD $\times$ H die convexe Oberfläche eines Cylinders, welcher die nämliche Höhe, aber einen gröſsern Kreis zur Grundfläche hat, z. B. den Kreis, dessen Halbmesser CA ist. Man mache die nämliche Construction wie bey der ersten Voraussezzung. Die convexe Oberfläche des Prisma ist immer gleich dem Producte von dem Umfange des Vielecks GHIP in die Höhe H. Aber der Umfang ist gröſser als der Umfang CD; also würde die Oberfläche des Prisma gröſser seyn als Umf. CD $\times$ H, welches nach der Voraussetzung die Oberfläche eines Cylinders ist, der die nämliche Höhe und CA zum Halbmesser der Grundfläche hat; also würde die Oberfläche des Prisma gröſser seyn als die des Cylinders. Aber, wäre selbst das Prisma in den Cylinder eingeschrieben, so würde seine Oberfläche dennoch kleiner seyn als die des Cylinders (3r S.); also ist sie um so mehr kleiner wenn das Prisma nicht einmal den Cylinder erreicht; folglich findet auch die zweyte Voraussetzung nicht Statt, und es kann *zweytens: das Product vom Umfange der Grundfläche eines Cylinders in die Höhe, nicht das Maaſs eines gröſsern Cylinders seyn.*

Also ist endlich die convexe Oberfläche eines Cylinders gleich dem Producte des Umfanges seiner Grundfläche in die Höhe.

Fünfter Satz.

Lehrsatz.

Der körperliche Inhalt eines Kegels ist gleich dem Producte seiner Grundfläche in ein Drittheil seiner Höhe.

Fig. 259. Die Höhe des gegebenen Kegels sey SO, und AO der Halbmesser seiner Grundfläche. Bezeichnet man nun durch Krfl. AO den Flächeninhalt der Grundfläche, so behaupte ich, dafs der körperliche Inhalt des Kegels gleich ist Krfl. AO ⋈ $\frac{1}{3}$ SO.

Denn man setze, *erstlich*, Krfl. AO ⋈ $\frac{1}{3}$ SO sey der Inhalt eines gröfsern Kegels, z. B. des Kegels dessen Höhe SO, dessen Grundfläche OB aber gröfser als AO ist, zum Halbmesser hat.

Man beschreibe um den Kreis, dessen Halbmesser AO ist, das regelmäfsige Vieleck MNPT, welches den Kreis, dessen Halbmesser OB ist, nicht erreicht (4s B. 10r S.). Darauf stelle man sich eine Pyramide vor, welche das Vieleck zur Grundfläche und den Punct S zur Spitze hat. Der Inhalt dieser Pyramide ist gleich einem Drittheile des Products der Höhe SO in den Flächeninhalt des Vielecks MNPT. Aber dieses Vieleck ist gröfser als der eingeschriebene Kreis, welcher durch Krfl. AO ausgedrückt wurde; also ist die Pyramide gröfser als Krfl. AO ⋈ $\frac{1}{3}$ SO, welches der Voraussezzung nach das Maafs des Kegels war, dessen Spitze S, und von dessen Grundfläche OB der Halbmesser ist. Im Gegentheile aber ist die Pyramide kleiner als der Kegel, weil sie innerhalb desselben liegt; also ist es erstlich unmöglich, dafs das Product der Grundfläche des

Kegels in ein Drittheil seiner Höhe das Maafs eines grössern Kegels ist.

Ich behaupte zweytens, dafs dieses nämliche Product nicht das Maafs eines kleinern Kegels seyn kann. Denn, um nicht die Figur zu verändern, sey OB der Halbmesser der Grundfläche des gegebenen Kegels, und, wenn es möglich ist, Krfl. OB ⋈ $\frac{1}{3}$ SO der körperliche Inhalt des Kegels, welcher SO zur Höhe und zur Grundfläche einen Kreis hat, dessen Halbmesser AO ist. Man mache die vorige Construction, so ist das Maafs der Pyramide SMNPT gleich dem Producte des Flächeninhalts von MNPT in $\frac{1}{3}$ SO. Aber MNPT ist kleiner als Krfl. OB; also würde die Pyramide ein kleineres Maafs als Krfl. OB ⋈ $\frac{1}{3}$ SO haben, und folglich kleiner seyn müssen als der Kegel, dessen Höhe SO, und von dessen Grundfläche der Halbmesser AO ist. Die Pyramide ist aber im Gegentheile gröfser als der Kegel, weil der Kegel innerhalb derselben liegt; also ist es zweytens unmöglich, dafs das Product der Grundfläche eines Kegels in ein Drittheil seiner Höhe das Maafs eines kleinern Kegels wäre.

Also ist endlich der körperliche Inhalt eines Kegels gleich dem Producte seiner Grundfläche in ein Drittheil seiner Höhe.

Zusatz. Ein Kegel ist ein Drittheil des Cylinders von der nämlichen Grundfläche und Höhe, woraus folgt:

Erstlich, dafs sich Kegel von gleichen Höhen wie ihre Grundflächen,

Zweytens, Kegel von gleichen Grundflächen wie ihre Höhen, und

Drittens, ähnliche Kegel wie die Würfel der Durchmesser ihrer Grundflächen, oder wie die Würfel ihrer Höhen verhalten.

Anmerkung. R sey der Halbmesser der Grundfläche eines Kegels, H seine Höhe, so ist der körperliche Inhalt des Kegels $\pi R^2 \times \frac{1}{3}H$, oder $\frac{1}{3}\pi R^2 H$.

Sechster Satz.

Lehrsatz.

Fig. 260. *Der abgekürzte Kegel ADEB, dessen Grundflächen AO und DP zu Halbmessern haben, und dessen Höhe PO ist, hat zum Maafse* $\frac{1}{3}\pi OP (AO^2 + DP^2 + AO \times DP)$.

TEGH sey eine dreyseitige Pyramide, mit dem Kegel SAB von einerley Höhe und mit einer Grundfläche FGH, welche so grofs ist als die Grundfläche des Kegels. Man kann annehmen, dafs diese beiden Grundflächen in einerley Ebene liegen. Alsdann sind die Spizzen S und T gleich weit von der Ebene der Grundflächen entfernt, und die Ebene EPD, verlängert, schneidet die Pyramide in IKL. Nun behaupte ich, dafs der Schnitt IKL so grofs ist als die Fläche DE. Denn die Grundflächen AB und DE verhalten sich unter einander wie die Quadrate der Halbmesser AO und DP (4s B. 11r S.), oder wie die Quadrate der Höhen SO und SP. Ferner verhalten sich die Dreyecke FGH und IKL wie die Quadrate dieser nämlichen Höhen (6s B. 15r S.); also verhalten sich die Kreise AB und DE, wie die Dreyecke FGH und IKL. Nach der Voraussetznng ist aber das Dreyeck FGH dem Kreise AB gleich, also ist das Dreyeck IKL gleich dem Kreise DE.

Nun ist das Product von AB in $\frac{1}{3}$ SO, der körperliche Inhalt des Kegels SAB, und das Product der Grundfläche FGH in $\frac{1}{3}$ SO, der körperliche Inhalt der Pyramide TFGH; also ist der Inhalt der Pyramide, weil die Grundflächen gleich sind, dem Inhalt des Kegels gleich. Aus einem ähnlichen Grunde sind die Py-

ramide TIKL und der Kegel SDE gleich grofs; also ist der abgekürzte Kegel ADEB der abgekürzten Pyramide FGHIKL gleich. Aber die dem Kreise vom Halbmesser AO an Inhalt gleiche Grundfläche FGH, hat zum Maafse $\pi \times AO^2$, eben so die Grundfläche IKL, $\pi \times DP^2$, und die mittlere Proportionale zwischen $\pi \times AO^2$ und $\pi \times DP^2$ ist $\pi \times AO \times DP$; also ist der Inhat der abgekürzten Pyramide, welche dem Inhalte des abgekürzten Kegels gleich ist, $\frac{1}{3} OP \times (\pi \times AO^2 + \pi \times DP^2 + \pi \times AO \times DP)$ (6s B. 20r S.), oder

$$\tfrac{1}{3} \pi \times OP \times (AO^2 + DP^2 + OA \times DP)\ *).$$

*) Hier läfst sich ein ähnlicher Satz einschalten wie oben bey der abgekürzten Pyramide, nämlich folgender

Lehrsatz.

Ein abgekürzter Kegel ist kleiner *als ein Cylinder, dessen Grundfläche der halben Summe der beiden Grundflächen des Kegels, und dessen Höhe der Höhe des abgekürzten Kegels gleich ist, und zwar um einen Kegel von dessen Grundfläche der Halbmesser, dem Unterschiede der Halbmesser der beiden Grundflächen des abgekürzten Kegels, und dessen Höhe der Hälfte der Höhe des abgekürzten Kegels gleich ist.*

Ferner ist der abgekürzte Kegel gröfser *als ein Cylinder, von dessen Grundfläche der Durchmesser, der halben Summe der Durchmesser der beiden Grundflächen des abgekürzten Kegels, und dessen Höhe der Höhe des abgekürzten Kegels gleich ist, und zwar um die Hälfte des vorhin beschriebenen, dem obigen Unterschiede gleichen Kegels.*

Denn der Halbmesser der obern Grundfläche des abgekürzten Kegels sey b, der Halbmesser der untern Grundfläche $b + k$, die Höhe H, so ist der Inhalt nach dem sechsten Satze $= \frac{1}{3} \pi H [b^2 + (b + k)^2 + b (b + k)] = \frac{1}{3} \pi H (3 b^2 + 3 b k + k^2) = \pi H (b^2 + b k + \frac{1}{3} k^2)$. Die Grundflächen des abgekürzten Kegels sind πb^2 und $\pi (b + k)^2$; also ist die Grundfläche des ersten oben beschriebenen Cylinders $= \frac{\pi b^2 + \pi (b + k)^2}{2} = \pi (b^2 + bk + \frac{1}{2} k^2)$; also sein Inhalt $\pi H (b^2 + bk + \frac{1}{2} k^2)$. Der Halbmesser

Siebenter Satz.

Lehrsatz.

Die convexe Oberfläche eines Kegels ist gleich dem Umfange seiner Grundfläche multiplicirt mit der Hälfte seines Schenkels.

Fig. 259. Der Halbmesser der Grundfläche des gegebenen Kegels sey AO, S sey des Kegels Spitze und SA sein Schenkel, so behaupte ich, daſs seine Oberfläche = Umf. AO $\times$ $\frac{1}{2}$ SA ist. Denn es sey, wenn es angeht Umf. AO $\times$ $\frac{1}{2}$ SA die Oberfläche eines Kegels, dessen Spitze S ist, und der zur Grundfläche einen Kreis hat, dessen Halbmesser OB gröſser ist als AO.

Man beschreibe um den kleinern Kreis ein regelmäſsiges Vieleck MNPT, dessen Seiten den Umfang vom Halbmesser OB nicht erreichen, so ist MNPT eine regelmäſsige Pyramide, welche zur Grundfläche das

des zweyten oben beschriebenen Cylinders ist $\frac{b + b + k}{2} = b + \frac{1}{2} k$; also seine Grundfläche $\pi (b + \frac{1}{2} k)^2 = \pi (b^2 + bk + \frac{1}{4} k^2)$; folglich sein Inhalt $= \pi H (b^2 + bk + \frac{1}{4} k^2)$. Also ist der Inhalt

des abgekürzten Kegels $= \pi H (b^2 + bk + \frac{1}{3} k^2)$;
des ersten Cylinders $= \pi H (b^2 + bk + \frac{1}{2} k^2)$;
des zweyten Cylinders $= \pi H (b^2 + bk + \frac{1}{4} k^2)$;

folglich ist der abgekürzte Kegel um $\frac{1}{6} \pi Hk^2$ kleiner als der erste, und um $\frac{1}{12} \pi Hk^2$, als die Hälfte des vorigen Unterschieds, gröſser als der zweyte Cylinder. Der Unterschied zwischen den Halbmessern des abgekürzten Kegels ist k. Giebt man einem Kegel dieses k zur Grundfläche, und $\frac{1}{2}$ H zur Höhe, so ist sein Inhalt $= \frac{1}{6} \pi Hk^2$; folglich ist der Inhalt eines solchen Kegels gleich dem Unterschiede zwischen dem abgekürzten Kegel und dem ersten Cylinder, und gleich dem doppelten Unterschiede zwischen dem abgekürzten Kegel und dem zweyten Cylinder.

A. d. Uebers.

Vieleck und zur Spitze den Punct S hat. Das Dreyeck, SMN, eines von denen, aus welchen die Oberfläche der Pyramide besteht, hat zum Maaſse das Product der Grundlinie MN in die Hälfte der Höhe SA, welche zugleich die Seite des gegebenen Kegels ist. Da diese Höhe in allen andern Dreyecken SNP, SPQ etc. die nämliche ist, so folgt, daſs die convexe Oberfläche der Pyramide gleich ist der Hälfte des Products vom Umfange MNPTM in SA. Aber der Umfang MNPTM ist gröſser als der Umfang AO; also wäre die convexe Oberfläche der Pyramide gröſser als der Umf. AO $\times \frac{1}{2}$ SA, und folglich gröſser als die convexe Oberfläche des Kegels, welcher dieselbe Spitze S und zur Grundfläche den Kreis vom Halbmesser OB hat. Diese convexe Oberfläche des Kegels ist aber im Gegentheile gröſser als die der Pyramide; denn legt man die Pyramide in der Grundfläche mit einer gleichen Pyramide zusammen, und den Kegel eben so mit einem gleichen Kegel, so umgiebt die Oberfläche der beiden Kegel von allen Seiten die Oberfläche der beiden Pyramiden; also ist die erste Fläche gröſser als die zweyte (2r Lehnsatz); folglich ist die Oberfläche des Kegels gröſser als diejenige der innerhalb desselben liegenden Pyramide. Eine Folge der Voraussetzung wäre das Gegentheil, also findet diese Voraussetzung nicht Statt, und folglich kann erstlich die Hälfte des Products des Umfanges der Grundfläche eines Kegels in seinen Schenkel, nicht das Maaſs der Oberfläche eines gröſsern Kegels seyn.

Ich behaupte zweytens, daſs diese nämliche Hälfte des Products auch nicht das Maaſs der Oberfläche eines kleinern Kegels seyn kann. Denn es sey BO der Halbmesser der Grundfläche zu der nämlichen Seite, und wenn es möglich ist, Umf. BO $\times \frac{1}{2}$ SB die Ober-

fläche des Kegels, dessen Spitze S und dessen Halbmesser der Grundfläche AO kleiner als OB ist.

Nachdem man, wie oben, construirt hat, ist die Oberfläche der Pyramide SMNPT auch jetzt gleich dem Umfange MNPT multiplicirt mit $\frac{1}{2}$ SA. Der Umfang MNPT aber ist kleiner als Umf. BO, SA ist kleiner als SB; also ist aus diesem doppelten Grunde die convexe Oberfläche der Pyramide kleiner als Umf. BO $\times$ $\frac{1}{2}$ SB, welches nach der Voraussetzung die Oberfläche des Kegels ist vom Halbmesser AO der Grundfläche; also würde die Oberfläche der Pyramide kleiner seyn als die des eingeschriebenen Kegels. Sie ist aber im Gegentheile gröfser; denn legt man die Pyramide mit der Grundfläche an die Grundfläche einer gleichen Pyramide, und den Kegel eben so an einen gleichen Kegel, so umgiebt die Oberfläche der beiden Pyramiden diejenige der beiden Kegel, und ist folglich gröfser. Also ist es zweytens unmöglich, dafs das Product vom Umfange der Grundfläche eines gegebenen Kegels, in die Hälfte seines Schenkels, die Oberfläche eines kleinern Kegels ausdrückt.

Mithin ist endlich die convexe Oberfläche eines Kegels gleich der Hälfte des Products des Umfanges seiner Grundfläche in seinen Schenkel.

Anmerkung. Es sey L die Seite des Kegels und R der Halbmesser seiner Grundfläche, so ist 2π R der Umfang der Grundfläche, und die Oberfläche des Kegels hat zum Maafse 2π R $\times$ $\frac{1}{2}$ L oder π RL.

Achter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 261. *Die convexe Oberfläche des abgekürzten Kegels ADEB ist gleich dem Producte seiner Seite AD in die*

halbe Summe der Umfänge seiner beiden Grundflächen AB und DE.

Man ziehe in der Ebene SAB, welche durch die Axe SO geht, senkrecht auf SA, die Linie AF, gleich dem Umfange vom Halbmesser AO, ferner SF, und DH mit AF parallel.

Wegen der ähnlichen Dreyecke SAO und SDC ist AO : DC = SA : SD, und wegen der ähnlichen Dreyecke SAF und SDH, AF : DH = SA : SD; also AF : DH = AO : DC, oder = Umf. AO : Umf. DC (4s B. 11r S.). Aber nach der Construction ist AF = Umf. AO; also ist DH = Umf. DC. Nun ist das Dreyeck SAF, welches AF $\times$ $\frac{1}{2}$ SA zum Maafse hat, gleich der Oberfläche des Kegels SAB, welcher Umf. AO $\times$ $\frac{1}{2}$ SA zum Maafse hat. Aus einem ähnlichen Grunde ist das Dreyeck SDH gleich der Oberfläche des Kegels SDE; also ist die Oberfläche des abgekürzten Kegels ADEB gleich der des Trapezes ADHF. Die letztere hat zum Maafse AD $\times$ $\left(\frac{AF + DH}{2}\right)$ (3s B. 7r S.); also ist die Oberfläche des abgekürzten Kegels ADEB gleich dem Producte seiner Seite AD in die halbe Summe der Umfänge seiner Grundflächen.

Zusatz. Man ziehe durch I, die Mitte von AD, IKL mit AB und IM mit AF parallel, so wird, wie oben, bewiesen, dafs IM = Umf. IK. Aber das Trapez ADHF ist gleich AD $\times$ IM = AD $\times$ Umf. IK.

Also folgt auch, dafs die Oberfläche eines abgekürzten Kegels gleich ist dem Producte seiner Seite in den Umfang eines Schnitts mitten zwischen den Grundflächen.

Anmerkung. Wenn eine Linie AD, die ganz an der nämlichen Seite der Linie OC, und in der nämlichen Ebene liegt, eine Umdrehung um OC macht, so hat die von AD beschriebene Oberfläche zum Maafse AD $\times$

$\left(\frac{\text{Umf. AO} + \text{Umf. DC}}{2}\right)$, oder AD $\times$ Umf. IK. Die Linien AO, DC, IK sind Perpendikel aus den Endpuncten und der Mitte der Linie AD, auf die Axe OC.

Denn verlängert man AD und OC, bis sie sich in S schneiden, so ist klar, daſs die von AD beschriebene Fläche, die Fläche eines abgekürzten Kegels ist, von dessen Grundflächen, OA und DC die Halbmesser sind. Des ganzen Kegels Spitze ist S; also hat diese Oberfläche das obige Maaſs.

Das Maaſs findet immer Statt, wenn selbst der Punct D in S fiele, welches einen ganzen Kegel geben würde, auch wenn die Linie AD mit der Axe parallel wäre, welches einen Cylinder geben würde. Im ersten Falle wäre DC null, im zweyten gleich AO oder IK.

Neunter Satz.

Lehnsatz.

Fig. 262. *AB, BC, CD sollen mehrere auf einander folgende Seiten eines regelmäſsigen Vielecks, O soll sein Mittelpunct und OI der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises seyn. Setzt man nun, daſs sich der Theil des Vielecks ABCD, welcher ganz auf einerley Seite des Durchmessers FG liegt, um diesen Durchmesser dreht, so hat die von ABCD beschriebene Oberfläche zum Maaſse MQ $\times$ Umf. OI, wenn MQ die Höhe dieser Oberfläche oder der Theil der Axe ist, welche zwischen den Perpendikeln AM und DQ liegt.*

Da der Punct I die Mitte von AB, und IK ein Perpendikel aus I auf der Axe ist, so hat die von AB beschriebene Oberfläche AB $\times$ Umf. IK zum Maaſse (8r S.). Man ziehe AX mit der Axe parallel, so sind die Seiten des Dreyecks ABX auf den Seiten des Dreyecks OIK senkrecht, nämlich OI auf AB, IK auf AX und OK auf

BX; also sind diese Dreyecke ähnlich und geben die Proportion AB : AX oder MN = OI : IK, oder = Umf. OI : Umf. IK; Also ist AB × Umf. IK = MN × Umf. OI. Daraus sieht man dafs die von AB beschriebene Oberfläche gleich ist dem Producte der Höhe MN in den Umfang des eingeschriebenen Kreises. Eben so ist die von BC beschriebene Oberfläche = NP × Umf. OI, die von CD beschriebene Oberfläche = PQ × Umf. OI. Also hat die von dem Theile ABCD des Vielecks beschriebene Oberfläche zum Maafse (MN + NP + PQ) × Umf. OI oder MQ × Umf. OI; also ist sie gleich dem Producte ihrer Höhe in den Umfang des eingeschriebenen Kreises.

Zusatz. Wenn das Vieleck eine grade Zahl von Seiten hat, und die Axe FG durch zwey gegenüberliegende Scheitel F und G geht, so ist die ganze von der Umdrehung des halben Vielecks FACG beschriebene Oberfläche gleich dem Producte der Axe FG in den Umfang des eingeschriebenen Kreises. Diese Axe FG ist zugleich der Durchmesser des umschriebenen Kreises.

Zehnter Satz.

Lehrsatz.

Die Kugelfläche ist gleich dem Producte des Durchmessers in den Umfang eines gröfsten Kreises.

Ich behaupte *erstlich*, dafs das Product des Durchmessers einer Kugel in ihren Umfang, von keiner gröfsern Kugel das Maafs seyn kann. Denn es sey, wenn (Fig. 263.) es angeht, AB × Umf. AC die Fläche der Kugel vom Halbmesser CD.

Man beschreibe um den Kreis vom Halbmesser CA ein regelmäfsiges Vieleck von einer graden Seitenzahl, welches den Umfang vom Halbmesser CD nicht erreicht;

M und S sollen zwey gegenüberliegende Scheitel dieses Vielecks seyn. Um den Durchmesser MS drehe sich das halbe Vieleck MPS. Die von dem Vielecke beschriebene Fläche hat zum Maafse MS $\bowtie$ Umf. AC (9r S.). Aber MS ist gröfser als AB, also wäre die von dem Vielecke beschriebene Oberfläche gröfser als AB $\bowtie$ Umf. AC, und folglich gröfser als die Kugelfläche vom Halbmesser CD. Die Kugelfläche ist aber im Gegentheile gröfser als die von dem Vielecke beschriebene Fläche, weil sie solche von allen Seiten umgiebt; also kann erstlich das Product des Durchmessers einer Kugel in den Umfang des gröfsten Kreises von keiner gröfsern Kugelfläche das Maafs seyn.

Ich behaupte *zweytens*, dafs dieses nämliche Product von keiner kleinern Kugelfläche das Maafs seyn kann. Denn es sey, wenn es angeht, DE $\bowtie$ Umf. CD gleich der Kugelfläche vom Halbmesser CA. Man construire wie vorhin, so ist die Oberfläche des von dem Vielecke beschriebenen Körpers wiederum gleich MS $\bowtie$ Umf. AC. Aber MS ist kleiner als DE, und Umf. AC kleiner als Umf. CD; also wäre aus beiden Gründen die Oberfläche des von dem Vielecke beschriebenen Körpers kleiner als DE $\bowtie$ Umf. CD, und folglich kleiner als die Kugelfläche vom Halbmesser AC. Im Gegentheile aber ist die von dem Vielecke beschriebene Fläche gröfser als die Kugelfläche vom Halbmesser AC, weil sie solche ganz umgiebt; also kann zweytens das Product des Durchmessers einer Kugel in den Umfang ihres gröfsten Kreises keine kleinere Kugelfläche messen.

Mithin ist die Kugelfläche gleich dem Producte ihres Durchmessers in des gröfsten Kreises Umfang.

Zusatz. Die Fläche des gröfsten Kreises ist gleich dem Producte seines Umfanges in die Hälfte des Halbmessers, oder in ein Viertheil des Durchmessers; *also*

ist die Kugelfläche vier mal so grofs als der gröfste Kreis.

Anmerkung. Da auf diese Weise die Kugelfläche mit einer Ebene verglichen wird, so ist es leicht, den Inhalt von Kugelzweyecken und Dreyecken, deren Verhältnifs zur Kugelfläche oben gefunden wurde, auszudrücken.

Das Zweyeck, z. B., dessen Winkel A ist, verhält sich nämlich zur Kugelfläche wie der Winkel A zu vier rechten (7s B. 20r S.), oder wie der Bogen des gröfsten Kreises, welcher den Winkel A misset, zu seinem Umfange. Da nun die Kugelfläche gleich ist dem Producte des Umfanges des gröfsten Kreises in den Durchmesser, so ist der Inhalt des Zweyecks gleich dem Producte des Bogens, welcher den Winkel des Zweyecks mifst, in den Durchmesser.

Ferner ist der Inhalt jedes Kugeldreyecks gleich dem Inhalte eines Zweyecks, dessen Winkel die Hälfte des Ueberschufses der drey Winkel des Dreyecks über zwey rechte ist (7s B. 23r S.). P, Q, R sollen die Bogen gröfster Kreise seyn, welche die drey Winkel des Dreyecks messen; C sey der Umfang eines gröfsten Kreises vom Durchmesser D, so ist das Kugeldreyeck einem Zweyecke gleich, dessen Winkel $\frac{P + Q + R - \frac{1}{2} C}{2}$ zum Maafse hat, und folglich seine Fläche $= D \times \left(\frac{P + Q + R - \frac{1}{2} C}{2}\right)$.

Im dreyrechtwinkligen Dreyecke ist jeder der Bogen P, Q, R gleich $\frac{1}{4}$ C, also ihre Summe $\frac{3}{4}$ C; der Ueberschufs dieser Summe über $\frac{1}{2}$ C ist $\frac{1}{4}$ C, und die Hälfte des Ueberschufses $\frac{1}{8}$ C; also ist die Fläche des dreyrechtwinkligen Dreyecks $= \frac{1}{8} C \times D$, oder gleich dem achten Theils der ganzen Kugelfläche.

Der Inhalt der Kugelvielecke findet sich aus dem Inhalte der Dreyecke nach dem 24sten Satze des 7ten Buchs. Die Einheit des Flächenmaafses, nämlich des dreyrechtwinkligen Dreyecks, ist jetzt mit einer Ebene verglichen.

Eilfter Satz.

Lehrsatz.

Die Fläche einer beliebigen Kugelzone ist gleich dem Producte der Höhe der Zone in den Umfang des gröfsten Kreises.

Fig. 269. EF sey ein beliebiger Bogen, gröfser oder kleiner als der Quadrant, und FG auf den Halbmesser EC senkrecht, so behaupte ich, dafs die durch die Umdrehung des Bogens EF um EC beschriebene Zone mit *einer* Grundfläche, EG ⋈ Umf. EC zum Maafse hat.

Man setze zuerst, die Zone habe ein kleineres Maafs und es sey dafselbe, wenn es möglich ist = EG ⋈ Umf. CA. In den Bogen EF beschreibe man einen Theil eines regelmäfsigen Vielecks EMNOPF, dessen Seiten den mit dem Halbmesser CA beschriebenen Umfang nicht erreichen. Darauf ziehe man CI auf EM senkrecht. Die durch die Umdrehung des Vielecks EMF um EC beschriebene Oberfläche hat zum Maafse EG ⋈ Umf. CI (9r S.)

Dieses Product ist gröfser als das Product EG ⋈ Umf. AC, welches nach der Voraussetzung das Maafs der vom Bogen EF beschriebenen Zone ist. Also wäre die von dem Vielecke EMNOPF beschriebene Oberfläche gröfser als die von dem umschriebenen Bogen EF erzeugte Oberfläche. Im Gegentheile aber ist die letzte gröfser als die erste, weil sie sie von allen Seiten umgiebt; also kann erstlich das Maafs irgend einer Kugel-

zone mit *einer* Grundfläche, nicht kleiner seyn als das Product der Höhe der Zone in den Umfang des gröfsten Kreises.

Ich behaupte zweytens, dafs das Maafs der Zone nicht gröfser seyn kann als das Product der Höhe der Zone in den Umfang des gröfsten Kreises. Denn gesetzt, es sey von der vom Bogen AB um AC beschriebenen Zone die Rede, und es sey, wenn es möglich ist, Zone AB $>$ AD $\bowtie$ Umf. AC. Die ganze Kugelfläche, welche aus den beiden Zonen AB und BH besteht, hat zum Maafse AH $\bowtie$ Umf. AC (10r S.), oder AD $\bowtie$ Umf. AC $+$ DH $\bowtie$ Umf. AC; wäre also Zone AB $>$ AD $\bowtie$ Umf. AC, so müfste seyn: Zone BH $<$ DH $\bowtie$ Umf. AC, welches dem vorhin bewiesenen widerspricht. Also kann zweytens, das Maafs einer Kugelzone mit *einer* Grundfläche nicht gröfser seyn als das Product der Höhe der Zone in den Umfang des gröfsten Kreises.

Mithin ist das Maafs jeder Kugelzone mit *einer* Grundfläche gleich dem Producte der Höhe der Zone in den Umfang des gröfsten Kreises.

Fig. 220. Nun betrachte man eine beliebige Zone mit *zwey* Grundflächen; die durch die Umdrehung des Bogens FH um den Durchmesser DE entsteht, und ziehe die Perpendikel FO und HQ auf den Durchmesser. Die von dem Bogen FH beschriebene Zone ist der Unterschied der beiden von den Bogen DH und DF beschriebenen Zonen; diese haben zum Maafse DQ $\bowtie$ Umf. CD, und DO $\bowtie$ Umf. CD; also ist die von FH beschriebene Zone $=$ (DQ $-$ DO) $\bowtie$ Umf. CD oder $=$ OQ $\bowtie$ Umf. CD.

Also hat jede Kugelzone mit *einer* oder *zwey* Grundflächen das Product der Höhe in den Umfang des gröfsten Kreises zum Maafse.

Zusatz. Zwey Zonen in einer und derselben Kugel oder in gleichen Kugeln, verhalten sich wie ihre Höhen, und jede beliebige Zone verhält sich zur Kugelfläche wie die Höhe der Zone zum Durchmesser.

Zwölfter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 264 u. 265. *Wenn sich das Dreyeck BAC und das Rechteck BCEF von einerley Grundlinie und Höhe, beide um die gemeinschaftliche Grundlinie BC drehen, so ist der Inhalt des durch die Umdrehung des Dreyecks beschriebenen Körpers ein Drittheil von dem Inhalte des Cylinders, der durch die Umdrehung des Rechtecks entsteht.*

Fig. 264. Man ziehe AD auf die Axe senkrecht, so ist der von dem Dreyecke ABD beschriebene Kegel ein Drittheil des von dem Rechtecke AFBD beschriebenen Cylinders (5r S.). Eben so ist der von dem Dreyecke ADC beschriebene Kegel ein Drittheil des von dem Rechtecke ADCE beschriebenen Cylinders; also ist die Summe der beiden Kegel, oder der von ABC beschriebene Körper ein Drittheil der Summe der beiden Cylinder, oder des von dem Rechtecke BCEF beschriebenen Cylinders.

Fig. 265. Wenn das Perpendikel AD aufserhalb des Dreyecks fällt, so ist der von ABC beschriebene Körper, der Unterschied der von ABD und ACD beschriebenen Kegel. Zugleich aber ist der von BCEF beschriebene Cylinder der Unterschied der Cylinder, welche AFBD und AECD beschreiben. Also ist der durch die Umdrehung des Dreyecks beschriebene Körper immer ein Drittheil des durch die Umdrehung des Rechtecks von gleicher Höhe und Grundlinie, beschriebenen Cylinders.

Anmerkung. Die Fläche des Kreises vom Halbmesser AD ist $\pi \times AD^2$, also ist $\pi \times AD^2 \times BC$ das Maafs des von BCEF beschriebenen Cylinders, und folglich $\frac{1}{3} \pi \times AD^2 \times BC$ das Maafs des von dem Dreyecke ABC beschriebenen Körpers.

Dreyzehnter Satz.

Aufgabe.

Fig. 266. *Wenn sich das Dreyeck CAB um eine willkürliche Linie CD dreht, die, aufserhalb des Dreyecks, durch seinen Scheitel C geht, das Maafs des dadurch erzeugten Körpers zu finden.*

Man verlängere die Seite AB bis sie die Axe CD in D trifft, und ziehe aus A und B die Perpendikel AM und BN auf die Axe.

Der von dem Dreyecke CAD beschriebene Körper hat zum Maafse $\frac{1}{3} \pi \times AM^2 \times CD$ (12r S.), der von dem Dreyeekc CBD beschriebene Körper hat zum Maafse $\frac{1}{3} \pi \times BN^2 \times CD$; also ist der Unterschied dieser Körper, oder der von ABC beschriebene Körper gleich $\frac{1}{3} \pi (AM^2 - BN^2) \times CD$.

Diesem Ausdrucke kann man eine andere Gestalt geben. Man ziehe nämlich aus I, der Mitte von AB, IK auf CD senkrecht, und durch den Punct B, BO mit CD parallel; so ist $AM + BN = 2IK$ (3s B. 7r S.) und $AM - BN = AO$; also $(AM + BN)(AM - BN)$, oder $AM^2 - BN^2 = 2IK \times AO$ (5s B. 10r S.). Das Maafs des erzeugten Körpers läfst sich also auch durch $\frac{2}{3} \pi \times IK \times AO \times CD$ ausdrücken. Zieht man nun CP auf AB senkrecht, so sind die Dreyecke ABO und DCP ähnlich, mithin ist $AO : CP = AB : CD$, woraus folgt: $AO \times CD = CP \times AB$. Ferner ist $CP \times AB$ der doppelte Inhalt des Dreyecks ABC; also ist $OA \times CD = 2ABC$; folglich ist der Inhalt des von dem Drey-

ecke ABC beschriebenen Körpers auch $\frac{4}{3}\pi \times ABC \times IK$, oder was das Nämliche ist, $= ABC \times \frac{2}{3}$ Umf. IK (denn Umf. $IK = 2\pi . IK$). *Also hat der Inhalt des durch die Umdrehung des Dreyecks ABC beschriebenen Körpers zum Maafse das Product des Dreyecks in zwey Drittheile des Umfanges, welchen der Mittelpunct I seiner Grundlinie beschreibt.*

Fig. 267. *Zusatz.* Wenn die Seiten AC und CB gleich sind, so ist die Linie CI auf AB senkrecht, der Inhalt von ABC ist alsdann gleich $AB \times \frac{1}{2} CI$ und der Inhalt des Körpers $\frac{4}{3}\pi \times ABC \times IK$ wird $\frac{2}{3}\pi \times AB \times IK \times CI$. Die Dreyecke ABO und CIK sind ähnlich, folglich ist $AB : BO$ oder $MN = CI : IK$, also ist $AB \times IK = MN \times CI$; folglich hat der von dem gleichschenkligen Dreyecke ABC beschriebene Körper $\frac{2}{3}\pi \times MN \times CI^2$ zum Maafse.

Anmerkung. Die allgemeine Auflösung scheint vorauszusetzen dafs die Linie AB, verlängert die Axe schneidet; aber das Resultat würde nicht weniger richtig seyn, wenn AB mit der Axe parallel wäre.

Fig. 268. Denn der von AMNB beschriebene Cylinder hat zum Maafse $\pi . AM^2 . MN$, der von ACM beschriebene Kegel, $\frac{1}{3}\pi AM^2 . CM$, und der von BCN beschriebene Kegel, $\frac{1}{3}\pi AM^2 . CN$. Nimmt man die beiden ersten Körper zusammen, und den dritten von der Summe weg, so erhält man für den von ABC beschriebenen Körper, $\pi . AM^2 (MN + \frac{1}{3} CM - \frac{1}{3} CN)$ und weil $CN - CM = MN$, so reducirt sich der Ausdruck auf $\frac{1}{3}\pi . AM^2 . \frac{2}{3} MN$, oder $\frac{2}{3}\pi . CP^2 . MN$; welches mit den schon gefundenen Resultaten übereinstimmt.

Vierzehnter Satz.

Lehrsatz.

Fig. 262. *AB, BC uud CD sollen verschiedene auf einander folgende Seiten eines regelmäſsigen Vielecks, O soll sein Mittelpunct und OI der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises seyn. Stellt man sich vor, daſs sich der Ausschnitt des Vielecks AOD der auf einerley Seite des Durchmessers FG liegt um den Durchmesser dreht, so ist der Inhalt des beschriebenen Körpers* $\frac{2}{3}\pi \,.\, OI^2 \,.\, MQ$, *wenn MQ der von den äuſsersten Perpendikeln AM und DQ begrenzte Theil der Axe ist.*

Denn weil das Vieleck regelmäſsig ist, so sind alle Dreyecke AOB, BOC etc. gleich und gleichschenklig. Nun hat nach dem Zusatze des vorigen Satzes der von dem gleichschenkligen Dreyecke AOB beschriebene Körper $\frac{2}{3}\pi \,.\, OI^2 \,.\, MN$ zum Maaſse, der von dem Dreyecke BOC beschriebene Körper, $\frac{2}{3}\pi \,.\, OI^2 \,.\, NP$, der von dem Dreyecke COD beschriebene Körper, $\frac{2}{3}\pi \,.\, OI^2 \,.\, PQ$; also hat die Summe dieser Körper, oder der von dem Ausschnitte AOD des Vielecks beschriebene ganze Körper, zum Maaſse, $\frac{2}{3}\pi \,.\, OI^2\,(MN + NP + PQ)$, oder $\frac{2}{3}\pi \,.\, OI^2 \,.\, MQ$.

Funfzehnter Satz.

Lehrsatz.

Jeder Kugelausschnitt hat zum Maaſse das Product der Zone, welche ihm zur Grundfläche dient, in ein Drittheil des Halbmessers. Die ganze Kugel hat zum Maaſse das Product ihrer Oberfläche in ein Drittheil des Halbmessers.

Fig. 269. ABC sey der Kreisausschnitt der durch die Umdrehung um AC den Kugelausschnitt beschreibt. Da die von AB beschriebene Zone AD ⋈ Umf. AC,

oder 2π . AC . AD ist (12r S.), so behaupte ich, dafs der Kugelausschnitt zum Maafse das Product dieser Zone in $\frac{1}{3}$ AC, oder $\frac{2}{3}\pi$. AC² . AD zum Maafse hat.

Denn man setze *erstlich*, die Gröfse $\frac{2}{3}\pi$. AC² . AD sey, wenn es möglich, das Maafs eines gröfsern Kugelausschnitts, zum Beyspiel des von dem ACB ähnlichen Kreisausschnitte, EGF beschriebenen Ausschnittes.

Man beschreibe in den Bogen EF den Theil EMNF eines regelmäfsigen Vielecks, dessen Seiten den Bogen AB nicht erreichen. Darauf stelle man sich vor, dafs sich der Ausschnitt des Vielecks ENFC mit den Kreisausschnitt ECF zugleich um EC drehe. CI sey der Halbmesser des in das Vieleck beschriebenen Kreises und FG auf EC senkrecht. Der von dem Ausschnitte des Vielecks beschriebene Körper hat zum Maafse $\frac{2}{3}\pi$. CI² . EG (14r S.). Nun ist nach der Construction CI gröfser als AC und ED gröfser als AD: denn zieht man AB und EF, so geben die ähnlichen Dreyecke EFG und ABD die Proportion EG : AD = FG : BD = CF : CB, also ist EG > AD.

Aus diesem zweyfachen Grunde ist $\frac{2}{3}\pi$. CI² . EG gröfser als $\frac{2}{3}\pi$. CA² . AD. Das erste ist der Ausdruck des Maafses für den von dem Ausschnitte des Vielecks beschriebenen Körper; das zweyte ist nach der Voraussetzung der Ausdruck des Maafses für den von dem Kreisausschnitte ECF beschriebenen Kugelausschnitt. Also würde der von dem Ausschnitte des Vielecks beschriebene Körper gröfser seyn als der von dem Kreisausschnitte beschriebene Kugelausschnitt. Ersterer aber ist im Gegentheile kleiner als letzterer, weil er innerhalb desselben liegt; also ist die Voraussetzung, von welcher man ausging, nicht zuläfslich, und folglich kann erstlich das Product der Zone oder Grundfläche

eines Kugelausschnitts in ein Drittheil des Halbmessers nicht das Maaſs eines gröſsern Kugelausschnitts seyn.

Ich behaupte *zweytens*, daſs dieses Product nicht das Maaſs eines kleinern Kugelausschnitts seyn kann. Denn CEF sey der Kreisausschnitt, welcher durch seine Umdrehung den gegebenen Kugelausschnitt beschreibt, und man setze, $\frac{2}{3}\pi \cdot CE^2 \cdot EG$ sey, wenn es möglich ist, das Maaſs eines kleinern Kugelausschnitts, z. B. desjenige, welcher aus dem Kreisausschnitte ACB entsteht.

Die Construction bleibe die nämliche, so hat der von dem Ausschnitte des Vielecks beschriebene Körper zum Maaſse $\frac{2}{3}\pi \cdot CI^2 \cdot EG$. Da nun CI kleiner ist als CE, so ist der Körper kleiner als $\frac{2}{3}\pi \cdot CE^2 \cdot EG$, welches nach der Voraussetzung das Maaſs des von dem Kreisausschnitte ACB beschriebenen Kugelausschnitts ist. Also würde der von dem Ausschnitte des Vielecks beschriebene Körper kleiner seyn als der, von ACB beschriebene Kugelausschnitt. Er ist aber im Gegentheile gröſser, weil er ihn umgiebt. Also ist es zweytens unmöglich, daſs das Product der Zone eines Kugelausschnitts in ein Drittheil des Halbmessers, das Maaſs eines kleinern Kugelausschnitts wäre.

Also hat jeder Kugelausschnitt das Product der Zone, welche ihm zur Grundfläche dient, in ein Drittheil des Halbmessers zum Maaſse.

Ein Kreisausschnitt ACB kann bis zum Halbkreise zunehmen; dann ist der durch seine Umdrehung beschriebene Kugelausschnitt die ganze Kugel. *Also ist der körperliche Inhalt der Kugel gleich dem Producte der Kugelfläche in ein Drittheil des Halbmessers.*

Zusatz. Da sich Kugelflächen wie die Quadrate der Halbmesser verhalten, so verhalten sich die Producte derselben in die Halbmesser, wie die Würfel der Halbmesser. *Also verhält sich der körperliche Inhalt zweyer*

Kugeln wie die Würfel ihrer Halbmesser, oder wie die Würfel der Durchmesser.

Anmerkung. R sey der Halbmesser einer Kugel, so ist ihre Oberfläche $4\pi R^2$ und ihr körperlicher Inhalt $4\pi R^2 \times \frac{1}{3} R$ oder $\frac{4}{3}\pi R^3$. Heifst der Durchmesser D, so ist $R = \frac{1}{2} D$ und $R^3 = \frac{1}{8} D^3$, also läfst sich der körperliche Inhalt auch durch $\frac{4}{3}\pi \cdot \frac{1}{8} D^3$ oder $\frac{1}{6}\pi D^3$ ausdrücken.

Sechszehnter Satz.

Lehrsatz.

Die Oberfläche der Kugel verhält sich zur Oberfläche des umschriebenen Cylinders (die Grundflächen desselben mit eingeschlossen) wie 2 zu 3. Der Inhalt dieser beiden Körper verhält sich eben so.

Fig. 270. MPNQ sey ein gröfster Kreis der Kugel, ABCD das umschriebene Quadrat. Dreht man den Halbkreis PMQ und das halbe Quadrat PADQ nm den Durchmesser PQ, so beschreibt der Halbkreis die Kugel und das halbe Quadrat den Cylinder um die Kugel.

Die Höhe dieses Cylinders ist gleich dem Durchmesser PQ. Die Grundfläche desselben ist gleich dem gröfsten Kreise, weil sie zum Durchmesser AB = MN hat, folglich ist die convexe Oberfläche des Cylinders (4te Erkl.) gleich dem Umfange des gröfsten Kreises multiplicirt mit seinem Durchmesser. Dieses Maafs ist auch das Maafs der Kugelfläche (10r S.), also folgt, *dafs die Kugelfläche der convexen Oberfläche des umschriebenen Cylinders gleich ist.*

Aber die Kugelfläche ist gleich vier gröfsten Kreisen; also ist auch die convexe Oberfläche des umschriebenen Cylinders gleich vier gröfsten Kreisen. Rechnet man hinzu die beiden Grundflächen des Cylinders, welche zwey gröfste Kreise sind, so ist die ganze Ober-

fläche des umschriebenen Cylinders gleich sechs gröfsten Kreisen; also verhält sich die Kugelfläche zur ganzen Cylinderfläche wie 4 zu 6, oder wie 2 zu 3. Dies ist das Erste was zu beweisen war.

Weil ferner die Grundfläche des umschriebenen Cylinders einem gröfsten Kreise und seine Höhe dem Durchmesser gleich ist, so ist der körperliche Inhalt des Cylinders gleich dem Producte des gröfsten Kreises in den Durchmesser (1r S.). Nun ist der körperliche Inhalt der Kugel gleich dem Producte vier gröfster Kreise in ein Drittheil des Halbmessers (16r S.), oder gleich dem Producte eines gröfsten Kreises in $\frac{4}{3}$ des Halbmessers, oder $\frac{2}{3}$ des Durchmessers. Also verhält sich der Inhalt der Kugel zum Inhalte des umschriebenen Cylinders wie 2 zu 3, und folglich verhalten sich diese beiden Körper wie ihre Oberflächen.

Anmerkung. Wenn man sich ein Polyëder vorstellt, dessen sämmtliche Seitenflächen die Kugel berühren, so kann man dieses Polyëder als aus Pyramiden zusammengesetzt ansehen, deren Spitzen sämmtlich im Mittelpuncte der Kugel liegen, und deren Grundflächen die Seitenflächen des Polyëders sind. Es ist aber klar, dafs alle diese Pyramiden den Halbmesser der Kugel zur gemeinschaftlichen Höhe haben, so dafs der Inhalt jeder Pyramide gleich ist dem Producte der zugehörigen Seitenfläche des Polyëders, welche ihm zur Grundfläche dient, in ein Drittheil des Halbmessers. Also ist des ganzen Polyëders Inhalt gleich dem Producte seiner Oberfläche in ein Drittheil des Halbmessers der eingeschriebenen Kugel.

Daraus folgt, dafs sich der Inhalt der um die Kugel beschriebenen Polyëder wie die Oberfläche dieser Polyëder verhält. Also kommt die Eigenschaft, welche

oben für die umschriebenen Cylinder bewiesen wurde, noch unendlich vielen andern Körpern zu.

Oben hätte auch bemerkt werden können, dafs sich der Inhalt der um den Kreis beschriebenen Vielecke wie ihre Umfänge verhält.

Siebzehnter Satz.

Aufgabe.

Fig. 271. *Wenn sich der Kreisabschnitt BMD um einen aufserhalb desselben liegenden Durchmesser dreht, den Inhalt des entstehenden Körpers zu finden.*

Man ziehe BE und DF auf die Axe senkrecht und aus dem Mittelpuncte C, auf die Sehne BD, die Linie CI senkrecht, desgleichen die Halbmesser CB und CD.

Der von dem Ausschnitte BCA beschriebene Körper ist $= \frac{2}{3}\pi \cdot CB^2 \cdot AE$ (15r S.). Der vom Ausschnitte DCA beschriebene Körper ist $= \frac{2}{3}\pi \cdot CB^2 \cdot AF$, also der Unterschied dieser beiden Körper, das heifst, derjenige Körper, welchen der Ausschnitt DCB beschreibt, $= \frac{2}{3}\pi \cdot CB^2 (AF - AE) = \pi \cdot \frac{2}{3} CB^2 \cdot EF$. Aber der von dem gleichschenkligen Dreyecke DCB beschriebene Körper hat zum Maafse $\frac{2}{3}\pi \cdot CI^2 \cdot EF$ (14r S.); also ist der von dem Abschnitte BMD beschriebene Körper $= \frac{2}{3}\pi \cdot EF (CB^2 - CI^2)$. Nun ist in dem rechtwinkligen Dreyecke CBI, $CB^2 - CI^2 = BI^2 = \frac{1}{4} BD^2$; also hat der von dem Abschnitte BMD beschriebene Körper zum Maafse $\frac{2}{3}\pi \cdot EF \cdot \frac{1}{4} BD^2$, oder $\frac{1}{6}\pi \cdot BD^2 \cdot EF$.

Anmerkung. Der von dem Abschnitte BMD beschriebene Körper verhält sich zur Kugel vom Durchmesser BD, wie $\frac{1}{6}\pi \cdot BD^2 \cdot EF$ zu $\frac{1}{6}\pi BD^3$, oder wie EF zu BD.

Achtzehnter Satz.

Lehrsatz.

*Jeder Kugelabschnitt zwischen zwey parallelen Ebenen hat zum Maaſse das Product der halben Summe seiner Grundflächen in seine Höhe, zusammengenommen mit dem Inhalte einer Kugel, deren Durchmesser der Höhe gleich ist *).*

Fig. 271. BE und DF sollen die Halbmesser der Grundflächen des Abschnitts, EF soll seine Höhe seyn, so daſs der Abschnitt durch die Umdrehung der Figur BMDFE um die Axe FE entsteht. Der Inhalt des von dem Abschnitte BMD beschriebenen Körpers ist $= \frac{1}{6}\pi \cdot BD^2 \cdot EF$ (17r S.). Der Inhalt des von dem Trapez BDFE beschriebenen abgekürzten Kegels ist $= \frac{1}{3}\pi \cdot EF\,(BE^2 + DF^2 + BE \cdot DF)$ (6r S.); also ist der Kugelabschnitt, welcher aus der Summe dieser beiden Körper besteht, $= \frac{1}{6}\pi \cdot EF\,(2\,BE^2 + 2\,DF^2 + 2\,BE \cdot BF + BD^2)$. Zieht man aber BO mit EF parallel, so ist $DO = DF - BE$, $DO^2 = DF^2 - 2\,DF \cdot BE + BE^2$ (3s B. 9r S.); und folglich $BD^2 = BO^2 + DO^2 = EF^2 + DF^2 - 2\,DF \times BE + BE^2$. Setzt man diesen Werth statt BD^2 in den Ausdruck des Abschnitts und läſst weg was sich aufhebt, so erhält man für den körperlichen Inhalt des Abschnitts

$$\frac{1}{6}\pi \cdot EF\,(3\,BE^2 + 3\,DF^2 + EF^2),$$

welcher Ausdruck sich in zwey Theile zerlegen läſst. Der erste Theil $\frac{1}{6}\pi \cdot EF\,(3\,BE^2 + 3\,DF^2)$, oder

*) Dieser Satz hat Aehnlichkeit mit den oben beygefügten Sätzen von der abgekürzten Pyramide und dem abgekürzten Kegel. A. d. Uebers.

$EF\left(\frac{\pi . BE^2 + \pi . DF^2}{2}\right)$ ist das Product der halben Summe der Grundflächen in die Höhe; der andere Theil $\frac{1}{6}\pi . EF^3$ drückt den Inhalt einer Kugel aus, deren Durchmesser EF ist (15r Satz Anmerk.); also ist der Inhalt des Kugelabschnitts etc.

Zusatz. Wenn eine der Grundflächen Null ist, so erhält man einen Abschnitt mit *einer* Grundfläche. *Also ist der Inhalt jedes Kugelabschnitts mit* einer *Grundfläche gleich dem halben Inhalte eines Cylinders von der nämlichen Grundfläche und Höhe zusammengenommen mit dem Inhalte einer Kugel, deren Durchmesser der Höhe gleich ist.*

Allgemeine Anmerkung.

Der Halbmesser der Grundfläche eines Cylinders sey R, H seine Höhe, so ist der körperliche Inhalt des Cylinders $\pi R^2 \times H$ oder $\pi R^2 H$.

Der Halbmesser der Grundfläche eines Kegels sey R, seine Höhe H, so ist der körperliche Inhalt des Kegels $\pi R^2 \times \frac{1}{3} H$, oder $\frac{1}{3}\pi R^2 H$.

A und B sollen die Halbmesser der Grundflächen eines abgekürzten Kegels, H soll seine Höhe seyn, so ist der körperliche Inhalt des abgekürzten Kegels gleich $\frac{1}{3}\pi H (A^2 + B^2 + AB)$.

R sey der Halbmesser einer Kugel, so ist ihr körperlicher Inhalt $\frac{4}{3}\pi R^3$.

R sey der Halbmesser eines Kugelausschnitts, H die Höhe der Zone, welche ihm zur Grundfläche dient, so ist der körperliche Inhalt des Ausschnitts $\frac{2}{3}\pi R^2 H$.

P und Q sollen die beiden Grundflächen eines Kugelabschnitts seyn, H seine Höhe, so ist der körperliche Inhalt des Abschnitts $\left(\frac{P + Q}{2}\right) . H + \frac{1}{6} \pi H^3$.

Hat der Kugelabschnitt nur *eine* Grundfläche P, so ist die andre Null, und der körperliche Inhalt des Abschnitts ist $^{1}\, PH + \frac{1}{5} \pi H^3$.

Ende der Elemente der Geometrie.

Anmerkungen
zu den Elementen der Geometrie.

Erste Anmerkung.
Ueber einige Benennungen und Erklärungen.

In den obigen Elementen kommen einige neue Ausdrücke und Erklärungen vor, durch welche man beabsichtigt der geometrischen Sprache gröſsere Genauigkeit und Bestimmtheit zu geben. Wir wollen diese Veränderungen zu rechtfertigen suchen und noch einige andere vorschlagen, welche vielleicht ihren Zweck ebenfalls erfüllen.

Bey der gewöhnlichen Erklärung *des rechtwinkligen Parallelogramms und des Quadrats*, wird gesagt, daſs die Winkel dieser Figuren rechte sind. Genauer wäre es, zu sagen, daſs die Winkel gleich sind. Denn setzt man voraus, daſs die vier Winkel eines Vierecks rechte sind, und selbst, daſs rechte Winkel einander gleich sind, so bezieht man sich auf Sätze, die erst bewiesen werden müssen. Man würde diesen Uebelstand und viele andere ähnliche vermeiden, wenn man die Erklärungen, anstatt sie, wie gewöhnlich, gleich im Anfange voraus zu schicken, in das Buch vertheilte, und jede an diejenige Stelle setzte, wo zuvor das was zur Erklärung nöthig ist, bewiesen worden *).

*) Diese Bemerkung ist gewiſs sehr richtig. Ich meines Theils habe die Regel, von ihrer Angemessenheit überzeugt, in

Das Wort *Parallelogramm* bedeutet, seiner Zusammensetzung nach: *Parallele Linien.* Also paſst es nicht blos auf vierseitige Figuren, sondern eben so wohl auf Figuren, von sechs, acht u. s. w. Seiten, wenn nur die gegenüberliegenden Seiten parallel sind. Das Wort *Parallelepipedum* bedeutet: *Parallele Ebenen.* Es bezeichnet also nicht blos einen Körper mit sechs Seitenflächen, sondern eben so wohl Körper mit acht, zehn u. s. w. Seitenflächen, wenn nur die, einander gegenüberliegenden, parallel sind. Es scheint also, daſs die Wörter, Parallelogramm und Parallelepipedum, die auſserdem sehr lang sind, in der Geometrie vermieden werden müſsten. Man könnte an ihre Stelle *Rhombus* und *Rhomboïdes* setzen, welche Wörter bequemer sind, das Viereck mit gleichen Seiten insbesondere aber, *Raute* (losange) nennen.

Das Wort *Neigung* (inclinaison) muſs in demselben Sinne genommen werden als *Winkel.* Beide bedeuten die gegenseitige Lage zweyer Linien, die sich, wie sie sind, oder verlängert, schneiden. Die Neigung zweyer Linien ist Null, wenn der Winkel Null ist, das heiſst, wenn die Linien parallel sind, oder zusammenfallen. Die Neigung ist am gröſsten, wenn es der Winkel ist, oder wenn sich die beiden Linien unter einem sehr stumpfen Winkel schneiden. Die Eigenschaft, *der Richtung nach sich zu nähern* (pencher) ist etwas Anderes. Eine Linie nähert sich, ihrer Richtung nach, einer andern um so mehr, je weiter sie von dem Perpendikel auf die letztere abweicht.

Euclides und andere nennen öfters Dreyecke *gleich*, die blos einerley Flächeninhalt haben; Körper gleich, die blos einerley körperlichen Inhalt haben. Es schien uns passen-

meiner kleinen Abhandlung über Parallelentheorien und das System der Geometrie, Berlin bey Maurer 1816, befolgt.

A. d. Uebers.

der, dergleichen Dreyecke und Körper *gleichgroſs* (equivalents) zu nennen, und die Benennung *gleich*, den Flächen und Körpern vorzubehalten, welche sich beim Aufeinanderlegen decken.

Von gleichen Körpern und Flächen muſs man zweyerley Arten unterscheiden. Zwey Körper, zwey Körperwinkel, zwey Kugeldreyecke oder Kugelvielecke können in allen ihren Bestimmungsstücken gleich seyn, ohne sich dennoch bey dem Aufeinanderlegen zu decken. Diese Bemerkung wird in den Elementarbüchern gewöhnlich nicht beachtet. Ohne sie aber sind mehrere Beweise, die auf dem Decken der Figuren beruhen, unrichtig. Zum Beyspiel diejenigen, durch welche einige Schriftsteller die Gleichheit von Kugeldreyecken, in eben den Fällen und auf eben die Art wie bey den gradlinigen Dreyecken, nachweisen zu können glauben. Ein auffallendes Beyspiel hiervon findet man bey Robert Simson, welcher, indem er den Beweis des 18ten Satzes im 11ten Buche des Euclid bestreitet, selbst in den Irrthum verfällt, seinen Beweis auf ein Decken zu gründen, welches nicht Statt findet *). Es schien uns daher nöthig, der Gleichheit, welche nicht nothwendig mit dem Decken verbunden ist, einen besondern Namen zu geben. Wir haben sie *symmetrische Gleichheit*, und die Figuren welche in solchem Falle sind, *symmetrische Figuren* genannt.

Die Benennungen *gleiche*, *symmetrische* und *gleich groſse* Figuren haben also verschiedene Bedeutungen und müssen nicht mit einander verwechselt werden.

Bey den Sätzen von Vielecken, Körperwinkeln und Polyëdern haben wir ausdrücklich Figuren mit einspringenden Winkeln ausgenommen; denn eines Theils müssen

*) Man sehe das Werk von Simson: Euclidis elementorum libri sex etc. Glasguae 1756.

A. d. Verf.

wohl die Elemente billigerweise auf die einfachsten Fälle beschränkt werden, andern Theils würden verschiedene Sätze ohne jene Einschränkung nicht Statt finden, oder wenigstens verändert werden müssen.

Wir haben daher die Elemente auf die Untersuchung derjenigen Linien und Flächen beschränkt, welche *convexe* genannt werden, und welche die Eigenschaft haben, daſs sie von einer graden Linie nur in zwey Puncten geschnitten werden können.

Oefters ist der Ausdruck *Product zweyer oder mehrerer Linien gebraucht worden*, worunter das Product von Zahlen verstanden wird, welche diese Linien ausdrücken, wenn man sie mit einer willkürlichen Linieneinheit vergleicht. Auf diese Weise hat der Gebrauch des Ausdrucks keine Schwierigkeit. Es ist sogar verständlich, was Product einer Fläche in eine Linie, oder einer Fläche in einen Körper bedeutet. Man darf sich nur ein für allemal erinnern, daſs diese Producte nichts anders als Producte von Zahlen sind, jede in ihrer Art. So ist das Product einer Fläche in einen Körper nichts anders, als das Product einer gewissen Zahl von Flächeneinheiten in eine gewisse Zahl von Körpereinheiten.

Im gemeinen Leben nennt man zuweilen *Winkel*, den Scheitelpunct des Winkels. Dieser Gebrauch ist unpassend. Es ist deutlicher und besser, die Puncte in den Spitzen der Winkel eines Vielecks oder Polyëders durch eine besondere Benennung, wie *Scheitel* zu bezeichnen. In diesem Sinne muſs der überall gebrauchte Ausdruck *Scheitel eines Polyëders* genommen werden.

Wir haben die gewöhnliche Erklärung ähnlicher gradliniger Figuren gegeben, indeſs ist zu bemerken, daſs diese Erklärung drey Bedingungen zu viel enthält. Denn um ein Vieleck von n Seiten zu construiren, muſs man erstlich eine Seite haben, und darauf die Lage der Winkelscheitel

ausser dieser Seite. Nun ist die Zahl jener Winkelscheitel n — 2, und zur Bestimmung der Länge jedes Winkelscheitels sind zwey Gröſsen nöthig, also ist die ganze Zahl der Gröſsen, welche gegeben seyn müssen, um ein Vieleck von n Seiten zu construiren, 1 + 2 n — 4, oder 2n — 3. In ähnlichen Vielecken ist eine Seite willkürlich, also ist die Zahl der Bedingungen, unter welchen zwey Vielecke ähnlich sind, 2 n — 4. Die gewöhnliche Erklärung aber verlangt, *erstlich:* daſs die Winkel einzeln gleich sind, welches n Bedingungen ausmacht; *zweytens:* daſs ähnlich liegende Seiten proportional sind, welches n — 1 Bedingungen erfordert. Also verlangt die gewöhnliche Erklärung 2 n — 1 Bedingungen, und folglich drey zu viel. Um dieses zu vermeiden, könnte man die Erklärung wie folgt, in zwey einzelne zerlegen, nämlich:

Erstlich. Zwey Dreyecke sind ähnlich, wenn zwey Winkel derselben einzeln gleich sind.

Zweytens. Zwey Vielecke sind ähnlich, wenn beide in gleichviel ähnliche und ähnlichliegende Dreyecke getheilt werden können.

Damit aber der zweyte Theil nicht wiederum überflüssige Bedingungen ausdrücke, muſs die Zahl der Dreyecke der Zahl der Seiten weniger zwey gleich seyn. Dieses kann auf zweyerley Art geschehen. Man kann entweder aus zwey ähnlich liegenden Winkelscheiteln Diagonalen nach den gegenüberliegenden Winkelscheiteln ziehen, in welchem Falle die entstehenden Dreyecke in beiden Figuren einen gemeinschaftlichen Winkelscheitel bekommen, und ihre Summe dem Inhalte des Polygons gleich ist, oder man kann den Dreyecken eine Seite des Vielecks zur gemeinschaftlichen Grundlinie, und die der Grundlinie gegenüberliegenden verschiedenen Winkelscheitel zu Scheiteln geben. Da in beiden Fällen die Zahl der Dreyecke n — 2 ist, so sind die Bedingungen der Aehnlichkeit 2n — 4, und

die Erklärung enthält nichts Ueberflüfsiges. Giebt man die Erklärung auf diese Weise, so wird die gewöhnliche zum Lehrsatz, den man gleich hinterher beweisen kann *).

Ist schon die Erklärung ähnlicher gradliniger Figuren in den Elementen unvollkommen, so ist es diejenige *ähnlicher Polyëder* noch weit mehr. Beim Euclid beruht die Erklärung auf einen unbewiesenen Lehrsatz, bey andern Schriftstellern ist sie mit Worten überladen. Wir haben also, statt der gewöhnlichen Erklärung der ähnlichen Körper, eine andere gewählt, welche sich auf die vorhin angegebenen Principien gründet. Da über diesen Gegenstand noch Mehreres zu be-

*) Obgleich der Hauptinhalt dieser Bemerkung, dafs die gewöhnliche Erklärung ähnlicher Figuren, selbst bey Euclid, mehr Bedingungen verlangt als nöthig sind, und folglich einen Lehrsatz in sich schliefst, unstreitig vollkommen richtig ist, so läfst sich doch wohl gegen das Uebrige noch Manches einwenden. So z. B. sind nicht unbedingt 2n — 3 Stücke zur Construction einer Figur hinreichend, denn schon ein Dreyeck kann nicht allgemein mit zwey Seiten und einem Winkel construirt werden; der Winkel mufs auch der seyn, welcher der gröfsten von den beiden Seiten gegenüber liegt. Bey dem Vielecke finden ähnliche Nebenbedingungen Statt. Ferner sieht man nicht, warum grade die Gleichheit zweyer Winkel zur Erklärung der Aehnlichkeit der Dreyecke dienen soll. Die übrigen Fälle der Aehnlichkeit wären vielleicht eben so passend zu diesem Zwekke. Allemal wird, wie es scheint, wenn man bestimmte Stücke der Figur bezeichnet, die Erklärung entweder unvollständig seyn, oder einem Lehrsatze ähnlich werden. Mir scheint es, dafs die gleichsam vorläufige Erklärung der Aehnlichkeit durch *Gleichheit der Gestalt* die einfachste und natürlichste ist. *Wie* die Gleichheit der Gestalt nachgewiesen werde, und von welchen Bedingungen sie abhänge, mag hernach durch die Lehrsätze gezeigt werden, eben wie es bey der Congruenz und der Gleichheit der Gröfsen geschieht. A. d. Uebers.

merken ist, so werden wir auf denselben in einer besonderen Anmerkung zurück kommen.

Die Erklärung des Perpendikels auf eine Ebene kann mehr als ein Lehrsatz betrachtet werden; diejenige der gegenseitigen Neigung zweyer Ebenen mufs ebenfalls erst gerechtfertigt werden. Mehrere andere sind in demselben Falle. Deshalb haben wir uns, wenn die gewöhnlichen Erklärungen beybehalten wurden, immer zugleich auf diejenigen Sätze berufen, wo sie bewiesen werden; zuweilen auch blos eine kurze Erläuterung beygefügt.

Ein Winkel zwischen zwey Ebenen, und ein Körperwinkel zwischen mehreren Ebenen, sind Gröfsen, denen vielleicht besondere Benennungen gegeben werden sollten. Ohne das ist es schwer, Dunkelheiten und Umschreibungen zu vermeiden, wenn von der Lage der Ebenen die Rede ist, die die Oberfläche eines Polyëders bilden. Da die Theorie der Körper noch wenig bearbeitet ist, so ist die Schwierigkeit neue Ausdrücke einzuführen, geringer, in sofern sonst nur die Ausdrücke dem Gegenstande angemessen sind.

Wir werden vorschlagen, den Winkel zwischen zwey Ebenen *Keil* (coin) zu nennen, den Durchschnitt der beiden Ebenen könnte man *Schärfe* (Kante) (arête) des Keils, oder *Forst* (faîte) nennen. Der Keil müfste mit vier Buchstaben bezeichnet werden, deren zwey mittlere die Kante bezeichnen. Ein *rechtwinkliger Keil* ist alsdann der Winkel zwischen zwey auf einander senkrechten Ebenen. Vier rechtwinklige Keile füllen den ganzen Winkelraum um eine grade Linie aus. Bey dieser neuen Benennung kann immer der Keil, den Winkel zwischen den beiden in den Ebenen, auf ihren Durchschnitten gezogenen Perpendikeln, zum Maafse haben.

Zweyte Anmerkung.

Ueber die Beweise des zwanzigsten Satzes im ersten Buche und einigen andern Hauptsätzen der Geometrie.

Der zwanzigste Satz des ersten Buchs ist nichts anders als ein besonderer Fall des berühmten Postulats, auf welches Euclid die Theorie der Parallelen, so wie den Lehrsatz von der Summe der drey Winkel eines Dreyecks gründet. Dieses Postulat ist bis jetzt noch nicht rein geometrisch und unabhängig vom Begriffe des Unendlichen bewiesen worden, woran ohne Zweifel die Unvollkommenheit der Erklärung der graden Linie Schuld ist, welche Erklärung die Grundlage der Elemente ausmacht. Betrachtet man den Gegenstand abstracter, so findet man in der Analysis ein einfaches Mittel, den Satz, so wie die übrigen Hauptlehrsätze der Geometrie strenge zu beweisen. Wir wollen diese Beweisart umständlich vortragen und mit dem Lehrsatze von den drey Winkeln im Dreyecke anfangen.

Unmittelbar durch das bloſse Aufeinanderlegen und ohne irgend einen Hülfssatz läſst sich beweisen, *daſs zwey Dreyecke gleich sind, wenn zwey Winkel und die dazwischen liegende Seite in dem einen so groſs sind als in dem andern.* Die Seite soll p, die beiden daran liegenden Winkel sollen A und B heissen, der dritte Winkel C. Dieser dritte Winkel C ist also vollkommen gegeben, wenn man die beiden Winkel A und B und die Seite p kennt; denn gehörten mehrere Winkel C mit den drey gegebenen Stücken A, B und p zusammen, so würde es eben so viele verschiedene Dreyecke mit der nämlichen Seite und den nämlichen beiden anliegenden Winkeln geben, welches unmöglich ist: also muſs der Winkel C eine bestimmte Function der drey Gröſsen A, B, p seyn, welches ich durch $C = \varphi(A, B, p)$ bezeichnen will.

Der rechte Winkel sey der Einheit gleich, so sind die Winkel A, B, C Zahlen zwischen 0 und 2; und weil $C = \varphi$

(A, B, p) ist, so behaupte ich, daſs die Linie p nicht in der Function φ vorkommen kann. In der That wird C durch A, B, p völlig bestimmt, ohne Hülſe eines andern Winkels, oder irgend einer Linie. Die Linie p aber ist eine zu den Zahlen A, B, C ungleichartige Gröſse, und wenn irgend eine Gleichung zwischen A, B, C und p Statt fände, so würde man daraus p in A, B, C finden können, woraus folgen würde, daſs p einer Zahl gleich sey, welches aber ungereimt ist: folglich kann p in der Function φ nicht vorkommen, und es ist blos $C = \varphi\ (A, B)$ *).

Diese Formel beweiset, daſs wenn zwey Winkel eines Dreyecks, gleich zwey Winkeln eines andern Dreyecks sind, daſs dann auch die dritten Winkel gleich sind, und hieraus läſst sich der Lehrsatz leicht beweisen.

Fig. 274. Es sey zuerst ABC ein in A rechtwinkliges Dreyeck. Man ziehe AD aus A auf die Hypothenuse senkrecht. Die Winkel B und D des Dreyecks ABD sind den Winkeln B und A des Dreyecks BAC gleich, mithin ist, dem obigen Beweise zufolge, der dritte Winkel BAD dem dritten

*) Man hat gegen diesen Beweis eingewendet, daſs daraus, wenn man ihn Wort um Wort auf Kugeldreyecke bezöge, folgen würde, daſs zwey Winkel eines Kugeldreyecks zur Bestimmung des dritten hinreichen, welches bey solchen Dreyecken nicht der Fall ist. Die Antwort hierauf ist, daſs Kugeldreyecke ein Element mehr haben als gradlinige, nämlich den Halbmesser der Kugel, von welchem man nicht abstrahiren kann. Der Halbmesser sey r, so muſs nicht sowohl $C = \varphi\ (A, B, p)$ als vielmehr $C = \varphi\ (A, B, p, r)$ oder blos nach dem Gesetze der Homogeneïtät $C = \varphi\ \left(A, B, \frac{p}{r}\right)$ seyn. Weil aber nun der Quotient $\frac{p}{r}$ eine Zahl ist, wie A, B, C, so hindert nichts, daſs $\frac{p}{r}$ in der Function φ vorkomme, und dann kann man daraus nicht mehr schlieſsen: $C = \varphi\ (A, B)$. A. d. Verf.

C gleich. Aus eben dem Grunde ist der Winkel DAC = B; also ist BAD + DAC, oder BAC = B + C. Nun ist der Winkel BAC ein rechter, *also sind die beiden spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreyecks zusammengenommen einem rechten Winkel gleich.*

Fig. 275. Es sey ferner BAC ein beliebiges Dreyeck, und BC eine Seite, welche nicht kleiner ist als jede der beiden andern: zieht man auf BC aus dem gegenüberliegenden Winkelscheitel A das Perpendikel AD, so fällt solches in das Dreyeck ABC, und theilt es in zwey rechtwinklige Dreyecke BAD und DAC. In dem rechtwinkligen Dreyecke BAD sind aber die beiden Winkel BAD und ABD zusammen einem rechten gleich; in dem rechtwinkligen Dreyecke BAC sind die beiden Winkel DAC und ACD ebenfalls zusammen einem rechten gleich. Also sind die vier Winkel zusammengenommen, das heifst, die drey BAC, ABC und ACB zusammen zwey rechten gleich; *folglich ist in jedem Dreyecke die Summe der drey Winkel gleich zwey rechten.*

Man sieht hieraus, dafs dieser Satz, a priori betrachtet, von keinen andern Sätzen abhängt, sondern unmittelbar aus dem Grundsatze der Gleichartigkeit bewiesen werden kann, welcher Grundsatz überall bey jedem Verhältnisse zwischen Gröfsen nothwendig Statt finden mufs. Wir wollen die Untersuchung weiter verfolgen und zeigen wie auch die andern Hauptsätze der Geometrie aus der nämlichen Quelle geschöpft werden können.

Die obigen Bezeichnungen sollen bleiben, aufserdem aber die den Winkeln A und B gegenüberliegenden Seiten, m und n heissen. Die Gröfse m wird durch die Gröfsen A, B und p ganz bestimmt, also ist m eine Function von A, B und p, und $\frac{m}{p}$ ebenfalls, so das $\frac{m}{p} = \psi\,(A, B, p)$; aber $\frac{m}{p}$ ist eine Zahl, wie A und B, folglich kann die Function ψ

die Linie p nicht enthalten, sondern es muſs blos $\frac{m}{p} = \psi$ (A, B), oder $m = p\,\psi$ (A, B) seyn. Eben so ist $n = p\,\psi$ (B, A).

Nun habe ein anderes Dreyeck die nämlichen Winkel A, B, C. Den Winkeln A, B, C sollen jetzt die Seiten m', n', p' gegenüberliegen. Weil sich A und B nicht ändern, so ist in dem neuen Dreyecke $m' = p'\,\psi$ (A, B) und $n' = p'\,\psi$ (B, A): also ist $m : m' = n : n' = p : p'$; folglich stehen in gleichwinkligen Dreyecken die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten in gleichem Verhältnisse.

Aus diesem allgemeinen Beweise folgt als ein einzelner Fall der Beweis des zwanzigsten Satzes im Text. Denn (Fig. 35.) die Dreyecke AFG und AML haben zwey einzelne gleiche Winkel, nämlich den Winkel A gemeinschaftlich und einen rechten Winkel. Also sind diese Dreyecke gleichwinklig, folglich hat man die Proportion AF : AL = AG : AM, vermittelst welcher der zwanzigste Satz bewiesen wird.

Der Satz vom Quadrat der Hypothenuse ist, wie bekannt, eine Folge des Satzes von den gleichwinkligen Dreyecken. Es lieſsen sich also drey Hauptsätze der Geometrie, nämlich die Sätze von den drey Winkeln eines Dreyecks, von gleichwinkligen Dreyecken und vom Quadrat der Hypothenuse einfach und unmittelbar durch die Betrachtung von Functionen beweisen. Eben so kann man sehr kurz die Sätze von ähnlichen Figuren und ähnlichen Körpern beweisen.

Fig. 281. Es sey ABCD ein beliebiges Vieleck. Man nehme die Seite AB zur Grundlinie an und beschreibe über derselben so viel Dreyecke ABC, ABD u. s. w. als Winkel C, D, E etc. auſserhalb der Grundlinie liegen. Die Grundlinie AB sey gleich p. Die beiden Winkel im Dreyecke ABC an der Seite AB sollen A und B, die beiden Winkel im

Dreyecke ABD an der nämlichen Seite AB, sollen A' und B' heissen u. s. w. Die Figur ABCDE ist vollständig bestimmt, wenn man die Seite p nebst den Winkeln A, B, A', B', A'', B'' u. s. w. kennt. Die Zahl der gegebenen Stücke ist $2n = 3$, wenn die Zahl der Seiten des Vielecks ist. Nun wird eine beliebige Seite, oder selbst, eine wie man will gezogene Linie x, eine Function der gegebenen Bestimmungsstücke des Vielecks seyn, und weil $\frac{x}{p}$ eine Zahl ist, so kann man setzen $\frac{x}{p} = \psi(A, B, A', B' \ldots)$ oder $x = p\,\psi(A, B, A'\, B' \ldots)$ so daſs die Function ψ kein p enthält. Beschreibt man mit denselben Winkeln A, B, A', B' ... und einer andern Seite p' ein zweytes Vieleck, so hat man für die Linie x', die mit x correspondirt oder ähnlich liegt, den Ausdruck $x' = p'\,\psi(A, B, A', B' \ldots)$; also ist $x : x' = p : p'$. Figuren, welche wie diese construirt sind, kann man *ähnlich* nennen, *also sind in ähnlichen Figuren ähnlich liegende Seiten proportional.* Folglich verhalten sich in den beiden Figuren nicht allein ähnlich liegende Seiten, sondern auch ähnlich liegende Diagonalen, oder beliebige ähnlich liegende Linien, wie andere beliebige ähnlich liegende Linien.

Der Inhalt des ersten Vielecks heisse S. Derselbe ist mit dem Quadrat p^2 gleichartig, also ist $\frac{S}{p^2}$ eine Zahl, welche nur von den Winkeln A, B, A', B' ... abhängt, so daſs $S = p^2\,\varphi(A, B, A', B' \ldots)$ ist. Aus demselben Grunde ist, wenn S' die Oberfläche des zweyten Vielecks bedeutet, $S' = p'^2\,\varphi(A, B, A', B' \ldots)$; also ist $S : S' = p^2 : p'^2$. *Folglich verhalten sich die Flächen ähnlicher Figuren wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten.*

Wir gehen zu den Polyëdern über. Man kann annehmen daſs eine Seitenfläche durch eine bekannte Seite p und mehrere Winkel A, B, C bestimmt werde. Alsdann wer-

den die Scheitel der Körperwinkel aufserhalb der Grundfläche, jeder durch drey gegebene Bestimmungsstücke, welche man als eben so viele Winkel betrachten kann, festgelegt, so dafs die völlige Bestimmung des Polyëders nur von einer Seite p und mehreren Winkeln A, B, C etc. abhängt, deren Zahl sich nach der Beschaffenheit des Polyëders richtet. Nun ist eine Linie zwischen zwey Scheiteln, oder allgemeiner, jede Linie x, wie man will innerhalb des Polyëders gezogen, eine Function der gegebenen Bestimmungsstücke p, A, B, C etc., und weil $\frac{x}{p}$ eine Zahl ist, so hängt $\frac{x}{p}$ nur allein von den Winkeln A, B, C etc. ab, so dafs man setzen kann: $x = p\, \varphi\, (A, B, C \ldots)$. Die Oberfläche des Polyëders ist mit p^2 gleichartig, also kann diese Oberfläche durch $p^2\; \psi\; (A, B, C \ldots)$ ausgedrückt werden. Der körperliche Inhalt ist mit p^3 gleichartig, und kann also durch $p^3\; \pi\; (A, B, C \ldots)$ ausgedrückt werden, wobey die Functionen ψ und π von p unabhängig sind.

Man construire einen zweyten Körper mit den nämlichen Winkeln A, B, C etc., aber mit einer von p verschiedenen Seite p'. Die beiden so construirten Körper wollen wir *ähnlich* nennen. Nun ist die Linie, welche in dem einen Polyëder $p \cdot \varphi\; (A, B, C \ldots)$, oder kürzer $p\, \varphi$ war, in dem andern $p'\, \varphi$, die Fläche welche in dem einen Körper $p^2\; \psi$ war, $p'^2\; \psi$ in dem anderen, der körperliche Inhalt, welcher in dem einen Körper $p^3\; \pi$ war, $p'^3\; \pi$ in dem andern. Also verhalten sich in ähnlichen Körpern, *erstlich,* ähnlich liegende Seiten oder Linien, gleich; *zweytens,* die Flächen wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten; *drittens,* die Körperräume wie die Würfel ähnlich liegender Seiten oder Linien.

Die obigen Betrachtungen lassen sich auch auf den Kreis anwenden. Der Umfang eines Kreises vom Halbmesser r, sey c und seine Fläche s. Weil nicht zwey ver–

schiedene Kreise einerley Halbmesser haben können, so sind $\frac{c}{r}$ und $\frac{s}{r^2}$ bestimmte Functionen von r. Weil aber diese Gröſsen Zahlen sind, so kann ihr Ausdruck kein r enthalten; also wird $\frac{c}{r} = \alpha$ und $\frac{s}{r^2} = \beta$ seyn, wo α und β unveränderliche Zahlen bedeuten. Ist nun der Umfang eines andern Kreises vom Halbmesser $r' = c'$, seine Fläche s', so wird auch seyn: $\frac{c'}{r'} = \alpha$ und $\frac{s'}{r'^2} = \beta$. Also ist $c : c' = r : r'$ und $s : s' = r^2 : r'^2$. *Also verhalten sich die Umfänge der Kreise wie die Halbmesser, und die Flächen wie die Quadrate der Halbmesser.*

Es sey ein Ausschnitt gegeben, dessen Halbmesser r und dessen Winkel A ist; x sey der Bogen welcher den Ausschnitt begrenzt, y die Fläche des Ausschnitts. Weil dieser Ausschnitt völlig bestimmt ist, wenn es r und A sind, so müssen x und y bestimmte Functionen von r und A seyn; also müssen $\frac{x}{r}$ und $\frac{y}{r^2}$ ebenfalls solche Functionen seyn. Aber $\frac{x}{r}$ und $\frac{y}{r^2}$ sind Zahlen, folglich können diese Gröſsen kein r enthalten, sondern sind blos Functionen von A, so daſs $\frac{x}{r} = \varphi(A)$ und $\frac{y}{r^2} = \psi(A)$. x' sey der Bogen und y' die Fläche eines andern Ausschnitts, dessen Winkel A und dessen Halbmesser r' ist. Wir wollen die beiden Ausschnitte *ähnlich* nennen. Weil der Winkel A in beiden der nämliche ist, so ist $\frac{x'}{r'} = \varphi(A)$ und $\frac{y'}{r'^2} = \psi(A)$; also ist $x : x' = r : r'$ und $y : y' = r^2 : r'^2$. *Also verhalten sich ähnliche Bogen, oder die Bogen ähnlicher Ausschnitte, wie die Halbmesser, und die Ausschnitte selbst, wie die Quadrate der Halbmesser.*

Wie leicht zu sehen, läſst sich auf gleiche Art beweisen, daſs sich Kugeln wie die Würfel ihrer Halbmesser verhalten.

Es wird bey allem Obigen voraus gesetzt, daſs das Maaſs von Flächen ein Product von zweyen, und das Maaſs von Körpern ein Product von drey Linien sey. Auch dieses läſst sich analytisch leicht beweisen. Wir wollen ein Rechteck annehmen, dessen Abmessungen p und q sind, so ist seine Fläche eine Function von p und q. Sie werde durch $\varphi(p, q)$ bezeichnet. Betrachtet man ein andres Rechteck, dessen Abmessungen $p + p'$ und q sind, so ist klar, daſs dieses Rechteck aus zwey andern Rechtecken zusammengesetzt ist, von welchen das eine p und q, das andere p' und q zu Abmessungen hat, so daſs

$$\varphi(p + p', q) = \varphi(p, q) + \varphi(p', q).$$

Es sey $p' = p$, so erhält man $\varphi(2p, q) = 2\varphi(p, q)$. Es sey $p' = 2p$, so erhält man $\varphi(3p, q) = \varphi(p, q) + \varphi(2p, q) = 3\varphi(p, q)$. Es sey $p' = 3p$, so erhält man $\varphi(4p, q) = \varphi(p, q) + \varphi(3p, q) = 4\varphi(p, q)$. Also ist allgemein, wenn K eine beliebige ganze Zahl ist, $\varphi(kp, q) = k\,\varphi(p, q)$ oder $\frac{\varphi(p, q)}{p} = \frac{\varphi(kp, q)}{kp}$. Daraus folgt, daſs $\frac{\varphi(p, q)}{p}$ eine solche Function von p ist, daſs sie sich nicht verändert, wenn man Statt p ein beliebiges Vielfache von p setzt. Also ist diese Function von p unabhängig und kann nur q enthalten. Aus demselben Grunde ist auch $\frac{\varphi(p, q)}{q}$ von q unabhängig, folglich enthält $\frac{\varphi(p, q)}{pq}$ weder p noch q, und ist folglich einer Constante α gleich. Also ist $\varphi(p, q) = \alpha\, p\, q$, und weil nichts hindert $\alpha = 1$ zu setzen, so erhält man $\varphi(p, q) = pq$. Also ist der Inhalt eines Rechtecks gleich dem Producte seiner beiden Abmessungen. Auf gleiche Art läſst sich beweisen,

daſs der Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedums, dessen Abmessungen p, q, r sind, dem Producte p, q, r seiner drey Abmessungen gleich ist *).

*) Meines Erachtens haben alle diese Beweise wenig Kraft. Im ersten Beyspiele, bey der Anwendung auf den Satz von den Winkeln im Dreyecke, beruht Alles auf die Behauptung, daſs ungleichartige Gröſsen, wie die Winkel und Seiten, nicht von einander abhängen können. Wäre dies unbedingt der Fall, so möchte der Schluſs gelten, aber in unzähligen Fällen hängen wirklich Seiten von Winkeln und Winkel von Seiten ab. Ein Dreyeck z. B. wird auch durch zwey Seiten und den eingeschlossenen Winkel bestimmt, folglich hängen die beiden andern Winkel nicht blos von dem gegebenen Winkel, sondern zugleich von den beiden Seiten ab; folglich kann jede Seite aus der andern und dem Winkel gefunden werden. In dem vorigen Falle ist freylich nur eine Seite da, folglich müſste diese Seite aus den drey Winkeln allein gefunden werden können, im Falle der dritte Winkel zugleich von der Seite abhinge. Allein weil wirklich, z. B. in dem erwähnten zweyten Falle, Winkel auf Seiten und umgekehrt, Einfluſs haben, so sieht man nicht im voraus, warum dieser Einfluſs ganz aufhören sollte, wenn die Winkel allein da sind. Daſs es so ist, weiſs man freylich, aber daſs es so seyn müsse, ist grade das, was erst bewiesen werden soll. Der Grund des Schluſses verliert noch mehr, wenn man sich erinnert, daſs umgekehrt wirklich auch die Winkel von Seiten *allein* abhängen können. Denn ein Dreyeck wird durch seine drey Seiten allein bestimmt, ohne alle Winkel; also hängt jeder seiner Winkel von den drey Seiten *allein* ab, und kann aus ihnen gefunden werden. Wäre es nun unmöglich, daſs ungleichartige Gröſsen von einander abhängen, so wäre es auch unmöglich, daſs drey Seiten ein Dreyeck bestimmen, welches doch gleichwol wirklich der Fall ist.

Untersucht man näher, worin die Ungleichartigkeit von Winkeln und Seiten für die Rechnung besteht, so finden sich neue Zweifel. In dem Beweise wird nämlich gesagt:

Die Betrachtung der Functionen welche hier zu einer so einfachen Beweisart der Hauptsätze der Geometrie dient, ist auch schon mit gutem Erfolge bey den Beweisen der Hauptlehrsätze der Mechanik angewendet worden. Man sehe den zweyten Band der Turiner Memoiren.

Winkel wären Zahlen. Allein Linien sind es auch, zufolge der öfter wiederholten Lehren in diesem Buche. Die Einheit des Winkels ist der rechte Winkel, oder die Summe von vier rechten, wie man will. Die Einheit der Linien ist irgend eine willkürliche Linie. Der Unterschied ist blos, daſs die Einheit des Winkels gewissermaſsen absoluter ist als die der Linie. Zahlen aber sind beide. Also verschwindet auch ziemlich die Ungleichartigkeit, in Bezug auf die Rechnung, auf welcher Alles beruht.

Aber gesetzt, selbst der Schluſs, daſs die Seite als Linie nicht von Winkeln allein abhängen könne, deshalb weil sie eine Linie und kein Winkel, oder keine Zahl ist, würde zugegeben, so scheint doch noch immer nicht zu folgen, daſs in der Gleichung $C = \varphi\,(A, B, p)$ die Linie p unter dem Zeichen φ gar nicht vorkommen dürfe. Man nehme z. B. irgend eine unveränderliche Linie α an, so ist $\frac{p}{\alpha}$ eine eben so absolute Zahl, wie die Zahlen A und B, welche die Winkel ausdrücken sollen. Dann aber könnte vielleicht $C = \varphi\left(A, B, \frac{p}{\alpha}\right)$ seyn, und es läſst sich schwerlich ein Grund angeben, warum es nicht so seyn sollte.

Ich meinestheils habe mich daher von der Kraft dieses Beweises des eilften euclidischen Axioms niemals überzeugen können.

Auch die Beweise der andern Sätze scheinen nicht strenger zu seyn.

Bey dem Satze von der Aehnlichkeit der Dreyecke wird z. B. gesagt: weil die zweyte Seite m eine Function von den beiden Winkeln A, B und der Seite p sey, so sey auch $\frac{m}{p}$ eine Function von diesen drey Stücken. Ist dieses der

Dritte Anmerkung.

Ueber die Näherungsmethode des sechszehnten Satzes im vierten Buche.

Sobald man einen zu großen und einen zu kleinen Halbmesser gefunden hat, die schon in den ersten Decimal-

Fall, so ist auch z. B. $\frac{m + \alpha}{p + \alpha}$ (wo α eine willkürliche unveränderliche Linie bedeutet), eine Function von A, B und p; also ist auch $\frac{m + \alpha}{p + \alpha} = \psi$ (A, B, p), oder weil p, als Linie, unter dem Functionszeichen nicht soll vorkommen können, $m + \alpha = (p + \alpha)\, \psi$ (A, B). Eben so $n + \alpha = (p + \alpha)\, \psi$ (B, A), $m' + \alpha = (p' + \alpha)\, \psi$ (A, B), und $n' + \alpha = (p' + \alpha)\, \psi$ (B, A); also folgt $m + \alpha : m' + \alpha = n + a : n' + \alpha$, welches ein ganz anderer und zwar unrichtiger Satz ist, der jedoch auf denselben Schlüssen beruht.

Ungefähr eben so ist es mit den übrigen Sätzen. Wenn man diejenigen Formen im voraus annimmt, die zu den Sätzen passen, so findet man freylich die Sätze, aber der Beweis, daſs man grade die vorausgesetzten Formen annehmen müsse und keine andern, fehlt. Er ist aber nothwendig, weil man hier, wenn man andere Formen annimmt, andere Sätze findet.

Auch bey dem analytischen Beweise, daſs pq der Inhalt eines Rechtecks ist, dessen Seiten p und q sind, scheint Etwas zu fehlen. Denn, selbst den Beweis bis dahin, daſs der Inhalt φ (p, q) $= \alpha pq$ sey, zugegeben, so muſs doch unstreitig noch bewiesen werden, daſs $\alpha = 1$ ist, weil man sonst eben so wohl $\alpha = 2$, 3, oder was man will, setzen könnte.

Für Elemente dürften Beweise, die nicht so strenge sind, daſs an keinem Theile derselben Zweifel bleiben, nicht zu empfehlen seyn.

Man findet noch von mehrern mathematischen Sätzen analytische Beweise in einem Buche, welches den Titel führt: Précis d'une nouvelle méthode, pour reduire à des simples procédés analytiques, la demonstration des princi-

stellen übereinstimmen, so läſst sich die Rechnung nach einer algebraischen Formel leichter fortsetzen.

a sey der zu kleine und b der zu groſse Halbmesser, deren Unterschied aber nur gering ist; a′ und b′ sollen die folgenden Halbmesser seyn die aus den vorigen nach den

paux théorêmes de la géométrie etc. par J. G. C. . . . Paris an VI. de la republique. Allein auch diese Beweise befriedigen wenig.

Unschätzbar wäre der Gewinn, wenn die Analysis die Lücke der euclidischen Geometrie, die das eilfte Axiom läſst, ausfüllen könnte. Möchte der Beweis noch so viel Anstrengung erfordern, er würde ohne alles Bedenken selbst in die ersten Elemente gehören, weil für die Wahrheit kein Preis zu theuer ist; aber bis jetzt scheint dieser Versuch, die Geometrie zu begründen, nicht gelungen.

Uebrigens kann man, wenn man ja bey dem Satze von den Winkeln des Dreyecks, den Schluſs, daſs $C = \varphi\,(A, B)$ sey, weil p zu A, B und C ungleichartig ist, gelten lassen will, kürzer zum Ziele kommen, als in der Anmerkung, und der Uebergang zu einem beliebigen Dreyecke durch das rechtwinklige kann füglich erspart werden. Denn wenn der dritte Winkel der nämliche bliebe, wenn die beiden ersten dieselben sind, so mache man $ADE = ABC$. (Fig. 10.) Alsdann ist $E = C$, weil $B = D$ und $A = A$ ist. Da nun DE mit BC parallel ist oder CB nicht schneidet, weil, wenn es anders wäre, D nicht gleich B seyn würde (Euclid 1s B. 16r S.), so folgt, daſs Parallelen BE und CD, mit einer und derselben Linie ACE, gleiche Winkel C und E machen. Hieraus aber folgt, daſs dann wenn BCA und DEA ungleich sind, z. B. $BCE + DEC <$ zwey rechte ist, die Linie ED, die CB nothwendig schneiden muſs; weil, wenn es anders wäre, das heiſst, wenn CB mit ED parallel wäre, wie vorhin bewiesen worden, DE und CB mit ACE gleiche Winkel machen würden, gegen die Voraussetzung. Dieses ist schon das berühmte eilfte Axiom, worauf man dann weiter ganz Euclid folgen könnte.

Auch unmittelbar den Satz von den drey Winkeln im Dreyecke könnte man, wie folgt, finden. Man mache näm-

Formeln $b' = \sqrt{(ab)}$ und $a' = \sqrt{\left(a \cdot \frac{a+b}{2}\right)}$ gefunden werden. Was man sucht, ist das letzte Glied der Reihe $a, a', a'' \ldots$, welches zugleich das letzte Glied der Reihe $b, b', b'' \ldots$ ist. Dieses letzte Glied heiſse x, und es sey $b = a(1+\omega)$, so kann man setzen $x = a(1 + P\omega + Q\omega^2 \ldots)$ wo P und Q unbestimmte Coefficienten sind. Die Ausdrücke für b' und a' geben aber

$$b' = a\left(1 + \tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{1}{8}\omega^2 \ldots\right)$$
$$a' = a\left(1 + \tfrac{1}{4}\omega^2 - \tfrac{1}{32}\omega^2 \ldots\right).$$

Macht man $b' = a'(1+\omega')$, so erhält man

$$\omega' = \tfrac{1}{4}\omega - \tfrac{5}{32}\omega^3 \ldots$$

Aber der Werth von x muſs der nämliche seyn, die Reihe $a, a', a'' \ldots$ mag von a oder von a' anfangen; also ist

$$a(1 + P\omega + Q\omega^2 \ldots) = a'(1 + P\omega' + Q\omega'^2 \ldots)$$

Setzt man in diese Gleichung die Werthe von a' und ω' in a und ω ausgedrückt, und vergleicht die gleichnamigen Glieder, so erhält man $P = \frac{1}{3}$ und $Q = -\frac{1}{15}$, also

$$x = a\left(1 + \tfrac{1}{3}\omega - \tfrac{1}{15}\omega^2\right).$$

Kommen die Halbmesser in der ersten Hälfte der Decimalstellen überein, so kann man das Glied ω^2 weglassen und der Werth von x ist $x = a\left(1 + \frac{1}{3}\omega\right) = a + \frac{b-a}{3}$ Macht man also $a = 1{,}1282657$ und $b = 1{,}1286063$, so findet sich daraus leicht $x = 1{,}1283792$.

Stimmen die Zahlenwerthe von a und b nur in dem ersten Drittheile der Decimalstellen überein, so muſs man

lich (Fig. 11.) DCG = BAC, so daſs also DCE mit AB parallel ist, so ist ECF oder BCD = ABC, weil Parallelen mit einer und derselben graden Linie gleiche Winkel machen, zufolge der obigen unmittelbaren Folgerung. Also ist BCA + BCD + DCG = BCA + ABC + BAC. Die ersten drey Winkel sind aber zusammen gleich zwey rechten, also betragen die letzten eben so viel.

A. d. Uebers.

drey Glieder der Formel nehmen. Macht man also a = 1,1265639 und b = 1,1320149, so findet man x = 1,1283791.

Kämen a und b in noch wenigern Decimalstellen überein, so müſsten von dem Werthe von x noch mehrere Glieder berechnet werden.

Die Annäherungsmethode des vierzehnten Satzes, welche von Jac. Gregory herrührt, läſst sich auf eine ähnliche Art abkürzen. Man sehe deshalb das Werk dieses Schriftstellers unter dem Titel: Vera circuli et hyperbolae quadratura. Dieses Werk hat für die Zeit in welcher es erschien, groſsen Werth.

Vierte Anmerkung.

Worin bewiesen wird, daſs die Verhältnisse des Umfanges zum Durchmesser, und zu seinem Quadrate irrational sind.

Man betrachte die unendliche Reihe

$$1 + \frac{a}{z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{z \cdot z+1} + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{a^3}{z \cdot z+1 \cdot z+2} \ldots$$

deren allgemeines Glied $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} \cdot \frac{a^n}{z \cdot z+1 \cdot z+2 \ldots (z+n-1)}$ ist, und setze ihre Summe $= \varphi z$. Schreibt man $z + 1$ statt z, so ist $\varphi\,(z + 1)$ die Summe der Reihe

$$1 + \frac{a}{z+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{z+1 \cdot z+2} + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{a^3}{z+1 \cdot z+2 \cdot z+3} \ldots$$

Man ziehe diese Reihe, Glied um Glied, von einander ab, so erhält man zum Reste $\varphi z - \varphi\,(z + 1)$ die Reihe

$$\frac{a}{z \cdot z+1} + \frac{a^2}{z \cdot z+1 \cdot z+2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3}{z \cdot z+1 \cdot z+2 \cdot z+3} \ldots$$

Diese Reihe für den Rest kann auf die Form

$$\frac{a}{z \cdot z+1} \left(1 + \frac{a}{z+2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{z+2 \cdot z+3}\right) \ldots$$

gebracht werden. Der Rest ist also gleich $\frac{a}{z \cdot z+1}$ $\varphi\,(z + 2)$. Folglich ist allgemein $\varphi z - \varphi\,(z + 1)$ $= \frac{a}{z \cdot z+1} \cdot \varphi\,(z + 2)$.

Man dividire diese Gleichung durch $\varphi(z+1)$, und nehme, um das Resultat zu vereinfachen, eine neue Function ψz von z an, von der Art, dafs $\psi z = \frac{a}{z} \frac{\varphi(z+1)}{\varphi z}$, so kann man $\frac{a}{z\psi z}$ statt $\frac{\varphi z}{\varphi(z+1)}$ und $\frac{(z+1).\psi(z+1)}{a}$ statt $\frac{\varphi(z+2)}{\varphi(z+1)}$ setzen. Substituirt man wirklich, so kommt

$$\psi z = \frac{a}{z + \psi(z+1)}.$$

Setzt man in diese Gleichung nach und nach z + 1, z + 2 . . . statt z, so erhält man

$$\psi(z+1) = \frac{a}{z+1+\psi(z+2)}$$

$$\psi(z+2) = \frac{a}{z+2+\psi(z+3)};$$

also läfst sich der Werth von ψz durch den fortgesetzten Bruch

$$\psi z = \cfrac{a}{z + \cfrac{a}{z+1+\cfrac{a}{z+2+\ldots}}}$$

ausdrücken. Umgekehrt folgt, dafs dieser fortgesetzte Bruch bis ins Unendliche, ψz zur Summe hat, welche $= \frac{a}{z} . \frac{\varphi(z+1)}{\varphi z}$ war. Diese Summe in gewöhnliche Reihen entwickelt, ist aber

$$= \frac{a}{z} . \frac{1 + \frac{a}{z+1} + \frac{1}{2}\frac{a^2}{z+1 . z+2} \ldots}{1 + \frac{a}{z} + \frac{1}{2}\frac{a^2}{z . z+1} \ldots}$$

Nun sey $z = \frac{1}{2}$, so ist der fortgesetzte Bruch

$$\cfrac{2a}{1+\cfrac{4a}{3+\cfrac{4a}{5+\ldots}}}$$

Wo die Zähler, den ersten ausgenommen, alle 4a sind, die Nenner aber die Reihe der ungraden Zahlen 1, 3,

5, 7 . . . bilden. Der Werth des fortgesetzten Bruchs läſst sich also durch

$$2a \cdot \frac{1 + \frac{4a}{2.3} + \frac{16a^2}{2.3.4.5} + \frac{64a^2}{2.3\ldots7} \ldots}{1 + \frac{4a}{2} + \frac{16a^2}{2.3.4} + \frac{64a^3}{2.3\ldots6} \ldots}$$

ausdrücken. Die Reihen im Zähler und Nenner beziehen sich auf bekannte Formeln. Wenn nämlich e die Zahl bedeutet, deren natürlicher Logarithme 1 ist, so ist der Ausdruck nichts anders als $\frac{e^{2\sqrt{a}} - e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}} + e^{-2\sqrt{a}}} \cdot \sqrt{a}$, so daſs

$$\frac{e^{2\sqrt{a}} - e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}} + e^{-2\sqrt{a}}} \cdot 2\sqrt{a} = \cfrac{4a}{1 + \cfrac{4a}{3 + \cfrac{4a}{5 \ldots}}}$$

ist. Daraus folgen zwey verschiedene Ausdrücke, je nachdem a positiv oder negativ ist. Es sey zuerst $4a = x^2$, so ist

$$\frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{x^2}{5 \ldots}}}$$

Sodann sey $4a = -x^2$, so ist, zufolge der bekannten Formel $\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}} = \sqrt{-1} \operatorname{tang} x$,

$$\operatorname{tang} x = \cfrac{x}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 \ldots}}}$$

Die letzte Formel wird zur Grundlage unseres Beweises dienen. Zuvor aber müssen noch folgende zwey Lehnsätze bewiesen werden.

Erster Lehnsatz. Es sey der ohne Ende fortgesetzte Bruch

$$\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''+\ldots}}}$$

gegeben, in welchem alle Zahlen m, n, m', n' *ganze positive Zahlen sind. Nimmt man an, daſs alle die einzelnen Brüche* $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$. . . *kleiner als Eins sind, so behaupte ich, daſs der Werth des ganzen fortlaufenden Bruchs nothwendig eine Irrationalzahl ist.*

Zuerst läſst sich zeigen, daſs der fortgesetzte Bruch kleiner als Eins ist. Denn ohne die Allgemeinheit des Ausdrucks zu vermindern, kann man alle Nenner n, n', n'' . . . positiv annehmen *). Nimmt man nun den ersten Theil der gegebenen Reihe allein, so ist, der Voraussetzung nach, $\frac{m}{n} < 1$. Nimmt man die beiden ersten Theile, so ist klar, daſs $n + \frac{m'}{n'}$ gröſser ist als $n-1$, weil $\frac{m'}{n'} < 1$ **). Nun ist m kleiner als n, also ist auch $m < n + \frac{m'}{n'}$ weil m und n ganze Zahlen sind ***).

*) Nämlich, weil noch die Zähler, wie man will, positiv oder negativ seyn können. A. d. Uebers.

**) Denn, ist m' positiv, so ist $n + \frac{m'}{n'}$ sogar gröſser als n, indem n, n', n'' . . . sämmtlich positiv seyn sollen. Ist m' negativ, so ist wenigstens $\frac{m'}{n'}$ kleiner als 1, und folglich $n + \frac{m'}{n'} > n - 1$; folglich ist in allen Fällen $n + \frac{m'}{n'} > n - 1$. A. d. Uebers.

***) und $n + \frac{m'}{n'}$ nicht um eine volle Einheit von n abweicht. A. d. Uebers.

Also ist der Werth des fortgesetzten Bruchs, wenn man zwey Glieder

$$\frac{m}{n + \frac{m_{,}}{n'}}$$

nimmt, kleiner als die Einheit. Nimmt man drey Glieder, so ist, wie eben bewiesen, der Theil $\frac{m'}{n' + \frac{m''}{n''}}$ kleiner als die Einheit. Der Werth desselben heiſse ω, so ist klar, daſs auch noch $\frac{m}{n + \omega}$ kleiner ist als die Einheit; also ist auch der Werth dreyer Glieder

$$\frac{m}{n + \frac{m'}{n' + \frac{m''}{n''}}}$$

kleiner als die Einheit. Fährt man auf diese Weise fort, so findet sich, daſs der fortlaufende Bruch, so viele Glieder man auch von demselben nimmt, immer kleiner ist als Eins; folglich ist der Werth des Bruchs, wenn man auch bis ins Unendliche fortgeht, kleiner als 1. Nur in dem einzigen Falle wenn der gegebene Bruch von der Form

$$\frac{m}{m + 1 - \frac{m'}{m' + 1 - \frac{m''}{m'' + 1 - \ldots}}}$$

wäre, ist der Werth desselben der Einheit gleich *). In jedem andern Falle ist er kleiner.

*) Denn verwandelt man zwey, drey u. s. w. Glieder dieses fortgesetzten Bruchs in gewöhnliche Brüche, so findet sich, daſs der Nenner immer nur um 1 gröſser ist als der Zähler. Z. B. die beiden ersten Glieder geben $\frac{mm' + m}{mm' + m + 1}$, die drey ersten Glieder $\frac{mm'm'' + mm' + m}{mm'm'' + mm' + m + 1}$ u. s. w.

Zweifelt man nun, daſs der Werth des gegebenen fortgesetzten Bruchs irrational ist, und nimmt also an, daſs er rational sey, so setze man ihn $= \frac{B}{A}$, wo B und A ganze Zahlen sind, welche es auch seyn mögen; es wäre also

$$\frac{B}{A} = \cfrac{m}{n + \cfrac{m'}{n' + \cfrac{m''}{n'' + \cfrac{m'''}{n''' + \ldots}}}}$$

C, D, E etc. mögen unbestimmte Zahlen bedeuten, für welche

$$\frac{C}{B} = \cfrac{m'}{n' + \cfrac{m''}{n'' + \cfrac{m'''}{n'''} \ldots}}$$

$$\frac{D}{C} = \cfrac{m''}{n''' + \cfrac{m^{IV}}{n^{IV} \ldots}}$$

und so weiter, bis Unendliche. Da alle Glieder dieser fortgesetzten Brüche kleiner als 1 sind, so sind auch ihre ganzen Werthe $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{B}$, $\frac{D}{C}$ etc. kleiner als 1, wie eben bewiesen worden, also ist $B < A$, $C < B$, $D < C$ u. s. w., woraus folgt, daſs die Gröſsen A, B, C, D, E . . . immerfort bis ins Unendliche abnehmen. Setzt man nun diese Gröſsen nach ihrer Bedeutung zusammen, so ist

$$\frac{B}{A} = \cfrac{m}{n + \cfrac{C}{B}}, \text{ woraus folgt } C = mA - nB,$$

$$\frac{C}{B} = \cfrac{m'}{n' + \cfrac{D}{C}}, \text{ woraus folgt } D = m'B - n'C,$$

Da nun m, m′ m″ . . . ganze Zahlen, also gröſser als 1 sind, so sind im Unendlichen Zähler und Nenner einander gleich, folglich ist der Werth des ganzen, wirklich unendlichen Bruchs, gleich 1. A. d. Uebers.

$$\frac{D}{C} = \cfrac{m''}{n'' + \frac{E}{D}},$$ woraus folgt $E = m'' C - n'' D$,

u. s. w. Da aber die beiden ersten Glieder A und B, der Voraussetzung nach, ganze Zahlen sind, so folgt, daſs alle übrigen C, D, E . . ., welche bis jetzt unbestimmt waren, ebenfalls ganze Zahlen sind. Es ist aber unmöglich, daſs eine unendliche Reihe von Gröſsen A, B, C, D, E . . . zu gleicher Zeit aus ganzen Zahlen bestehe und immerfort abnehme. Keine der Zahlen A, B, C, D, E . . . kann gleich Null seyn, weil der fortlaufende Bruch kein Ende hat, und folglich die durch $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{B}$, $\frac{D}{C}$ bezeichneten Summen immer einen bestimmten Werth haben müssen. Mithin ist die Voraussetzung, daſs der gegebene fortlaufende Bruch einer rationalen Gröſse $\frac{B}{A}$ gleich sey, unrichtig; folglich ist sein Werth nothwendig irrational.

Zweyter Lehnsatz. Wenn sich alles wie oben verhält, die Brüche $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$. . . , *aber nur im Anfange einen beliebigen Werth haben, und von einer gewissen Stelle an immer fort kleiner sind als die Einheit, so behaupte ich, daſs der gegebene fortlaufende Bruch, vorausgesetzt, daſs er kein Ende habe, irrational ist.*

Denn wenn z. B. von $\frac{m'''}{n'''}$ an, alle Brüche $\frac{m'''}{n'''}$, $\frac{m^{IV}}{m^{IV}}$, $\frac{m^{V}}{n^{V}}$. . . bis ins Unendliche kleiner als 1 sind, so ist nach dem ersten Lehrsatze der Werth des fortlaufenden Bruchs

$$\cfrac{m'''}{n''' + \cfrac{m^{IV}}{n^{IV} + \cfrac{m^{V}}{n^{V}} \dots}}$$

irrational. Dieser Werth heisse ω, so ist nunmehr der Werth des *gegebenen* fortgesetzten Bruchs

$$\cfrac{m}{n + \cfrac{m'}{n' + \cfrac{m''}{n'' + \omega \ldots}}}$$

Macht man aber, der Reihe nach, $\frac{m''}{n'' + \omega} = \omega'$, $\frac{m'}{n' + \omega'} = \omega''$, $\frac{m}{n + \omega''} = \omega'''$, so ist klar, daſs wenn ω irrational ist, alle die Gröſsen ω', ω'', ω''' ebenfalls irrational seyn müssen. Die letzte ω''' ist aber dem gegebenen fortgesetzten Bruche gleich, also ist dessen Werth irrational.

Nunmehr kann der obige Satz allgemein bewiesen werden.

Lehrsatz.

Wenn ein Bogen mit dem Halbmesser commensurabel ist, so ist seine Tangente mit dem nämlichen Halbmesser incommensurabel.

Denn es sey der Halbmesser $= 1$ und der Bogen $x = \frac{m}{n}$, wo m und n ganze Zahlen sind, so giebt die obige Formel, wenn man den Werth von x substituirt:

$$\operatorname{tang} \frac{m}{n} = \cfrac{m}{n - \cfrac{m^2}{3n - \cfrac{m^2}{5n - \cfrac{m^2}{7n \ldots}}}}$$

Dieser fortgesetzte Bruch ist in dem Falle des zweyten Lehnsatzes; denn weil die Nenner 3n, 5n, 7n . . . immerfort zunehmen, die Zähler aber unverändert $= m^2$ bleiben, so müssen die einzelnen Brüche bald kleiner als 1 werden; mithin ist der Werth von tang $\frac{m}{n}$ irrational; folglich ist die Tangente mit dem Halbmesser incommensurabel, wenn der Bogen commensurabel ist.

Daraus folgt unmittelbar der Satz der gegenwärtigen Anmerkung. Es sey nämlich π der halbe Umfang vom Halbmesser 1. Wäre π rational, so wäre es der Bogen $\frac{\pi}{4}$ auch, und folglich müſste die Tangente dieses Bogens irrational seyn. Wie bekannt, ist aber im Gegentheil die Tangente des Bogens $\frac{\pi}{4}$ dem Halbmesser 1 gleich, also kann π nicht rational seyn; folglich ist das Verhältnis des Umfanges zum Durchmesser eine irrationale Zahl *).

Wahrscheinlich ist die Zahl π auch keine algebraische Irrationalzahl, das heiſst keine Wurzel einer algebraischen Gleichung von einer endlichen Gliederzahl deren Coefficienten rational sind. Indessen scheint dieses schwer zu beweisen. Wir können blos zeigen, daſs noch das Quadrat von π irrational ist.

Denn macht man in dem fortgesetzten Bruche, welcher tang x ausdrückt, $x = \pi$, so erhält man, weil tang $\pi = 0$ ist,

$$0 = 3 - \cfrac{\pi^2}{5 - \cfrac{\pi^2}{7 - \cfrac{\pi^2}{9}}}$$

wäre nun π^2 rational und gleich $\frac{m}{n}$, wo m und n ganze Zahlen bedeuten, so würde daraus folgen

$$3 = \cfrac{m}{5n - \cfrac{m}{7 - \cfrac{m}{9n - \cfrac{m}{11 \ldots}}}}$$

Der fortgesetzte Bruch rechter Hand ist aber offenbar noch in dem Falle des zweyten Lehnsatzes, also ist sein Werth irrational und kann folglich der Zahl 3 nicht gleich seyn.

*) Dieser Satz ist zuerst von Lambert in den Berliner Memoiren von 1761 bewiesen worden.

A. d. Verf.

Mithin ist auch das Quadrat der Zahl welche das Verhältniſs des Umfanges zum Durchmesser ausdrückt, irrational *).

*) So scharfsinnig dieser Beweis ist, so muſs man doch gestehen, daſs er auch weitläuftig, und folglich für Elemente nicht wohl geeignet ist. Der Beweis, welchen Lambert in seinen Beyträgen zur Mathematik 2r Theil V. giebt, ist etwas weniger strenge. Die sinnreiche Art, wie Stainville in den Mélanges d'analyse S. 339, nach Fourrier, aus der Reihe für die Basis des natürlichen Logarithmen, beweiset, daſs diese Basis nothwendig irrational ist, scheint sich auf den Kreis nicht bequem anwenden zu lassen, weil die Reihen, welche den Bogen durch den Sinus, durch die Tangente u. ſ. w. ausdrücken, für diesen Zweck nicht genug convergiren, indem man den trigonometrischen Linien nur rationale Werthe geben darf, die, für aufgehende Theile des Umfanges, nur beim rechten Winkel und einem Drittheile desselben für den Sinus, und der Hälfte für die Tangente, anzutreffen sind. Ein einfacherer Beweis, der sich zugleich möglichst auf Functionen von π anwenden lassen dürfte, ist also noch zu wünschen. Vielleicht befriediget folgender Beweis mehr.

Es ist nämlich bekanntlich

$$\pi = 2 \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \ldots}$$

Nun kann ein Bruch, dessen Zähler und Nenner in Factoren zerlegt sind, nur dann einer ganzen Zahl gleich seyn, wenn sich alle, so weit als möglich, also bis auf die Primzahlen, zerlegte Factoren des Nenners, auch im Zähler befinden. Dieses ist hier offenbar nicht der Fall. Denn die Bedingung ist, daſs man, so weit man auch mit Zähler und Nenner gehet, für beide immer gleich viel, und zwar eine grade Zahl von Factoren nehme. Schreibt man also den Ausdruck π wie folgt,

$$\pi + 2^n \cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \ldots n \cdot n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \ldots 2n+1} \; 2^{p-n} \cdot \frac{n+1 \cdot n+1 \ldots p \cdot p}{2n+1 \cdot 2n+3 \ldots 2p+1}$$

$$2^{q-n} \cdot \frac{p+1 \cdot p+1 \ldots q \cdot q}{2p+1 \ldots 2q+1} \ldots\ldots$$

Fünfte Anmerkung.

Enthaltend die analytische Auflösung verschiedener Aufgaben, das Dreyeck, das Viereck im Kreise, das Parallelepipedum und die dreyseitige Pyramide betreffend.

so ist leicht zu sehen, daſs in einer gleichen Zahl von Factoren, der Nenner allemal mehr, und gröſsere Primzahlen enthält als der Zähler. Denn der Nenner enthält alle Primzahlen bis zu $2n+1$, von da bis zu $2p+1$, von da bis $2q+1$ u. s. w., der Zähler nur bis zu n, von da bis zu p, von da bis zu q u. s. w. Folglich giebt es im Nenner Factoren, die sich im Zähler nicht befinden, und mithin kann π erstlich keine ganze Zahl seyn. Wäre π ein Bruch, z. B. $\frac{m}{n}$ wo m und n ganze Zahlen bedeuten, so multiplicire man denselben mit $1 . 2 . 3 \ldots n$. Dieses giebt

$$m(1.2.3 \ldots n-1) = 2 . 2^{n} \frac{1^3.2^3.3^3 \ldots n^3}{1.3^2.5^2 \ldots 2n+1} \; 2^{p-n} . \frac{n+1^2 \ldots p^2}{2n+1.2n+3^2 \ldots 2p+1}$$

$$2^{q-n} . \frac{p+1^2 \ldots q^2}{2p+1.2p+3^2 \ldots 2q+1} \ldots\ldots$$

Da nun $m(1 . 2 . 3 \ldots n-1)$ eine ganze Zahl ist, so müſste die Gröſse rechterhand ebenfalls eine ganze Zahl seyn. Aber dieses ist aus demselben Grunde wie vorhin nicht möglich, weil der Zähler des Bruchs, so groſs man auch n annehmen mag, immer weniger, und kleinere Primzahlen unter seinen Factoren enthält als der Nenner. Also sind keine ganze Zahlen m und n, so groſs man sie auch annehmen mag, möglich, deren Quotient $\frac{m}{n}$ die Gröſse π ausdrückt, folglich ist π irrational, in so fern nämlich eine Zahl, die weder eine ganze Zahl noch ein Bruch ist, zu den irrationalen gehört.

Es scheint auch noch aus dem Obigen zu folgen, daſs nicht blos, das Quadrat, sondern jede Potenz von π mit einem ganzen positiven Exponenten irrational ist. Denn man kann die Glieder links und rechts in der obigen letzten Gleichung zu einer beliebigen Potenz erheben, ohne daſs die Anwendbarkeit des auf die gröſsere Menge der

Erste Aufgabe.

Aus den gegebenen drey Seiten eines Dreyecks den Inhalt und den Halbmesser des ein- und umgeschriebenen Kreises zu finden.

Fig. 274. Die Seiten sollen $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ heissen. Aus dem Scheitel A ziehe man AD auf die gegenüberliegende Seite BC senkrecht, so ist $AC^2 = AB^2 + BC^2 - BC \cdot BD$ z. B. (3s B. 12r S.); also ist $BD = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$. Dieser Ausdruck giebt $AB^2 - BD^2$ oder $AD^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2 = \frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)}{4a^2}$.

also $AD = \frac{\sqrt{[4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2]}}{2a}$. Der Inhalt des Dreyecks sey S, so ist $S = \frac{1}{2}BC \times AD$, also ist

$$S = \tfrac{1}{4}\sqrt{[4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2]}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)}$$

Dieser Ausdruck kann noch auf eine andere, für die Berechnung mit Logarithmen, bequemere Gestalt gebracht werden. Man bemerke nämlich, daſs die Gröſse $4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2$ das Product zweyer Factoren $2ac + a^2 + c^2 - b^2$ und $2ac - (a^2 + c^2 - b^2)$ ist. Ferner ist der erste Factor $(a + c)^2 - b^2 = (a + c + b)(a + c - b)$, der zweyte $b^2 - (a - c)^2 = (b + a - c)(b - a + c)$, also ist

$$S = \tfrac{1}{4}\sqrt{[(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(b + c - a)]}$$

Macht man $\frac{a + b + c}{2} = p$, welches $a + b + c = 2p$, $a + b - c = 2p - 2c$, $a - b + c = 2p - 2b$ und $b + c - a = 2p - 2a$ giebt, so ist auch

$$S = \sqrt{[p(p - a)(p - b)(p - c)]},$$

woraus man sieht, daſs man, um den Inhalt eines Drey-

Primzahlen im Nenner gegründeten Schluſses, daſs der Bruch rechterhand keine ganze Zahl seyn kann, aufhörte.

A. d. Uebers.

ecks zu finden, dessen drey Seiten gegeben sind, die halbe Summe der drey Seiten nehmen, von dieser halben Summe, der Reihe nach, die Seiten abziehen, die drey Reste in einander und in die halbe Summe multipliciren, und aus dem Producte die Quadratwurzel ziehen muſs. Diese Quadratwurzel ist der Inhalt des Dreyecks.

Nun sey z der Halbmesser des umschriebenen, und u der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises, so ist zufolge des 22sten Satzes im 3ten Buche,

$z = \frac{\frac{1}{4}abc}{S}$ und $u = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{S}{p}$. Substituirt man hierin den obigen Werth von S, so erhält man

$$z = \frac{\frac{1}{4}abc}{\sqrt{(p \,.\, p-a \,.\, p-b \,.\, p-c)}},\; u = \sqrt{\left(\frac{p-a \; p-b \,.\, p-c}{p}\right)}.$$

Zweyte Aufgabe.

Aus den gegebenen vier Seiten eines eingeschriebenen Vierecks, den Halbmesser des Kreises, den Inhalt des Vierecks und seine Winkel zu finden.

Fig. 276. Die gegebenen Seiten sollen $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ und $DA = d$ seyn, die unbekannten Diagonalen aber $AC = x$ und $BD = y$, so hat man zufolge des 33sten Lehrsatzes im 3ten Buche, $xy = ac + bd$ und $\frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$, woraus folgt:

$$x = \sqrt{\left\{\frac{(ac+bd)\,(ad+bc)}{ab+cd}\right\}},\; y = \sqrt{\left\{\frac{(ac+bd)\,(ab+cd)}{ad+bc}\right\}}.$$

Nun läſst sich nach der vorigen Aufgabe der Halbmesser des Kreises um das Dreyeck ABC, dessen Seiten a, b und x sind, wie folgt, ausdrücken, $z = \sqrt{\left(\frac{abx}{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}\right)}$. Setzt man statt x den vorhin gefundenen Werth und zerlegt das Resultat in Factoren, so erhält man

$$z = \sqrt{\left\{\frac{(ac+bd)\,(ad+bc)\,(ab+cd)}{(a+b+c-d)\,(a+b+d-c)\,(a+c+d-b)\,(b+c+d-a)}\right\}}.$$

Ferner ist der Inhalt des Dreyecks ABC $= \frac{\frac{1}{4}abx}{z}$ und der Inhalt des Dreyecks ADC $= \frac{\frac{1}{4}cdx}{z}$, also ist der Inhalt des Vierecks ABCD $= \frac{1}{4} \cdot \frac{ab+cd}{z} \cdot x =$

$$\frac{1}{4} \sqrt{[(a+b+c-d)\,(a+b+d-c)\,(a+c+d-b)\,(b+c+d-a)]}$$

Setzt man der Kürze wegen $p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ so erhält man für den Inhalt von ABCD

$$\sqrt{(p-a \,.\, p-b \,.\, p-c \,.\, p-d)}.$$

Endlich hat man für die Winkel, z. B. für den Winkel B in dem Dreyecke ABC, $\cos B = \frac{a^2+b^2-x^2}{2ab}$ *). Substituirt man hierin den Werth von x und reducirt, so erhält man $\cos B = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2ab+2cd}$, woraus folgt $\frac{1-\cos B}{1+\cos B}$, oder $\tang \frac{1}{2} B^2 = \frac{(c+a)^2-(a-b)^2}{(a+b)^2-(c-d)^2} = \frac{(a+c+d-b)(b+c+d-a)}{(a+b+c-d)(a+b+d-c)}$, also

$$\tang \frac{1}{2} B = \sqrt{\left(\frac{p-a \,.\, p-b}{p-c \,.\, p-d}\right)}.$$

Dritter Lehrsatz.

Fig. 277. *In dem Vierecke ABDC sind die gegenüberliegenden Winkel rechte. Man soll aus den beiden gegebenen Seiten AB und AC, und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel BAC, die beiden andern Seiten und die Diagonale AD finden.*

Es sey AC = b, AB = c und der Winkel BAC = A. Verlängert man BD und AC bis sie sich in F schneiden, so giebt das in B rechtwinklige Dreyeck, von welchem der Winkel BAE und die Seite AB bekannt sind, AE

*) Trigonometrische Linien sind aber noch nicht erklärt worden. Daher sollte dieser Satz eigentlich wohl erst hinter der Trigonometrie folgen.

A. d. Uebers.

$= \frac{a}{\cos A}$, also CE $= \frac{c}{\cos A} - b$. Sodann giebt das in C rechtwinklige Dreyeck DCE, von welchem die Seite CE und der Winkel CDE = A bekannt sind, CD = CE cot A $= \frac{c - b \cos A}{\sin A}$. Also ist auch ähnlicher Weise BD $= \frac{b \quad c \cos A}{\sin A}$. Dieses sind die gesuchten Werthe der beiden Seiten des Vierecks.

Daraus folgt die Diagonale AD $= \sqrt{(AC^2 + DC^2)}$ $= \sqrt{\left(b^2 + \frac{(c - b \cos A)^2}{\sin A}\right)} = \frac{\sqrt{(b^2 + c^2 - 2bc \cos A)}}{\sin A}$. Aber in dem Dreyecke BAC ist BC $= \sqrt{(b^2 + c^2 - 2bc \cos A)}$; also verhält sich die Diagonale AD, welche die Scheitel der beiden schiefen Winkel verbindet, zur Diagonale durch die rechten Winkel, wie 1 zu sin A.

Anmerkung. Die Diagonale AD ist zugleich der Durchmesser des Kreises um das Viereck ABCD.

In diesem Kreise würde der Winkel ABC = ADC seyn, also sind die Dreyecke BFC und ADC, wenn man CF auf AB senkrecht zieht, ähnlich, und geben folglich AD : BC = AC : FC = 1 : sin A, welches mit dem Obigen übereinstimmt *).

*) Dieser Satz ist nur ein besonderer Fall des allgemeinern Satzes, daſs sich in jedem Vierecke im Kreise, die Diagonalen wie die Sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel verhalten, und dieser Satz folgt aus dem noch allgemeinern, daſs sich beliebige Sehnen im Kreise wie die Sinus beliebiger, auf den zu den Sehnen gehörigen Bogen stehender Peripheriewinkel verhalten, weil die Peripheriewinkel die Hälften der zugehörigen Mittelpunctswinkel, von diesen halben Mittelpunctswinkeln aber, also von den Peripheriewinkeln selbst, die halben Sehnen die Sinus sind, so daſs sich also die halben Sehnen, und folglich auch die ganzen Sehnen, wie die Sinus beliebiger auf ihren Bogen stehender Peripheriewinkel verhalten. Im Vierecke sind die diagonalen Sehnen und die gegenüberliegenden Winkel des

Vierte Aufgabe.

Aus drey gegebenen Kanten eines Parallelepipedums und den Winkeln welche sie einschliefsen, den körperlichen Inhalt des Parallelepipedums zu finden.

Fig. 278. Die Kanten sollen $SA = f$, $SB = g$, $SC = h$ und die eingeschlossenen Winkel $ASB = \gamma$, $ASC = \beta$, $BSC = \alpha$ seyn. Zieht man aus dem Puncte C auf die Ebene ASB das Perpendikel CO, so giebt das rechtwinklige Dreyeck CSO, $CO = CS \sin CSO = h \sin CSO$. Nun ist der Flächeninhalt des Parallelogramms $ASBP = fg \sin \gamma$. Nennt man also S den körperlichen Inhalt des Parallelepipedums ST, so ist $S = fgh \cdot \sin \alpha \cdot \sin CSO$. Es ist noch sin CSO zu suchen.

Man beschreibe zu dem Ende aus S mit dem Halbmesser 1 eine Kugelfläche, welche die graden Linien SA, SB, SC, SO in D, E, F, G schneidet, so entsteht ein Dreyeck DEF, in welchem der Bogen FG auf ED senkrecht ist, weil die Ebene SCO auf ASB senkrecht steht. Nun giebt das Dreyeck DEF, in welchem die drey Seiten $DE = \gamma$, $DF = \beta$ und $EF = \alpha$ bekannt sind, $\cos E = \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha \sin\gamma}$ und $\sin E = \frac{\sqrt{(1 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)}}{\sin\alpha\sin\gamma}$ *). Ferner giebt das rechtwinklige Dreyeck EFG, sin GF oder $\sin CSO = \sin E . \sin EF = \sin\alpha \sin E$, also $S = fgh \sin\alpha \sin\gamma \sin E$ oder $S = fgh \sqrt{(1 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)}$. In diesem Ausdrucke ist die Gröfse unter dem Wurzelzeichen das Product zweyer Factoren $\sin\alpha\sin\gamma + \cos\beta - \cos a \cos\gamma$ und

Vierecks Peripheriewinkel, welche auf den zu den Sehnen gehörigen Bogen stehen.

A. d. Uebers.

*) Erklärt findet man dieses in der sphärischen Trigonometrie. A. d. Uebers.

$\sin\alpha \sin\gamma - \cos\beta + \cos\alpha \cos\gamma$. Der erste Factor ist gleich $\cos\beta - \cos(\alpha+\gamma) = 2 \sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} . \sin\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}$, der andere $= \cos(\alpha-\gamma) - \cos\beta = 2 \sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} . \sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$. Also ist der gesuchte körperliche Inhalt $S = 2fgh \sqrt{\left[\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} . \sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} . \sin\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2} . \sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right]}$ *).

Fünfte Aufgabe.

Aus den in der vorigen Aufgabe gegebenen Stücken die Diagonale zu finden, welche zwey gegenüberliegende Winkelscheitel verbindet.

Fig. 278. Die Diagonale SP der Grundfläche sey $= z$, und die gesuchte Diagonale ST $= u$. Das Dreyeck ASP, in welchem $\cos SAP = -\cos\gamma$ ist, giebt $z^2 = f^2 + g^2 + 2fg \cos\gamma$. Das Dreyeck TSP, in welchem $\cos TPS = -\cos CSP$ ist, giebt $u^2 = z^2 + h^2 + 2hz \cos CSP$. Man braucht also nur noch den Cosinus des Winkels CSP, oder den Bogen FH. Nun ist in dem Kugeldreyecke EFH, $\cos FH = \cos EF . \cos EH + \sin EF . \sin EH \cos E$. Setzt man die Werthe $EF = \alpha$ und $\cos E = \frac{\cos\beta - \cos\alpha \cos\gamma}{\sin\alpha \sin\gamma}$, so erhält man $\cos FH = \cos\alpha \cos EH + \frac{\sin EH}{\sin\gamma}(\cos\beta - \cos\alpha \cos\gamma) = \frac{\sin EH \cos\beta}{\sin\gamma} + \frac{\sin(\gamma - EH)\cos\alpha}{\sin\gamma} = \frac{\sin EH \cos\beta + \sin DH \cos\alpha}{\sin\gamma}$, also ist $2hz \cos FH$, oder $2hz \cos CSP = 2h \cos\beta . \frac{z \sin EH}{\sin\gamma}$

*) Von allen hier vorkommenden trigonometrischen Verwandlungen wird erst weiter unten Rechenschaft gegeben.

A. d. Uebers.

$+ 2h \cos\alpha \frac{z \sin DH}{\sin\gamma}$. Aber in dem Dreyecke BSP ist $BP = \frac{SP \sin BSP}{\sin SBP}$ und $BS = \frac{SP \sin BPS}{\sin SBP}$, welches giebt $\frac{z \sin EH}{\sin\gamma} = f$ und $\frac{z \sin DH}{\sin\gamma} = g$. Also ist $2hz \cos CSP = 2fh \cos\beta + 2gh \cos\alpha$; folglich ist das Quadrat der gesuchten Diagonale

$$u^2 = f^2 + g^2 + h^2 + 2fg \cos\gamma + 2fh \cos\beta + 2gh \cos\alpha.$$

Anmerkung. Der Körperwinkel A wird von den Kanten f, g, h eingeschlossen, welche mit einander folgende Winkel: zwey Rechte weniger γ, zwey Rechte weniger β, und α, einschliessen; also darf man nur in dem Ausdrucke von SE^2 die Zeichen von $\cos\gamma$ und $\cos\beta$ ändern, um den Ausdruck von AM^2 zu finden. Thut man ein Gleiches für die beiden andern Diagonalen, so erhält man die Werthe ihrer Quadrate, wie folgt:

$$ST^2 = f^2 + g^2 + h^2 + 2fg \cos\gamma + 2fh \cos\beta + 2gh \cos\alpha$$
$$AM^2 = f^2 + g^2 + h^2 - 2fg \cos\gamma - 2fh \cos\beta + 2gh \cos\alpha$$
$$BN^2 = f^2 + g^2 + h^2 - 2fg \cos\gamma + 2fh \cos\beta - 2gh \cos\alpha$$
$$CP^2 = f^2 + g^2 + h^2 + 2fg \cos\gamma - 2fh \cos\beta - 2gh \cos\alpha$$

woraus folgt:

$$ST^2 + AM^2 + BN^2 + CP^2 = 4f^2 + 4g^2 + 4h^2.$$

In jedem Parallelepipedum ist also die Summe der Quadrate der vier Diagonalen gleich der Summe der Quadrate von zwölf Kanten. Dieser merkwürdige und dem Satze von Parallelogrammen ähnliche Satz könnte auch aus diesem unmittelbar gefunden werden. Denn aus den Parallelogrammen SCTP und ABMN findet man

$$ST^2 + CP^2 = 2SC^2 + 2SP^2$$
$$AM^2 + BN^2 = 2BM^2 + 2AB^2.$$

Rechnet man diese beiden Gleichungen zusammen und erwägt, dafs $SC = BM$ und $SP^2 + AB^2 = 2SA^2 + 2SB^2$, so kommt $ST^2 + AM^2 + BN^2 + CP^2 = 4SA^2 + 4SB^2 + 4SC^2$.

Sechster Satz.

Aus den drey in einer Spitze zusammenstossenden gegebenen Kanten einer dreyseitigen Pyramide und den drey Winkeln welche diese Kanten mit einander einschliessen, den Inhalt der Pyramide zu finden.

Fig. 278. SABC sey die gegebene dreyseitige Pyramide, in welcher man die Kanten $SA = f$, $SB = g$, $SC = h$ und die eingeschlossenen Winkel $ASB = \gamma$, $ASC = \beta$, $BSC = \alpha$ kennt. Beschreibt man über diesen, der Gröſse und Lage nach gegebenen Kanten, das Parallelepipedum ST, so ist die Pyramide, welche ein Drittheil des dreyseigen Prisma BSANMC ausmacht, gleich einem Sechstheil des Parallelepipedums ST; Nennt man also P den körperlichen Inhalt der Pyramide, so erhält man, nach der vierten Aufgabe, $P = \frac{1}{6} fgh \sqrt{(1 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 + 2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma)}$ oder

$$P = \tfrac{1}{6} fgh \sqrt{\left[\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} . \sin\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2} . \sin\frac{\gamma+\beta-\alpha}{2}\right]}.$$

Siebente Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt einer dreyseitigen Pyramide aus ihren sechs Kanten zu finden.

Fig. 278. Behält man die Bezeichnungen aus der vorigen Aufgabe bey, und macht $BC = f'$, $CA = g'$, $BA = h'$, so ist $\cos\gamma = \frac{f^2 + g^2 - h'^2}{2fg}$, $\cos\beta = \frac{f^2 + h^2 - g'^2}{2fh}$, $\cos\alpha = \frac{g^2 + h^2 - f'^2}{2gh}$. Setzt man diese Werthe in die gefundene Formel, nnd der Kürze wegen

$g^2 + h^2 - f'^2 = F$, $f^2 + h^2 - g'^2 = G$, $f^2 + g^2 - h'^2 = H$ so ist der verlangte Ausdruck des körperlichen Inhalts de Pyramide

$$P = \tfrac{1}{12} \sqrt{[4f^2 g^2 h^2 - f^2 F^2 - g^2 G^2 - h^2 H^2 + FGH]}.$$

Bey diesen Ausdrücken muſs man sich erinnern, da f', g', h' die Seiten einer und derselben Seiten- oder Grund-

fläche, und f, g, h die drey übrigen Kanten sind, welche im Scheitel zusammenstoſsen, und von welchen f′ der Kante f, g′ der Kante g und h′ der Kante h gegenüberliegt.

Anmerkung. A sey die Summe der vier Dreyecke, welche die Oberfläche der Pyramide bilden; r sey der Halbmesser der eingeschriebenen Kugel, so ist leicht zu sehen, daſs $P = A \times \frac{1}{3} r$; denn man kann sich die Pyramide aus vier andern Pyramiden zusammengesetzt vorstellen, welche den Mittelpunct der Kugel zur gemeinschaftlichen Spitze, und die verschiedenen Seitenflächen der Pyramide zu Grundflächen haben. Der Halbmesser der eingeschriebenen Kugel ist also $r = \frac{3P}{A}$.

Achte Aufgabe.

Aus den nämlichen gegebenen Stücken einer Pyramide, wie in der sechsten Aufgabe, den Halbmesser der um die Pyramide beschriebenen Kugel zu finden.

Fig. 279. M sey der Mittelpunct des um das Dreyeck SAB beschriebenen Kreises, MO ein Perpendikel aus dem Puncte M, auf die Ebene SAB; N sey der Mittelpunct des um das Dreyeck SAC beschriebenen Kreises, NO ein Perpendikel durch den Punct N auf die Ebene SAC. Da die beiden Perpendikel MO und NO in einer und derselben, auf SA senkrechten Ebene MDN liegen, so begegnen sie sich in irgend einem Puncte O, welcher der Mittelpunct der umschriebenen Kugel ist. Denn der Punct O, als im Perpendikel MO liegend, ist gleich weit von den drey Puncten S, B und A, und der nämliche Punct, als im Perpendikel NO liegend, gleich weit von den drey Puncten S, A und C entfernt; folglich ist er gleich weit von den vier Puncten S, A, B und C entfernt.

Man kann sich den Punct M, in der Ebene SAB, durch das Viereck SDMH bestimmt vorstellen, in welchem die bei-

den Winkel D und H rechte sind, und in welchen $SD = \frac{1}{2}f$, $SH = \frac{1}{2}g$ und $ASB = \gamma$ ist; folglich ist zufolge der dritten Aufgabe, $DM = \frac{\frac{1}{2}g - \frac{1}{2}f \cos\gamma}{\sin\gamma}$ und eben so $DN = \frac{\frac{1}{2}h - \frac{1}{2}f \cos\beta}{\sin\beta}$.

Der Winkel MDN, welcher die Neigung der beiden Ebenen SAB und SAC mifst, heifse D, so ist in dem Kugeldreyecke, dessen Seiten α, β, γ sind, der der Seite α gegenüberliegende Winkel = D, und folglich $\cos D = \frac{\cos\alpha - \cos\gamma \cos\beta}{\sin\gamma \sin\beta}$, so dafs der Winkel D als bekannt angenommen werden kann.

Nun ist in dem Virecke OMDN, dessen Winkel M und N rechte sind, und in welchem man die beiden Seiten MD und DN und den von ihnen eingeschlossenen Winkel $MDN = D$ kennt, vermöge der dritten Aufgabe, das Quadrat der Diagonale $OD^2 = \frac{DM^2 + DN^2 - 2DM \cdot DN \cdot \cos D}{\sin D^2}$. Ferner ist in dem in D rechtwinkligen Dreyecke OSD, $SO^2 = OD^2 + SD^2$, und dieses SO ist der Halbmesser der umschriebenen Kugel.

Substituirt man die Werthe von DM und DN, und darauf die von cos D und sin D, um unmittelbar den Halbmesser SO durch die bey der sechsten Aufgabe gegebenen Bestimmungsstücke auszudrücken, so findet man

$$SO = \frac{1}{2}\sqrt{\left\{\frac{f^2 \sin\alpha^2 + g^2 \sin\beta^2 + h^2 \sin\gamma^2 - 2fg(\cos\gamma - \cos\beta\cos\alpha) - 2fh(\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma) - 2gh(\cos\alpha - \cos\gamma\cos\beta)}{1 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\text{*)}}\right\}}.$$

*) Wenn man den Halbmesser der umschriebenen Kugel, statt wie hier zugleich durch die Winkel α, β, γ, blos durch die sechs Kanten ausdrückt, so läfst sich der Zähler des Bruchs, welchen man erhält, in Factoren zerlegen. Die Auseinandersetzung dieses Umstandes, nebst einigen andern die Pyramiden betreffenden weniger bekannten Sätzen, findet man

Sechste Anmerkung.

Ueber die kürzeste Entfernung zweyer nicht in einer Ebene liegender grader Linien.

Fig, 280. AB und CD sollen zwey gegebene, nicht in einer Ebene liegende grade Linien seyn, deren kürzeste Entfernung von einander gesucht wird.

Durch AB lege man zwey auf einander senkrechte Ebenen, welche CD schneiden, die eine in C, die andere in D. Aus C und D ziehe man CA und DB auf AB senkrecht. In der Ebene ABD ziehe man DE mit AB parallel, und AE auf AB senkrecht, so daſs ein Rechteck ABDE entsteht. In der Ebene CAE ziehe man CE, und darauf AI auf CE senkrecht; endlich in der Ebene CDE, IK mit DE parallel, bis sie CD in K schneidet. Man mache AL = IK und ziehe KL, so behaupte ich erstlich, daſs die grade Linie KL auf den beiden gegebenen Linien AB und CD zugleich senkrecht ist, zweytens, daſs KL kürzer ist als jede andere, zwey Puncte der Linien AB und OD verbindende grade Linie, und daſs also KL, oder die ihr gleiche AI, die verlangte kleinste Entfernung ist.

Denn erstlich sind die drey graden Linien AB, AC und AE, der Construction nach, auf einander senkrecht, und jede ist senkrecht auf der Ebene durch die beiden andern; also ist AB auf AI senkrecht; ferner ist KI mit DE und DE mit AB parallel, also ist KI mit AB parallel; und weil AL = KI, so ist die Figur AIKL ein Rechteck. Nun ist der Winkel AIK ein rechter, eben wie AIC; also ist die grade Linie AI auf der Ebene KIC oder CDE senkrecht; also ist ihre Parallele KL auf der nämlichen Ebene CDE, und folglich auch auf CD senkrecht. Folglich ist erstlich,

im ersten Bande meiner Sammlung mathematischer Abhandlungen, welcher mit gegenwärtiger Uebersetzung gleichzeitig erscheint. A. d. Uebers.

die grade Linie KL auf den beiden graden Linien AB und CD zugleich senkrecht.

Zweytens sey M irgend ein Punct in der graden Linie CD. Zieht man durch diesen Punct, MN mit DE oder AB parallel, so ist der Abstand des Puncts M von der graden Linie AB, gleich AN, weil der Winkel ein rechter ist. Es ist aber AN > AI; also ist AI die kürzeste Entfernung der beiden gegebenen Linien AB und CD.

Es sey das Perpendikel CA = a und das Perpendikel DB = AE = b, so ist $CE = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ und weil der Inhalt des Dreyecks ACE eben so wohl $= \frac{1}{2}AC \times AE$ als $\frac{1}{2}CE \times AI$ ist, so ist $AI = \frac{AC \times EA}{CE} = \frac{ab}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$. Dieses ist der Ausdruck der kürzesten Entfernung zweyer gegebenen Linien. Nennt man die Entfernung AB = c und A den Winkel zwischen den beiden gegebenen Linien, das heifst den Winkel CDE zwischen der Linie CD, und der mit AB parallelen Linien DE, so giebt das in E rechtwinklige Dreyeck CDE, $\cos CDE = \frac{DE}{CD}$ oder $\cos A = \frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}$; denn es ist $CD^2 = CE + ED^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Daraus folgt auch

$$\sin A = \frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}} \text{ und } \cot A = \frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2)}}.$$

Siebente Anmerkung.

Ueber die symmetrischen Polyëder.

Nur der Kürze wegen haben wir in der 16ten Erklärung des sechsten Buchs, zu der Ebene, auf welche symmetrische Polyëder gezogen wurden, eine Seitenebene genommen. Man könnte eben so wohl eine beliebige andere Ebene dazu nehmen. Dann ist die Erklärung noch allgemeiner, ohne dafs sich etwas in dem Beweise des zweyten Satzes über die wechselseitigen Beziehungen der Polyëder

auf einander, änderte. Man kann sich auch einen guten Begriff von der Natur symmetrischer Polyëder machen, wenn man sich den einen von beiden Körpern als das Bild des andern in einem ebenen Spiegel vorstellt. Der Spiegel vertritt dann die Stelle der vorhin erwähnten Ebene.

Achte Anmerkung.

Ueber den funfzehnten Satz im siebenten Buche.

Aus diesem Satze, welchen zuerst Euler in den Petersburger Memoiren vom Jahre 1758 bewiesen hat, lassen sich mehrere merkwürdige Folgerungen ziehen.

Erstlich. a sey die Zahl der Dreyecke, b die Zahl der Vierecke, c die Zahl der Fünfecke in der Oberfläche eines Polyëders, so ist die ganze Zahl der Seitenebenen desselben $a + b + c + d \ldots$ und die ganze Zahl ihrer Seiten $= 3a + 4b + 5c + 6d \ldots$ Diese letzte Zahl ist die doppelte Zahl der Kanten, weil immer eine Kante zweyen Seitenflächen zugleich angehört; also ist

$$H = a + b + c + d \ldots$$
$$2A = 3a + 4b + 5c + 6d \ldots,$$

und weil nach dem gedachten Lehrsatze $S + H = A + 2$ ist,

$$2S = 4 + a + 2b + 3c + 4d \ldots$$

Hieraus folgt zuerst, daſs die Zahl der Seitenebenen von einer ungraden Zahl von Seiten, $a + c + e \ldots$, immer eine grade ist.

Man setze der Kürze wegen $b + 2c + 3d \ldots = \omega$ so ist

$$A = \tfrac{3}{2} H + \tfrac{1}{2} \omega$$
$$S = 2 + \tfrac{1}{2}H + \tfrac{1}{2} \omega;$$

also ist in jedem Polyëder $A > \tfrac{3}{2} H$ und $S > 2 + \tfrac{1}{2} H$, wobey das Zeichen $>$ auch die Gleichheit mit bedeutet, weil auch $\omega = 0$ seyn könnte.

Die Zahl aller ebenen Winkel des Polyëders ist $2A$, die Zahl der Körperwinkel S, so daſs die mittlere Zahl der ebenen Winkel um einen Körperwinkel $\frac{2A}{S}$ ist.

Diese Zahl kann nicht kleiner als 3 seyn, weil mindestens drey ebene Winkel nöthig sind, um einen Körperwinkel zu bilden. Also muſs $2A > 3S$ seyn. Das Zeichen $>$ bedeutet wieder die Gleichheit mit. Setzt man statt A und S ihre Werthe in H und ω, so ist $3H + \omega > 6 + \frac{3}{2}H + \frac{1}{2}\omega$, oder $3H > 12 + \omega$. Setzt man hierin die Werthe von H und ω in a, b, c so erhält man

$$3a + 2b + c > 12 + e + 2f + 2f + 3g \ldots\ldots$$

woraus folgt, daſs a, b, c nicht zugleich Null seyn können, und daſs also kein Polyëder existirt, dessen Seiten Ebenen alle mehr als 5 Seiten hätten.

Weil $H > 4 + \frac{1}{3}\omega$ so giebt die Substitution in die Werthe von S und A, $S > 4 + \frac{3}{2}\omega$ und $A > 6 + \omega$. Aber zugleich ist $\omega < 3H - 12$, also ist $S < 2H - 4$ und $A = 3H - 6$, wobey die Zeichen $>$ und $<$ immer die Gleichheit mit bedeuten. Diese Grenzen gelten allgemein für alle Polyëder.

Zweytens. Man setze $2A > 4S$, welches bey einer unendlichen Menge von Polyëdern Statt findet, z. B. bey solchen, deren Körperwinkel alle von vier oder mehrern Ebenen umschlossen werden, so ist in diesem Falle $H > 8 + \omega$, oder, wenn man substituirt,

$$a > 8 + c + 2d + 3e \ldots\ldots$$

Also muſs ein solcher Körper wenigstens acht dreyeckige Seitenebenen haben. Die Grenze $H > 8 + \omega$ giebt $S > 6 + \omega$ und $A > 12 + 2\omega$. Aber zugleich ist $\omega < H - 8$; also ist $S < H - 2$, $A < 2H - 4$.

Drittens setze man $2A > 5S$, welches unter andern auf diejenigen Polyëder paſst, deren Körperwinkel wenig-

stens fünfseitig sind, so erhält man $H > 20 + 3\omega$ oder

$$a > 20 + 2b + 5c + 8d \ldots$$

Zugleich aber ist $S > 12 + 2\omega$ und $A > 30 + 5\omega$. Endlich folgt aus $\omega < \frac{1}{3}(H - 20)$, $S < \frac{2}{3}(H - 2$ und $A < \frac{5}{3}(H - 2)$.

$2A = 6S$ kann man nicht setzen, denn es ist allgemein $2A + 2\omega + 12 = 6S$, also ist kein Polyëder möglich, dessen Körperwinkel alle von sechs oder mehreren Ebenen umschlossen wären. In der That ist der kleinste Werth, welchen ein ebener Winkel im Durchschnitt haben würde, der eines Winkels im gleichseitigen Dreyecke, und sechs dieser Winkel machen vier rechte aus, welches für einen Körperwinkel zu viel ist.

Viertens. Man nehme ein Polyëder an, dessen Seitenebenen alle dreyeckig sind, so ist $\omega = 0$, also $A = \frac{3}{2}H$ und $S = 2 + \frac{1}{2}H$. Man setze auſserdem daſs alle Körperwinkel des Polyëders theils fünf- theils sechsseitig sind; die Zahl der fünfseitigen Körperwinkel sey p, der sechsseitigen q, so ist $S = p + q$ und $2A = 5p + 6q$, welches giebt $6S - 2A = p$. Da nun $A = \frac{3}{2}H$ und $S = 2 + \frac{1}{2}H$, so ist $p = 6S - 2A = 12$. *Wenn also ein Polyëder lauter dreyeckige Seitenflächen hat, und seine Körperwinkel theils fünf- theils sechsseitig sind, so ist die Zahl der fünfseitigen Körperwinkel immer* 12. Der sechsseitigen Körperwinkel können so viel seyn als man will. Läſst man also q unbestimmt, so ist für alle diese Körper $S = 12 + q$, $H = 20 + 2q$, $A = 30 + 3q$.

Wir wollen diese Bemerkungen mit einer Untersuchung der Zahl der Bedingungen schliessen, welche nöthig sind um ein Polyëder zu *bestimmen.* Die Untersuchung ist interessant und scheint noch nicht da gewesen zu seyn.

Man setze zuerst, das Polyëder sey von einer bestimmten Art, das heiſst, man kenne die Zahl seiner Seiten und ihre Lage gegen einander. Es wären also in diesem

Falle die Zahlen H, S, A, desgleichen a, b, c, d . . . bekannt, und es würde die Zahl der Bestimmungsstücke, Winkel oder Seiten verlangt, mittelst welcher das Polyëder construirt werden kann.

Man betrachte eine der Seitenflächen des Polyëders, die wir zur Grundfläche annehmen wollen. Die Zahl ihrer Seiten sey n, so sind $2n - 3$ Stücke zur Bestimmung der Grundfläche nöthig. Die Zahl der Körperwinkel ausserhalb der Grundfläche ist $S - n$, der Scheitel jedes Körperwinkels erfordert drey Bestimmungsstücke, also erfordern $S - n$ Scheitel, $3S - 3n$ Bestimmungsstücke; hiezu die $2n - 3$ der Grundfläche, giebt in Allem $3S - n - 3$ Stücke. Diese Zahl aber ist im Allgemeinen zu groſs. Die Zahl der Bedingungen für den Umstand, daſs die Scheitel, welche einer und derselben Seitenebene zugehören, in einer und derselben Ebene liegen, gehet davon ab. n war die Zahl der Seiten in der Grundfläche; n', n'' . . . mögen die Zahlen der Seiten in den andern Flächen seyn. Drey Puncte bestimmen eine Ebene, also sind die Ueberschüſse der Zahlen n', n'' . . . über 3, die Zahlen der Bedingungen für den Umstand, daſs immer mehrere Scheitel in einer und derselben Ebene der Seitenfläche liegen, welcher sie angehören; die ganze Zahl dieser Bedingungen ist also $(n' - 3) + (n'' - 3) + (n''' - 3)$. . . Die Gliederzahl dieser Reihe ist $H - 1$, und $n + n' + n''$. . . ist $= 2B$; also ist die Summe der Reihe $= 2A - n - 3(H - 1)$. Zieht man von dieser Summe $3S - n - 3$ ab, so bleibt $3S - 2A + 3H - 6$, oder weil $S + H = A + 2$ ist, A. *Also ist die Zahl der Stücke welche nothwendig sind, um ein Polyëder von allen andern der nämlichen Art zu unterscheiden, gleich der Zahl seiner Kanten.*

Die gegebenen Bestimmungsstücke können indessen aus den Linien und Winkeln welche das Polyëder particularisiren, nicht willkürlich genommen werden; denn ob-

gleich man so viel Gleichungen als unbekannte Gröſsen haben würde, so könnte es doch kommen, daſs gewisse Verhältnisse zwischen den bekannten Gröſsen die Aufgabe unbestimmt machen. So könnte es, dem eben Gefundenen zufolge, scheinen, daſs die Kanten eines Polyëders zur Bestimmung desselben allein zureichen. Gleichwohl giebt es Fälle, wo solches nicht der Fall ist. Denn es sey z. B. ein beliebiges, nicht dreyseitiges Prisma gegeben, so kann man mit den nämlichen und gleichmäſsig liegenden Kanten unendlich viele andere Prismen beschreiben. Denn so bald die Grundfläche mehr als drey Seiten hat, so kann man, während die Seiten bleiben, die Winkel verwechseln und dadurch der Grundfläche unzählige verschiedene Gestalten geben. Man kann auch die Lage der Längenkanten des Prisma, in Beziehung auf die Grundfläche, verändern, oder beide Veränderungen mit einander verbinden; so entsteht immer ein anders Prisma mit den nämlichen Kanten, woraus folgt, daſs die Kanten allein zur Bestimmung eines Körpers nicht hinreichen.

Die zur Bestimmung eines Polyëders nöthigen Stücke sind diejenigen, welche nichts unbestimmt lassen, und welche nur eine Auflösung geben. So wird z. B. die Grundfläche, unter den verschiedenen möglichen (Fig. 281.) Bestimmungsarten, dadurch gegeben, daſs man die Seite AB mit den anliegenden Winkeln BAC und ABC für den Punct C, mit den Winkeln BAD und ABD für den Punct D, u. s. w. kennt. Nun sey M ein Punct auſser der Ebene der Grundfläche, dessen Lage bestimmt werden soll, so wird die Bestimmung dadurch erfolgen, daſs man, wenn man sich die Pyramide MABC, oder blos die Ebene MAB vorstellt, die Winkel MAB und ABM, und die Neigung der Ebene MAB gegen die Grundfläche ABC vorschreibt. Ist die Lage jedes Scheitels des Polyëders auſser der Ebene der Grundfläche durch drey solche Bestimmungsstücke gegeben, so ist

klar, dafs das Polyëder unbedingt und ohne Wahl, in dem Maafse fest steht, dafs zwey mit den nämlichen Stücken construirte Polyëder nothwendig in einander fallen müssen. Sie würden inzwischen nur symmetrisch seyn, wenn man sie an verschiedene Seiten der Grundfläche legte.

Nicht immer sind drey Stücke zur Bestimmung eines Scheitels des Polyëders nothwendig; denn wenn der Punct M in einer Ebene liegen soll die schon bestimmt ist, und deren Durchschnitt mit der Grundfläche, FG seyn mag, so ist es hinreichend, wenn man, nachdem FG willkürlich angenommen worden, die Winkel MFG und MGF kennt; also ist ein Bestimmungsstück weniger nöthig. Soll der Punct M in zwey schon bestimmten Ebenen zugleich liegen, das heifst, in ihrem Durchschnitte MK, welcher die Ebene ABC in K schneiden mag, so kennt man schon die Seite AK, den Winkel AKM, und die Neigung der Ebene AKM gegen die Grundfläche. Zum neuen Bestimmungsstücke ist also der Winkel MAK zureichend. So reducirt sich die Zahl der zur Bestimmung eines Polyëders unumgänglich nöthigen Stücke allemal auf A.

Die Seite AB und eine Zahl A — 1 von Winkeln bestimmen ein Polyëder; eine andere willkürliche Seite und die nämlichen Winkel bestimmen ein ähnliches Polyëder. Daraus folgt, dafs die Zahl der für die Aehnlichkeit zweyer gleichartigen Polyëder nothwendigen Bedingungen gleich ist der Zahl der Kanten weniger Eins.

Die Aufgabe würde viel einfacher seyn, wenn man nicht die Art des Polyëders, sondern blos die Zahl seiner Körperwinkel S kennte. Dann bestimme man nämlich drey beliebige Scheitel vermittelst eines Dreyecks aus drey gegebenen Stücken. Dieses Dreyeck kann als Grundfläche des Polyëders angesehen werden. Die Zahl seiner Scheitel aufser dieser Grundfläche ist noch S — 3. Da nun die Bestimmung jedes Scheitels drey Stücke erfordert, so ist

klar, daſs die ganze Zahl der zur Bestimmung des Polyëders nothwendigen Stücke $3 + 3 (S - 3)$ oder $3S - 6$ ist.

Es sind also $3S - 7$ Bedingungen für die Aehnlichkeit zweyer Polyëder mit S Körperwinkeln nothwendig.

Neunte Anmerkung.

Ueber die regelmäſsigen Polyëder.

(Man sehe den Anhang zum siebenten Buche.)

Wir haben im zweyten Satze dieses Anhanges die Existenz der fünf regelmäſsigen Polyëder, das heiſst, die Möglichkeit, eine gewisse Zahl gleicher Ebenen zu einem in seiner ganzen Ausdehnung gleichförmigen Körper zu verbinden, bewiesen. Gewöhnlich setzt man entweder die Verbindung voraus, ohne ihre Möglichkeit zu zeigen, oder man beweiset sie wie Euclides, durch verwickelte und schwer verständliche Figuren.

Die Aufgaben, die Neigung zweyer an einander stoſsenden Seitenflächen eines regelmäſsigen Polyëders, und die Halbmesser der in und um daſselbe beschriebenen Kugeln zu finden, erfodern nach der 3ten und 4ten Aufgabe des Anhanges nur ganz einfache Constructionen; es ist aber gut die Aufgabe auch trigonometrisch aufzulösen, welches neue Sätze giebt.

Fig. 222. Die drey ebenen Winkel um den Körperwinkel O, sollen a, b, c heiſsen. Es werde die Neigung der Ebenen verlangt, in welchen a und b liegen, so beschreibe man aus dem Mittelpuncte O das Kugeldreyeck ABC, in welchem also die drey Seiten $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ gegeben sind. Der Winkel C zwischen den Seiten a und b wird gesucht. Nun ist nach einer bekannten trigonometrischen Formel $\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}$. Diese Formel auf die fünf regelmäſsigen Polyëder angewandt, giebt die

Neigung je zweyer an einander stoſsender Ebenen dieser Körper.

Fig. 243. *Im Tetraëder* sind die drey ebenen Winkel welche den Körperwinkel S bilden, Winkel gleichseitiger Dreyecke. Es sey also der halbe Umfang, oder der zu zwey rechten Winkeln gehörige Bogen $= \pi$, so ist $a = b = c = \frac{1}{3}\pi$, also ist $\cos C = \frac{\cos a - \cos a^2}{\sin a^2} = \frac{\cos a(1 - \cos a)}{1 - \cos a^2} = \frac{\cos a}{1 + \cos a}$. Da nun $\cos \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$, so ist $\cos C = \frac{1}{3}$.

Fig. 244. *Im Hexaëder oder Würfel* sind die drey ebenen Winkel, welche den Körperwinkel A bilden, rechte; also ist $a = b = c \frac{1}{2} = \pi$ und $\cos a = 0$; also $\cos C = 0$. Folglich ist der Winkel zwischen zwey aneinanderstoſsenden Seitenebenen ein rechter.

Fig. 245. *Im Octaëder* ist, wenn man $a = \frac{1}{3}\pi$ macht, $b = DAT = \frac{1}{3}\pi$, $c = TAS = \frac{1}{2}\pi$, also $\cos C = \frac{\cos \frac{1}{3}\pi - \cos \frac{1}{2}\pi^2}{\sin \frac{1}{3}\pi^2}$ Da nun $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$, $\cos \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$, $\sin \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, so ist $\cos C = -\frac{1}{3}$; woraus man sieht, daſs die Neigung der Seitenflächen des Octaëders das Supplement der Neigung der Seitenflächen des Tetraëders ist.

Fig. 246. *Im Dodecaëder* wird ein Körperwinkel von drey gleichen ebenen Winkeln gebildet, deren jeder der Winkel eines regelmäſsigen Fünfecks ist. Macht man also $a = b = c = \frac{3}{5}\pi$, so ist $\cos C = \frac{\cos a}{1 + \cos \alpha}$. Aber $\cos \frac{3}{5}\pi = -\sin \frac{1}{10}\pi = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$, also $\cos C = \frac{1 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin C = \frac{2}{\sqrt{5}}$ und $\tang C = -2$.

Fig. 247. *Im Icosaëder* ist $c = C'B'D' = \frac{3}{5}\pi$, $a = b = C'B'A' = \frac{1}{3}\pi$. Dieses giebt $\cos C = \frac{\cos \frac{3}{5}\pi - \cos \frac{1}{3}\pi^2}{\sin \frac{1}{3}\pi^2}$ $= \frac{\frac{1}{4}(1 - \sqrt{5}) - \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{-\sqrt{5}}{3}$, also $\sin C = \frac{2}{3}$.

So lassen sich die Winkel zwischen den Seitenebenen der fünf regulairen Körper ausdrücken. Man kann diese Ausdrücke auch in eine einzige Formel zusammenfassen.

Fig. 248. Es sey nämlich n die Zahl der Seiten jeder Fläche, m die Zahl der ebenen Winkel, welche in einen Körperwinkel zusammenstoſsen. Beschreibt man aus dem Mittelpuncte O, mit einem Halbmesser 1, eine Kugelfläche, welche die Linien OA, OC, OD in p, q, r schneidet, so entsteht ein Kugeldreyeck pqr, in welchem man den rechten Winkel r, den Winkel $p = \frac{\pi}{m}$, und den Winkel $q = \frac{\pi}{n}$ kennt. Man erhält also nach bekannten Formeln, $\cos qr = \frac{\cos p}{\sin q}$. Aber $\cos qr = \cos COD = \sin CDO = \sin \frac{1}{2} C$, wo C den Winkel CDE bedeutet; also ist $\sin \frac{1}{2} C = \frac{\cos \frac{\pi}{m}}{\cos \frac{\pi}{n}}$. Diese allgemeine Formel, auf die fünf Polyëder angewendet, giebt für $\cos C$ oder $1 - 2 \sin \frac{1}{2} C^2$, die nämlichen Werthe, welche oben auf einem andern Wege gefunden wurden. Man muſs zu dem Ende die Werthe von m und n für jeden besondern Fall substituiren, nämlich

	Tetraëder	*Hexaëder*	*Octaëder*	*Dodecaëder*	*Icosaëder*
m =	3	3	4	3	5
n =	3	4	3	5	3

Das nämliche Kugeldreyeck pqr, für welches die Neigung zweyer zusammenstoſsenden Flächen gefunden worden, giebt $\cos pq = \cot p \cot q$, oder $\frac{CO}{OA} \quad \cot \frac{\pi}{m} . \cot \frac{\pi}{n}$. Nennt man also den Halbmesser der um das Polyëder beschriebene Kugel R, und den Halbmesser der in daſselbe beschriebenen Kugel r, so ist $\frac{R}{r} = \tang \frac{\pi}{m} \tang \frac{\pi}{n}$. Nennt man die Seite $AB = a$, so ist $CA = \frac{\frac{1}{2} a}{\sin \frac{\pi}{n}}$ und folglich $R^2 \quad r^2 + \frac{\frac{1}{4} a^2}{\sin \frac{\pi}{n}^2}$.

Diese beiden Gleichungen geben für jedes Polyëder die Werthe der Halbmesser R und r der um- und eingeschriebenen Kugel. Auch ist, wenn man C bekannt annimmt, $r = \frac{1}{2} a \cot \frac{\pi}{n} . \tang \frac{1}{2} C$ und $R = \frac{1}{2} a \tang \frac{\pi}{m} \tang \frac{1}{2} C$.

Im Dodecaëder und Icosaëder hat das Verhältniſs $\frac{R}{r}$ den nämlichen Werth $\tang \frac{1}{3} \pi . \tang \frac{1}{5} \pi$. Also ist R das Nämliche in beiden Körpern, wenn es r ist, das heiſst: wenn beide Körper in einer und derselben Kugel beschrieben sind, so liegen sie auch um eine und dieselbe Kugel, und umgekehrt. Dieselbe Eigenschaft haben das Hexaëder und Octaëder, weil der Werth von $\frac{R}{r}$ für beide $\tang \frac{1}{3} \pi . \tang \frac{1}{4} \pi$ ist.

Noch ist zu bemerken, daſs die regulären Polyëder nicht die einzigen Körper sind, welche von gleichen und regelmäſsigen Vielecken umschlossen werden; denn legt man an eine gemeinschaftliche Ebene zwey gleiche und regelmäſsige Tetraëder, so entsteht ein Körper der von sechs gleichen und gleichseitigen Dreyecken umschlossen ist. So könnte man auch einen Körper beschreiben, der von zehn gleichen und gleichseitigen Dreyecken umschlossen ist; aber die regulären Polyëder sind die einzigen, in welchen auch die Körperwinkel unter einander gleich sind.

Zehnte Anmerkung.

Ueber den Flächeninhalt des Kugeldreyecks.

Der Halbmesser der Kugel sey 1, der halbe Umfang eines gröſsten Kreises π; a, b, c sollen die drey Seiten des Kugeldreyecks, A, B, C die Bogen gröſster Kreise seyn, welche die gegenüberliegenden Winkel messen. $A + B + C - \pi$ sey gleich S; so ist, dem zufolge was im Texte bewiesen worden (7s B. 23r S.) die Fläche des Kugeldreyecks gleich dem Producte des Bogens S, in den Halbmesser. Diese Flä-

che ist also S selbst. Nun ist nach den Neperschen Analogieen

$$\operatorname{tang}\frac{A+B}{2} : \cot\frac{C}{2} = \cos\frac{a-b}{2} : \cos\frac{a+b}{2}.$$

Nimmt man hieraus den Werth von $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B)$, so findet man leicht den Werth von $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B+C) = -\cot\frac{1}{2}S$, nämlich:

$$\cot\frac{1}{2}S = \frac{\cot\frac{1}{2}a\ \cot\frac{1}{2}b + \cos C}{\sin C}.$$

Diese einfache Formel dient zur Berechnung des Flächeninhalts des Dreyecks, wenn man zwey Seiten a und b und den eingeschlossenen Winkel C kennt. Aus derselben lassen sich mehrere Folgerungen ziehen.

Erstlich. Wenn sich der Winkel C und das Product $\cot\frac{1}{2}a\ \cot\frac{1}{2}b$ nicht verändern, so bleibt die durch S ausgedrückte Fläche des Dreyecks (Fig. 282) auch dieselbe. Also sind die beiden Dreyecke CAB und CDE gleich groſs, wenn $\operatorname{tang}\frac{1}{2}CA : \operatorname{tang}\frac{1}{2}CD = \operatorname{tang}\frac{1}{2}CE : \operatorname{tang}\frac{1}{2}CB$ ist, das heiſst, wenn die Tangenten von den Hälften der den gleichen Winkel einschliessenden Seiten umgekehrt proportional sind.

Zweytens. Um über eine gegebene Seite CD, mit dem nämlichen Winkel C, ein dem gegebenen Dreyecke CAB an Inhalt gleiches Dreyeck CDE zu beschreiben, muſs CE durch die Proportion

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}CD : \operatorname{tang}\frac{1}{2}CA = \operatorname{tang}\frac{1}{2}CB : \operatorname{tang}\frac{1}{2}CE$$

bestimmt werden.

Drittens. Um mit einem Winkel, dessen Scheitel C ist, ein gleichschenkliges Dreyeck DCE mit CAB von gleicher Gröſse zu beschreiben, muſs $\operatorname{tang}\frac{1}{2}CD$ oder $\operatorname{tang}\frac{1}{2}CE$ die mittlere Proportionale zwischen $\operatorname{tang}\frac{1}{2}CA$ und $\operatorname{tang}\frac{1}{2}CB$ seyn.

Viertens. Die nämliche Formel $\cot\frac{1}{2}S = \frac{\cot\frac{1}{2}a\ \cot\frac{1}{2}b\ \cos C}{\sin C}$ kann zu einem sehr einfachen Beweise des 26sten Satzes im 7ten Buche dienen, welchem zufolge von allen, mit zwey

gegebenen Seiten a und b beschriebenen Kugeldreyecken, das gröſste dasjenige ist, in welchem der Winkel C zwischen den gegebenen Seiten, der Summe der andern beiden Winkel A und B gleich ist.

Fig. 283. Denn man beschreibe mit dem Halbmesser OZ $= 1$, den halben Umfang VMZ, und mache den Bogen ZX $= C$. Auf der andern Seite des Mittelpuncts nehme man OP $= \cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b$, ziehe PX, und auf PZ den Bogen XY senkrecht.

In dem rechtwinkligen Dreyecke PXY ist $\cot P = \frac{PY}{XY} = \frac{\cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b + \cos C}{\sin C}$, also ist $P = \frac{1}{2} S$; folglich ist die Fläche S ein Maximum, wenn es der Winkel P ist. Offenbar aber ist der Winkel MPO, wenn man an den Umfang die Tangente PM zieht, der gröſste unter den Winkeln P. Alsdann ist $MPO = MOZ - \frac{1}{2}\pi$; folglich ist das mit zwey gegebenen Seiten beschriebene Kugeldreyeck ein Maximum, wenn $\frac{1}{2} S = C - \frac{1}{2}\pi$ oder $C = A + B$ ist, welches mit dem vorhin erwähnten Satze übereinstimmt.

Man sieht zugleich daſs es kein Maximun geben würde, wenn der Punct P innerhalb des Kreises läge, das heiſst, wenn $\cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b < 1$ wäre. Aus dieser Bedingung folgt $\cot \frac{1}{2} a < \tang \frac{1}{2} \beta . \tang (\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2} a) < \tang \frac{1}{2} b$, $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2} a < \frac{1}{2} b$ und $\pi < a + b$, welches mit der Anmerkung zu obigem Satze übereinstimmt.

Erste Aufgabe.

Den Flächeninhalt eines Kugeldreyecks aus seinen drey Seiten zu finden.

Man substituire die in a, b, c ausgedrückten Werthe von sin C und cos C in die Formel

$$\cot \tfrac{1}{2} S = \frac{\cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b + \cos C}{\sin C}.$$

Es ist $\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}$ und $\cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b =$

$\frac{1+\cos a}{\sin a} \cdot \frac{1+\cos b}{\sin b}$, woraus folgt

$$\cos C + \cot \tfrac{1}{2} a \cot \tfrac{1}{2} b = \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{\sin a \sin b}.$$

Ferner giebt der Werth von cos C,

$$1+\cos C = \frac{\cos c - \cos(a+b)}{\sin a \sin b} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b+c) \cdot \sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin a \sin b}$$

$$1-\cos C = \frac{\cos(a-b) - \cos c}{\sin a \sin b} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin a \sin b}.$$

Multiplicirt man diese beiden Gröſsen in einander und zieht aus dem Producte die Quadratwurzel, so erhält man

$$\sin C = \frac{2\sqrt{[\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)]}}{\sin a \sin b},$$

also

$$\cot\tfrac{1}{2}S = \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{2\sqrt{[\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)]}}.$$

Diese Formel enthält das Resultat. Daſselbe kann aber noch einfacher ausgedrückt werden.

Aus der anfänglichen Formel $\cot\frac{1}{2}S = \frac{\cot\frac{1}{2}a \cot\frac{1}{2}b + \cos C}{\sin C}$ folgt nämlich $1+\cot\frac{1}{2}S^2$, oder

$$\frac{1}{\sin\frac{1}{2}S^2} = \frac{\cot\frac{1}{2}a^2 \cot\frac{1}{2}b^2 + 2\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b\cos C + 1}{\sin C^2}.$$

Nun giebt der Werth von cos C, $2\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{2\sin\frac{1}{2}a^2 \sin\frac{1}{2}b^2}$. Setzt man in den Zähler statt cos a, cos b, cos c deren Werthe $1-2\sin\frac{1}{2}a^2$, $1-2\sin\frac{1}{2}b^2$, $1-2\sin\frac{1}{2}c^2$, und reducirt, so kommt

$$2\cot\tfrac{1}{2}a\cot\tfrac{1}{2}b\cos C = \frac{\sin\frac{1}{2}a^2 + \sin\frac{1}{2}b^2 - \sin\frac{1}{2}c^2}{\sin\frac{1}{2}a^2 \sin\frac{1}{2}b^2} - 2.$$

Es ist aber auch $\cot\frac{1}{2}a^2\cot\frac{1}{2}b^2 = \frac{1-\sin\frac{1}{2}a^2}{\sin\frac{1}{2}a^2} \cdot \frac{1-\sin\frac{1}{2}b^2}{\sin\frac{1}{2}b^2} = \frac{1-\sin\frac{1}{2}a^2\sin\frac{1}{2}b^2}{\sin\frac{1}{2}a^2\sin\frac{1}{2}b^2} + 1$. Substituirt man diese Werthe, so erhält man $\frac{1}{\sin\frac{1}{2}S^2} = \frac{1-\sin\frac{1}{2}c^2}{\sin\frac{1}{2}a^2\sin\frac{1}{2}b^2\sin C^2}$, welches $\sin\frac{1}{2}S = \frac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin C}{\cos\frac{1}{2}C}$ giebt, und wenn man hierin den Werth von sin C setzt

$$\sin \tfrac{1}{2} S = \frac{\sqrt{[\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)]}}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},$$

welche Formel für Logarithmen bequem ist.

Multiplicirt man sie mit dem Werthe von $\cot \frac{1}{2} C$, so erhält man

$$\cos \tfrac{1}{2} S = \frac{1+\cos a+\cos b+\cos a}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}a^2+\cos\frac{1}{2}b^2+\cos\frac{1}{2}c^2-1}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},$$

welcher Ausdruck den Vortheil hat, daſs er nur aus rationalen Gröſsen besteht.

Es folgt aus demselben auch $\frac{1-\cos\frac{1}{2}S}{\sin\frac{1}{2}S}$, oder

$$\tan \tfrac{1}{4} S = \frac{1-\cos\frac{1}{2}a^2-\cos\frac{1}{2}b^2-\cos\frac{1}{2}c^2+2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\sqrt{[\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)]}}$$

Der Zähler dieses Ausdrucks kann in Factoren zerlegt werden, wie es mit einer ähnlichen Gröſse in der 5ten Anmerkung zur 4ten Aufgabe geschehen ist. Man erhält alsdann

$$\tan \tfrac{1}{4} S = \frac{4\sin\frac{1}{4}(a+b+c)\sin\frac{1}{4}(a+b-c)\sin\frac{1}{4}(a-b+c)\sin\frac{1}{4}(b+c-a)}{\sqrt{[\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)]}}.$$

Da aber $\frac{\sin\frac{1}{2}p}{\sqrt{\sin p}} = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}p^2}{2\sin\frac{1}{2}p\cos\frac{1}{2}p}} = \sqrt{(\frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}p)}$, so ist

$$\tan \tfrac{1}{4} S = \sqrt{[\tan\tfrac{1}{4}(a+b+c)\tan\tfrac{1}{4}(a+b-c)\tan\tfrac{1}{4}(a-b+c)\tan\tfrac{1}{4}(b+c-a)]}.$$

Diese elegante Formel verdankt man Simon Lhuillier.

Zweyte Aufgabe.

Fig. 284. *Aus den drey Seiten eines Kugeldreyecks $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ die Lage des Pols I vom umschriebenen Kreise zu finden.*

Es sey der Winkel $ACI = x$, der Bogen $AI = BI = CI = \varphi$, so ist in den Dreyecken CAI und CBI, nach bekannten Formeln,

$$\cos x = \frac{\cos\varphi - \cos b\cos\varphi}{\sin b\sin\varphi} = \frac{1-\cos b}{\sin b}\cot\varphi = \frac{\sin b}{1+\cos b}\cot\varphi,$$

$\cos(C-x) = \frac{1-\cos a}{\sin a}\cot\varphi$, also $\frac{\cos(C-x)}{\cos x}$, oder $\cos C + \sin C \tan x = \frac{(1+\cos b)(1-\cos a)}{\sin a\sin b}$. Setzt man in diese Glei-

chung die in a, b, c ausgedrückten Werthe von cos C und sin C, und der Kürze wegen

$$M = \sqrt{(1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2 \cos a \cos b \cos c)}$$

so erhält man, $\text{tang}\, x = \frac{1 + \cos b - \cos c - \cos a}{M}$, welche Formel den Winkel ACI giebt. Weil die Dreyecke ACI, ABI und BCI gleichschenklig sind, so ist $ACI = \frac{1}{2}(C + A - B)$; eben so $BCI = \frac{1}{2}(B + C - A)$, $BAI = \frac{1}{2}(A + B - C)$. Hieraus folgen nachstehende merkwürdige Ausdrücke:

$$\text{tang}\, \tfrac{1}{2}(A + C - B) = \frac{1 + \cos b - \cos a - \cos c}{M},$$

$$\text{tang}\, \tfrac{1}{2}(B + C - A) = \frac{1 + \cos a - \cos b - \cos c}{M},$$

$$\text{tang}\, \tfrac{1}{2}(A + B - C) = \frac{1 + \cos c - \cos a - \cos b}{M},$$

zu welchen noch der von $\cot \frac{1}{2} S$ kommt, welcher sich auf folgende Gestalt bringen läfst:

$$\text{tang}\, \tfrac{1}{2}(A + B + C) = \frac{-1 - \cos a - \cos b - \cos c}{M}.$$

Der oben gefundene Werth von tang x giebt $1 + \text{tang}\, x^2$, oder $\frac{1}{\cos x^2} = \frac{2(1 + \cos b)(1 - \cos c)(1 - \cos a)}{M^2} = \frac{16 \cos \frac{1}{2}b^2 \sin \frac{1}{2}c^2 \sin \frac{1}{2}a^2}{M^2}$, also $\frac{1}{\cos x} = \frac{4 \cos \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} a}{M}$. Nun folgt aus der Gleichung $\cos x = \frac{1 - \cos b}{\sin b} . \cot \varphi = \text{tang}\, \frac{1}{2} b \cot \varphi$ auch $\text{tang}\, \varphi = \frac{\text{tang}\, \frac{1}{2} b}{\cos x}$, also ist $\text{tang}\, \varphi = \frac{4 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c}{M}$, oder

$$\text{tang}\, \varphi = \frac{2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c}{\sqrt{[\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}(a+b-c) \sin \frac{1}{2}(a-b+c) \sin \frac{1}{2}(b+c-a)]}}.$$

Dritte Aufgabe.

In der Kugelfläche die Linie zu finden in welcher die Scheitel aller Dreyecke von gleicher Grundlinie und gleichem Inhalte liegen.

Fig. 285. ABC sey eines der Kugeldreyecke, deren gemeinschaftliche Grundlinie AB = c, und deren gegebene

Fläche $A + B + C - \pi = S$ ist. IPK sey ein unbestimmtes Perpendikel auf die Mitte der Grundlinie AB. Macht man IP einem Quadranten gleich, so ist P der Pol des Bogens AB, und der Bogen PCD durch die Puncte P, C, ist auf AB senkrecht. Es sey $ID = p$, $CD = q$, so geben die rechtwinkligen Dreyecke ACD und BCD, in welchen $AC = b$, $BC = a$, $AD = p + \frac{1}{2} c$, $BD = p - \frac{1}{2} c$ ist, $\cos a = \cos q \cos (p - \frac{1}{2} c)$, $\cos b = \cos q \cos (p + \frac{1}{2} c)$. Oben aber wurde gefunden

$$\cot \tfrac{1}{2} S = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{\sin a \sin b \sin C}.$$

Setzt man in diesen Ausdruck die Werthe von $\cos a + \cos b = 2 \cos q \cos p \cos \frac{1}{2} c$, $1 + \cos c = 2 \cos \frac{1}{2} c^2$ und $\sin b \sin C = \sin c \sin B = 2 \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c \sin B$, so erhält man

$$\cot \tfrac{1}{2} S = \frac{\cos \frac{1}{2} c + \cos p \cos q}{\sin a \sin \frac{1}{2} c \sin B}.$$

In dem Dreyecke BCD ist auch $\sin a \sin B = \sin q$, also ist $\cot \frac{1}{2} S = \frac{\cos \frac{1}{2} c + \cos p \cos q}{\sin \frac{1}{2} c \sin q}$, oder $\cos p \cos q = \cot \frac{1}{2} S \sin \frac{1}{2} c \sin q - \cos \frac{1}{2} c$, welches Verhältniſs zwischen p und q die Linie bestimmt, in welcher alle Puncte C liegen.

Man verlängere IP um $PK = x$, ziehe KC, und nenne $KC = y$, so findet sich in dem Dreyecke PKC, in welchem $PC = \frac{1}{2} \pi - q$ und der Winkel $KPC = \pi - p$ ist, die Seite KC aus der Formel $\cos KC = \cos KPC \sin PK \sin PC + \cos PK \cos PC$, oder

$$\cos y = \sin q \cos x - \sin x \cos q \cos p.$$

Substituirt man in dieselbe für $\cos q \cos p$ seinen Werth $\cot \frac{1}{2} S \sin \frac{1}{2} c \sin q - \cos \frac{1}{2} c$, so erhält man

$$\cos y = \sin x \cos \tfrac{1}{2} c + \sin q (\cos x - \sin x \cot \tfrac{1}{2} S \sin \tfrac{1}{2} c).$$

Daraus folgt, daſs, wenn man $\cos x - \sin x \cot \frac{1}{2} S \sin \frac{1}{2} c = 0$ oder $\cot x = \cot \frac{1}{2} S \sin \frac{1}{2} c$ setzt, $\cos y = \sin x \cos \frac{1}{2} c$, und folglich der Werth von y constant ist.

Nimmt man also, nachdem IP senkrecht auf die Mitte der Grundlinie AB gezogen worden, jenseits des Pols den

Theil PK, so daſs cot PK $=$ cot $\frac{1}{2}$ S sin $\frac{1}{2}$ c ist, so liegen die Scheitel aller Dreyecke von gleicher Grundlinie c und gleichem Inhalte S in dem kleinen Kreise der aus dem Puncte K als Pol, mit einem Halbmesser KC beschrieben ist, für welchen cos KC $=$ sin PK cos $\frac{1}{2}$ C.

Dieser schöne Lehrsatz ist von Lexell. (Man sehe den fünften Band des ersten Theils der nova acta petropolitana).

Eilfte Anmerkung.

Ueber den dritten Satz im achten Buche.

Dieser Satz kann noch strenger bewiesen werden, wenn man ihn auf die einleitenden Lehnsätze zurück führt, wie folgt.

Fig. 252. Ich behaupte zuerst, daſs die von den Kanten AF und BG und den Bogen AuB und FxG begrenzte convexe Fläche nicht kleiner seyn kann als das Rechteck ABGF, welches der correspondirende Theil der Fläche des eingeschriebenen Prisma ist.

Denn die convexe Fläche sey $=$ S, und wenn es möglich ist, das Rechteck ABGF, oder AB $\times$ AF $=$ S $+$ M, wo M irgend eine positive Gröſse bedeutet.

Man verlängere die Höhe AF des Prisma und des Cylinders bis zu einer Länge AF′, die n mal AF ist, wenn n irgend eine ganze Zahl bedeutet. Man verlängere zugleich den Cylinder und das Prisma, so ist klar, daſs die convexe Oberfläche S′ zwischen den Kanten AF′ und BG′, n mal die Fläche S enthalten wird, so daſs S′ $=$ n S, und weil n $\times$ AF $=$ AF′ ist, AB $\times$ AF′ $=$ n S $+$ n M $=$ S′ $+$ n M. Da nun n eine willkürliche ganze Zahl, und M eine gegebene Fläche ist, so kann man n so annehmen, daſs nM gröſser als der doppelte Abschnitt AuB ist, weil zu dem Ende nur $n > \frac{2AuB}{M}$ seyn darf; also wäre alsdann das Rechteck AB $\times$ AF′, oder die Ebene ABG′F′, gröſser als die sie um-

gebende Fläche, welche aus der convexen S′ und den beiden gleichen Kreisabschnitten AuB und F′x′G′ besteht. Die umgebende Fläche ist aber im Gegentheil gröſser als die Ebene, dem ersten Lehrsatze zufolge; also kann erstlich nicht S < ABGF seyn.

Ich behaupte zweytens, daſs die convexe Fläche S nicht dem Rechtecke ABGF gleich seyn kann. Denn man setze, die krumme Fläche AMK sey, wenn man AE = AB annimmt, dem Rechtecke AFKE gleich, so ziehe man durch einen beliebigen Punct M des Bogens AME, die Sehnen AM, ME und MN auf die Ebene der Grundfläche senkrecht. Die drey Rechtecke AMNF, MEKN und AEKF verhalten sich, weil sie gleiche Höhe haben, wie ihre Grundlinien AM, ME und AE. Es ist aber AM + ME > AE, also ist die Summe der Rechtecke AMNF und MEKN gröſser als das Rechteck AFKE. Dieses aber sollte, der Voraussetzung nach, der convexen Fläche AMK, welche aus den beiden Flächen AN und MK besteht, gleich seyn. Also wäre die Summe der Rechtecke AMNF und MEKN gröſser als die Summe der correspondirenden convexen Flächen AN und MK. Daher müſste wenigstens eines von den Rechtecken AMNF und MEKN gröſser seyn als die zugehörige convexe Fläche. Dieses aber ist dem vorhin Bewiesenen entgegen. Also kann zweytens die convexe Fläche S nicht der Fläche des correspondirenden Rechtecks ABGF gleich seyn.

Mithin ist nothwendig S > ABGF, und folglich die convexe Oberfläche des Cylinders gröſser als die des eingeschriebenen Prisma.

Aus ganz gleichen Gründen läſst sich beweisen, daſs die convexe Oberfläche des Cylinders kleiner ist als die Oberfläche jedes umschriebenen Prisma *).

*) Dieser und ähnliche Sätze lassen sich auch noch anders beweisen. Ich werde darüber einige Bemerkungen im 2ten

Zwölfte Anmerkung.

Von der Gleichheit und Aehnlichkeit der Polyëder.

Die neunte und zehnte Erklärung im Eingange zum eilften Buche des Euclides, sind wie folgt, ausgedrückt.

9. *Aehnliche Körper sind, die von gleich vielen ähnlichen Ebenen begrenzt werden.*

10. *Gleiche und ähnliche Körper sind, die von gleich vielen, gleichen und ähnlichen Ebenen begrenzt werden.*

Da der Gegenstand dieser Erklärungen einer der schwierigsten der Elemente ist, so wollen wir ihn etwas ausführlicher untersuchen, und dabey zugleich die von Robert Simson in seiner Ausgabe der Elemente S. 388 u. f. über diesen Gegenstand gemachten Bemerkungen in Betrachtung ziehen.

Zuerst ist mit Robert Simson zu erinnern, daſs die 10te Erklärung eigentlich keine Erklärung, sondern vielmehr ein Lehrsatz ist, der bewiesen werden muſs; denn es ist nicht von selbst klar, daſs zwey Körper blos deshalb nothwendig gleich sind, weil sie gleiche Seitenflächen haben. Der Satz muſs entweder durch Ineinanderlegen, oder wie es sonst angeht, bewiesen werden. Ferner sind die Mängel des zehnten Satzes auch dem neunten eigen. Denn so lange der zehnte Satz nicht bewiesen ist, kann man annehmen, daſs zwey ungleiche und unähnliche Körper mit gleichen Seitenflächen möglich sind. Dann aber würde ein dritter Körper, dessen Seitenflächen denen der beiden ersten Körper ähnlich sind, der neunten Erklärung zufolge, beiden zugleich, und folglich zweyen Körpern zugleich, von verschiedener Gestalt, ähnlich seyn, welches ein Widerspruch, oder wenigstens

Bande meiner Sammlung mathematischer Aufsätze mittheilen. A. d. Uebers.

nicht dem Begriffe gemäſs ist, welchen man gewöhnlich mit dem Worte *ähnlich* verbindet.

Mehrere Sätze im 11ten und 12ten Buche des Euclides sind auf die 9te und 10te Erklärung gegründet, unter andern der 28ste Satz des 11ten Buchs, von welchem die Ausmessung der Prismen und Pyramiden abhängt. Also scheint es, daſs hier die Elemente des Euclides Unbewiesenes enthalten *). Allein ein nicht zu übergehender Umstand vermindert diesen Verdacht.

In den Figuren nämlich, aus welchen Euclid die Gleichheit oder Aehnlichkeit beweiset, indem er sich auf seine 9te und 10te Erklärung stützt, werden die Körperwinkel niemals von mehr als drey ebenen zusammenstoſsenden Winkeln umschlossen. Liegen aber zwey Körperwinkel zwischen drey nämlichen ebenen Winkeln, so ist an mehrern Stellen des Euclides klar genug bewiesen, daſs diese Körperwinkel gleich sind. Ferner sind in zwey Polyëdern, wenn sie gleiche oder ähnliche Seitenflächen haben, die ähnlich liegenden Körperwinkel aus einer gleichen Zahl von ebenen, gleichen Winkeln zusammengesetzt. So lange also nicht mehr als drey ebene Winkel um einen Körperwinkel liegen, sind nothwendig die Körperwinkel gleich. Sind aber nun die ähnlich liegenden Seitenflächen und Körperwinkel gleich, so ist die Gleichheit der Körper unbezweifelt, denn sie können alsdann entweder in einander gelegt werden, oder sind wenigstens zu einander symmetrisch. Man sieht also, daſs die 9te und 10te Erklärung in dem Falle dreyfacher Winkel, welcher allein beim Euclid vorkommt, genau und zu-

*) Auch unter den Grundsätzen des euclidischen ersten Buchs ist der eilfte, auf welchem die Theorie der Parallelen beruht, eigentlich ein Satz der des Beweises bedarf. Also sind wirklich alle die Sätze die von der Theorie der Parallelen abhängen, auf die gewöhnliche Art, nicht strenge bewiesen. A. d. Uebers.

läſslich sind. Der Vorwurf der Ungenauigkeit, welchen man dem Euclid oder seinen Commentatoren machen zu können schien, ist also nicht so bedeutend, und beschränkt sich nur auf übergangene Bedingungen und Erläuterungen.

Nun ist ferner zu untersuchen, ob die zehnte Erklärung des Euclid, welche bey dreyseitigen Körperwinkeln genau ist, allgemein Statt finde. Robert Simson versichert das Gegentheil und behauptet, man könne zwey ungleiche Körper mit gleich vielen und den nämlichen Ebenen umschliessen. Er bezieht sich bey seiner Behauptung auf ein Beyspiel, welches sich folgendergestalt allgemein ausdrükken läſst.

Man lege an ein Polyëder eine Pyramide so, daſs man eine Seitenfläche des Polyëders zur Grundfläche der Pyramide nimmt. Darauf nehme man denselben pyramidalischen Raum, statt ihn hinzuzusetzen, von dem gegebenen Körper hinweg, so daſs in dem Polyëder, eine der Pyramide gleiche Holung entsteht, so erhält man zwey Körper, die ganz von den nämlichen Seitenflächen umschlossen, die aber gleichwol von einander verschieden sind.

Es ist gar kein Zweifel da, daſs jene beiden Körper ungleich sind, aber man muſs wohl bemerken, daſs der eine von ihnen einspringende Winkel hat, und es ist mehr als wahrscheinlich, daſs Euclides die irregulären Körper welche Hölungen oder einspringende Körperwinkel haben, ausgeschlossen und sich auf convexe Polyëder beschränkt habe. Giebt man aber diese Einschränkung zu, ohne welche in der That andere Sätze des Euclides nicht richtig seyn würden, so beweiset Robert Simsons Beyspiel gegen die Erklärung oder den Lehrsatz des Euclides Nichts.

Wie dem aber auch sey, so folgt doch aus Allem, daſs die 9te und 10te Erklärung des Euclid nicht, so wie sie ist, beybehalten werden könne. Robert Simson läſst die Erklärung gleicher Körper weg (welche auch in der That eher

unter die Lehrsätze gehört) und erklärt *ähnliche Körper* für diejenigen, welche von einer gleichen Zahl von ähnlichen Ebenen umschlossen sind, und deren Körperwinkel die nämlichen sind. Diese Erklärung ist völlig richtig, aber sie hat das Ueble, daſs sie mehr Bedingungen enthält als nöthig sind. Lieſse man dagegen die Bedingung der gleichen Körperwinkel weg, so würde man auf die euclidische Erklärung zurückkommen, welche in sofern mangelhaft ist, daſs sie den Lehrsatz von der Gleichheit der Polyëder voraussetzt. Um hier alle Schwierigkeiten zu heben, hielten wir es für angemessen, die Erklärung der Aehnlichkeit der Körper in zwey Theile zu theilen. Wir gaben zuerst die Erklärung der Aehnlichkeit dreyseitiger Pyramiden, und dann erklärten wir diejenigen Körper für *ähnlich*, deren Grundflächen ähnlich sind, und deren ähnlich liegende Scheitel auſser den Grundflächen durch ähnliche dreyseitige Pyramiden bestimmt werden *).

Diese Erklärung erfordert für die Grundflächen, wenn man sie dreyseitig annimmt, zwey Bedingungen und für jeden Scheitel auſser den Grundflächen drey; so daſs, wenn S die Zahl der Körperwinkel der beiden Polyëder ist, die Aehnlichkeit derselben $2 + 3(S - 3)$ gleiche Winkel oder $3S - 7$ Bedingungen erfordert. Keine dieser Bedingungen ist überflüssig, oder in den andern schon mit begriffen. Denn es ist von zwey Polyëdern die Rede, für welche blos gegeben ist, daſs sie gleich viel Scheitel oder Körperwinkel haben sollen. Alsdann sind zur Aehnlichkeit dieser beiden Polyëder die $3S - 7$ Bedingungen unumgänglich, und ohne daſs eine einzige fehlen durfte, nothwendig; setzt man dagegen noch, daſs die beiden Polyëder

*) Diese Bestimmung der Scheitel ist nur nicht die einzige mögliche. A. d. Uebers.

gleichartig seyn sollen, das heifst, dafs sie gleich viel Seitenflächen, und dafs die Seitenflächen in beiden die nämlichen Seiten haben sollen, so enthält die zweyte Voraussetzung, in dem Falle, wenn die Seitenflächen mehr als drey Seiten haben, schon an sich selbst Bedingungen, und um eben so viel als ihrer sind, vermindert sich die Zahl 3 S — 7, so dafs, Statt 3 S — 7 Bedingungen, nur A — 1 nothwendig sind. Man sehe darüber die 8te Anmerkung. Hieraus erhellt die Ursache der Schwierigkeiten einer guten Erklärung ähnlicher Körper. Denn man kann dieselben auf zweyerley Weise, entweder als Körper von einerley Art, oder blos als Körper mit gleich viel Scheiteln betrachten. Nur im letztern Falle fällt die Schwierigkeit weg, und die 3 S — 7 Bedingungen, welche die Erklärung verlangt, müssen, wenn die Körper ähnlich seyn sollen, alle erfüllt werden. Man kann dann um so sicherer schliefsen, dafs die Körper auch von einerley Art sind. Da übrigens unsere Erklärung vollständig ist, so haben wir aus derselben die Erklärung Roberts Simsons als einen Lehrsatz abgeleitet.

Man sieht hieraus, dafs man in den Elementen den Lehrsatz von der Gleichheit der Polyëder übergehen kann. Da indessen dieser Lehrsatz an sich selbst interessant ist, so wird man vielleicht den Beweis desselben, welcher zur Vervollständigung der Theorie der Körper dient, hier gern sehen *).

*) Der Beweis den wir hier geben, ist bis auf einige Veränderungen der nämliche, welchen Cauchy kürzlich dem Institute vorgelegt hat, und auf welchen er durch einige Ideen in der ersten Ausgabe der gegenwärtigen Elemente S. 32, diesen Gegenstand betreffend, gekommen ist.

A. d. Verf.

Die zu untersuchende Frage besteht darin, ob sich, wenn man die Winkel verändert, unter welchen sich die Seiteneben eines gegebenen convexen Polyëders schneiden, mit den nämlichen Seitenebenen ein anderes convexes Polyëder beschreiben läfst, dessen Seitenebenen in derselben Ordnung auf einander folgen.

Wir bemerken zuerst, dafs, im Fall ein solches zweytes Polyëder möglich ist, dafselbe nicht zu dem gegebenen, symmetrisch seyn kann, weil die, um correspondirende Körperwinkel liegenden Seitenebenen, in symmetrischen Polyëdern, nach verschiedenen Ordnungen auf einander folgen; folglich kommt es hier auf die Untersuchung symmetrischer Polyëder nicht an.

Wir bemerken zweytens, dafs wenn das gegebene Polyëder einen oder mehrere dreyseitige Körperwinkel hat, diese Körperwinkel ihrer Natur nach unveränderlich sind, weil drey gegebene ebene Winkel zur Bestimmung der wechselseitigen Neigung der Ebenen hinreichen, in welchen sie sich, den Körperwinkel bildend, befinden. Man kann also in dem gegebenen Polyëder alle dreyseitige Pyramiden, welche von den dreyseitigen Körperwinkeln gebildet werden, weglassen *); und wenn das neue Polyëder, welches aus dieser Weglassung entsteht, wiederum dreyseitige Körperwinkel hätte, so könnte man sie abermals weglassen, und so weiter, bis man zu einem Polyëder kömmt, dessen Körperwinkel alle von nicht weniger als vier ebenen Win-

*) Gehörte eine Kante, zwey dreyseitigen Körperwinkeln gemeinschaftlich an, so müfste man bey der ersten Operation nur einen der Körperwinkel weglassen.

A. d. Verf.

keln gebildet werden. Kann nämlich der gegebene Körper seine Gestalt durch irgend eine Veränderung der Neigung der Seitenebenen verwandeln, so hat diese Verwandlung, wenigstens auf die abgeschnittenen dreyseitigen Pyramiden, keinen Einfluſs, sondern kann sich nur allein auf den, nach der Wegnahme der dreyseitigen Pyramiden übrig bleibenden Körper beziehen. Wir werden uns also bey der folgenden Untersuchung nur mit solchen Polyëdern beschäftigen, deren Körperwinkel von nicht weniger als vier Seitenebenen umschlossen sind.

Fig. 286. S sey irgend einer von den Körperwinkeln des Polyëders, und aus S eine Kugelfläche beschrieben, deren Durchschnitte mit den Seitenebenen des Körperwinkels, das Kugelvieleck ABCDEF bilden. Die Seiten dieses Vielecks AB, BC etc. dienen zum Maaſse der ebenen Winkel ASB, BSC etc., und sind folglich unveränderlich; die Winkel A, B, C etc. des Vielecks sind die Maaſse der Neigung je zweyer an einanderstoſsender Ebenen des Körperwinkels. So ist der Winkel B das Maaſs der Neigung der Ebenen ASB und SBC, welche wir der Kürze wegen *Neigung in der Kante SB* nennen wollen; der Winkel C ist das Maaſs der Neigung in der Kante SC und so weiter.

Wir können also die Veränderungen der Gestalt jedes Körperwinkels S aus den Veränderungen des Kugelvielecks ABCDEF schliessen, dessen Seiten unveränderlich sind, dessen Winkel aber beliebig zu- oder abnehmen können, jedoch mit der Einschränkung, daſs das Vieleck immer convex bleibe. In solchen Vielecken haben die Veränderungen der Winkel merkwürdige Gesetze, welche wir in den beiden folgenden Lehnsätzen vortragen wollen.

Erster Lehnsatz.

Fig. 286. *Alle Seiten eines Kugelvielecks AB, BC, CD, DE bis auf eine AF sind gegeben. Verändert man einen von den, der Seite AF gegenüberliegenden, Winkeln B, C, D, E, während die übrigen unverändert bleiben, so behaupte ich, daſs die Seite AF gröſser wird wenn der Winkel zunimmt, und kleiner, wenn der Winkel abnimmt. Uebrigens soll das Vieleck in jedem Falle, vor und nach der Veränderung, convex seyn.*

Man setze zuerst, der Winkel B werde verändert, die drey andern C, D und E aber bleiben unverändert. Zieht man BF, so erleidet die Figur BCDEF keine Veränderung, und BF ist unveränderlich. Man hat also ein Kugeldreyeck ABF, dessen Seiten AB und BF unveränderlich sind, dessen Winkel ABF aber, sich um eben so viel verändert, als der Winkel ABC des Vielecks, weil der Theil FBC unverändert bleibt. In diesem Dreyecke wächst, einer bekannten Eigenschaft zufolge *), AF, wenn der Winkel ABF zunimmt, und nimmt ab, wenn der Winkel ABF abnimmt.

Nun setze man, daſs sich der Winkel C verändere, die drey andern B, D, E aber dieselben bleiben. Zieht man die Diagonalen AC und FC, so ist klar, daſs sich diese Diagonalen nicht verändern; auch die Winkel ACD und FCD nicht; man hat also wieder ein Kugeldreyeck ACF, dessen Seiten AC und CF unveränderlich sind, während sich in demselben der Winkel ACF um eben so viel als der Winkel C in dem Vielecke verändert, woraus wiederum folgt, daſs die Seite AF

*) Dieselbe wird eben so bewiesen wie der zehnte Satz im ersten Buche für gradlinige Dreyecke.

A. d. Verf.

grösser wird, wenn der Winkel C zunimmt, und kleiner, wenn der Winkel C abnimmt.

Offenbar lassen sich dieselben Schlüsse auf die Veränderungen der Winkel D und E anwenden, und passen eben so wohl auf Kugelvielecke von mehr als drey Seiten. Also ist in allen Fällen das Resultat der Behauptung des Satzes gewiss, in sofern nur das Vieleck, nach und vor der Veränderung, convex ist. Diese Bedingung ist nothwendig. Denn wenn z. B. der Winkel E so weit abnähme, dass der Pnnct F in die Diagonale AE fiele, so wäre AF ein Minimum, und wenn man nun fortführe den Winkel E über diesen Punct hinaus zu verkleinern, so würde offenbar die Seite AF zu-, statt abnehmen. Im letzten Falle aber würde der Winkel AFE zu einem einspringenden, und das Vieleck hörte auf convex zu seyn.

Zusatz. Wenn Alles bleibt wie vorhin, und mehrere der letzten Seite AF gegenüberliegende Winkel nehmen zu, keiner von ihnen aber ab, so nimmt die Seite AF, durch die vereinte Wirkung der Veränderungen, nothwendig zu. Das Gegentheil erfolgt, wenn mehrere der Seite AF gegenüberliegende Winkel abnehmen und keiner von ihnen zunimmt.

Denn wenn durch die vereinte Wirkung der Zu- oder Abnahme, die Winkel A, B, C etc. des Vielecks in A′, B′, C′ etc. übergiengen, so könnte man allmälig aus dem gegebenen Vielecke erst ein solches machen, welches nur einen veränderten Winkel A′ hat, aus diesem wieder ein anderes, welches nur zwey verminderte Winkel A′ und B′ enthält, und so weiter. Für jeden Uebergang aber ist der Satz anwendbar, und giebt immer das nämliche Resultat.

Zweyter Lehnsatz.

Es sey ein convexes Kugelvieleck mit mehr als drey unveränderlichen Seiten gegeben. Verändert man die Winkel auf irgend eine Weise, ohne dafs jedoch das Vieleck aufhörte convex zu seyn, und setzt das Zeichen + zu dem Scheitel jedes Winkels welcher zunimmt, und das Zeichen — zu dem Scheitel jedes Winkels welcher abnimmt, kein Zeichen aber zu den Winkeln die sich nicht ändern, so behaupte ich, dafs, wenn man rund um das Vieleck geht, wenigstens vier Abwechselungen der Zeichen von einem Scheitel bis zum andern Statt finden.

Denn wenn erstlich n die Zahl der Winkel des Vielecks ist, so können nicht n — 2 auf einander folgende Winkel, entweder alle zunehmen, oder einige von ihnen zunehmen, andere unverändert bleiben; weil sonst, zufolge des Zusatzes zu dem vorigen Lehnsatze, die den n — 2 Winkeln gegenüberliegende Seiten des Vielecks zunehmen würden, welches der Voraussetzung, dafs die Seiten des Vielecks unverändert bleiben sollen, entgegen ist. Aus demselben Grunde können nicht die n — 2 auf einander folgenden Winkel alle zugleich abnehmen, oder einige von ihnen abnehmen, andere unverändert bleiben. Mithin mufs nothwendig bey den n — 2 aufeinander folgenden Winkeln wenigstens ein Zeichenwechsel Statt finden; um so mehr also mufs dieser Zeichenwechsel in der Reihe der n auf einander folgenden Winkel Statt finden, wenn man rund um das Vieleck geht.

Zweytens können die Veränderungen der Winkel des Vielecks nicht von der Art seyn, dafs nur eine Reihe von + und eine Reihe von — entsteht, so dafs rund um das Vieleck nur ein Zeichenwechsel Statt findet. (Fig. 287.) Denn es mögen zum Beyspiel A, B, C die drey mit + und D, E, F, G

die vier mit — bezeichneten Winkel seyn (welche Voraussetzung den Fall mit umfafst, dafs etwa eine Reihe, wegen unverändert bleibender Winkel, weniger Zeichen enthalte). Stellt nun die Figur den anfänglichen Zustand des Vielecks vor, so mufs die Diagonale GD zunehmen, wenn man alle Winkel A, B, C vergröfsert, oder einige von ihnen. Aber da die nämliche Diagonale GD dem Vielecke GFED zugehört, dessen andere Seiten unveränderlich sind, so mufs sie abnehmen, wenn die Winkel F und E abnehmen, oder wenigstens unverändert bleiben, wenn von den vier Winkeln D, E, F, G nur D und G, oder gar nur einer abnehmen; also findet die Voraussetzung nicht Statt; mithin kann die Veränderung der Winkel nicht von der Art seyn, dafs nur zwey Reihen Statt finden, die eine mit +, die andere mit —.

Drittens ist es nicht möglich, dafs man, wenn man rund um das Vieleck geht, nur drey Zeichenreihen antrifft; denn in diesem Falle würde die erste und dritte Reihe einerley Zeichen haben, und unmittelbar auf einander folgen; also nur eine einzige Reihe ausmachen; folglich würden bey dem ganzen Umgange eigentlich nur zwey Reihen vorkommen, die eine mit +, die andere mit —, welches bewiesenermaafsen nicht möglich ist.

Folglich kann es, rund um das Vieleck, nicht weniger als vier Zeichenwechsel geben.

Zusatz. Was hier für Kugelvielecke bewiesen ist, läfst sich unmittelbar auf Körperwinkel anwenden, deren Maafs die Vielecke sind. *Wenn also ein convexer Körperwinkel gegeben ist, welcher von mehr als drey ebenen Winkeln umschlossen wird, und man verändert auf irgend eine Weise die Neigung in den Kanten, jedoch so, dafs der Körperwinkel nicht aufhört convex zu seyn, setzt darauf*

zu jeder Kante eines der Zeichen + oder —, je nachdem die Neigung in der Kante zu- oder abnimmt, kein Zeichen aber zu den Kanten, in welchen sich die Neigung nicht ändert; so trifft man, wenn man rund um das Vieleck geht, wenigstens vier Zeichenwechsel von einer Kante zur andern an.

Mit Hülfe dieses Satzes und des Eulerschen Lehrsatzes von den Polyëdern (7s B. 25r S.), können wir nun folgenden Lehrsatz ganz allgemein beweisen.

Lehrsatz.

Wenn die Körperwinkel eines convexen Polyëders, sämmtlich von mehr als drey ebenen Winkeln umschlossen sind, so ist es unmöglich, die Neigung der Ebenen dieses Körpers so zu verändern, daſs ein zweytes, von den nämlichen, und in derselben Ordnung wie beim ersten Polyëder, auf einander folgenden Ebenen, umschlossenes Polyëder entsteht.

Bey dem Beweise dieses Satzes sind zwey Fälle zu unterscheiden, nämlich, ob alle Winkel in den Kanten sich verändern, oder nur einige.

Erster Fall.

Man setze, die Neigungen in den Kanten würden alle zugleich verändert, und N sey die Zahl der Zeichenwechsel von einer Kante zur andern, rund um jeden Körperwinkel.

Im zweyten Lehnsatze ist gezeigt worden, daſs die Zahl der Zeichenwechsel für jeden Körperwinkel nicht kleiner als vier seyn kann.

Ist also S die Zahl der Körperwinkel, so ist $N \geqq 4S$, wobey das Zeichen $\geqq$ die Gleichheit mit bedeutet.

Nun bemerke man, dafs allemal zwey aufeinander folgende Kanten eines Körperwinkels zu einer Seitenebene des Polyëders und nur zu einer gehören. Also ist die ganze Zahl der Zeichenwechsel für die auf einander folgenden Kanten eines Körperwinkels, der ganzen Zahl der Zeichenwechsel für die auf einander folgenden Seiten jeder Seitenebene gleich; denn es findet kein Zeichenwechsel in dem einen Systeme Statt, ohne einen ähnlichen Wechsel in dem andern.

In jeder dreyeckigen Seitenfläche kann aber die Zahl der Zeichenwechsel nicht gröfser als zwey seyn; denn läfst man die Reihe + — + oder die Reihe + — — in sich selbst fortlaufen, so erhält man immer nur zwey Zeichenwechsel.

Für jede viereckige Seitenfläche ist offenbar die Zahl der Zeichenwechsel höchstens vier.

Ueberhaupt ist die gröfste Zahl der Zeichenwechsel, rund um eine Seitenfläche, wenn die Zahl ihrer Seiten grade, z. B. $2n$ ist, ebenfalls gleich $2n$, welches Statt findet, wenn die Seiten abwechselnd die Zeichen + und — haben.

Ist aber die Zahl der Seiten einer Seitenfläche ungrade, z. B. $= 2n + 1$, so ist die gröfste Zahl der Zeichenwechsel nur $2n$, weil, wenn man den Seiten abwechselnd die Zeichen + und — giebt, die erste und letzte nothwendig einerley Zeichen haben, welches einen Zeichenwechsel weniger ausmacht als Seiten.

Nun sey a die Zahl der Dreyecke, b die Zahl der Vierecke, c die Zahl der Fünfecke u. s. w., welche sich in der Oberfläche des gegebenen Polyëders befinden, so folgt aus dem eben Bewiesenen, daſs die ganze Zahl der Zeichenwechsel, rund um die Seitenflächen, nicht gröſser als 2a bey den dreyseitigen, 4b bey den vierseitigen, 4c bey den fünfseitigen, 6d bey den sechsseitigen u. s. w. Seitenflächen seyn kann. Also ist

$$N < 2a + 4b + 4c + 6d + 6e + 8f + 8g \ldots$$

A sey die Zahl der Kanten des Polyëders, und H die Zahl seiner Seitenflächen, so ist

$$2A = 3a + 4b + 5c + 6d + 7e + 8f + 9g \ldots$$
$$H = a + b + c + d + e + f + g \ldots$$

Nun ist nach dem Eulerschen Lehrsatze $S + H = A + 2$, also ist $4S = 8 + 4A - 4H$, und wenn man die obigen Werthe von A und H substituirt,

$$4S = 8 + 2a + 4b + 6c + 8d + 10e \ldots$$

Vergleicht man diesen Werth mit der oben gefundenen Grenze, so erhält man

$$N < 4S - 8.$$

Aber es kann nicht zugleich $N < 4S$ und $N < 4S - 8$ seyn; also ist es unmöglich, daſs sich die Neigungen in allen Kanten des Polyëders zugleich verändern, ohne den Zusammenhang der Ebenen, welche die Oberfläche des Polyëders bilden, aufzulösen.

Zweyter Fall.

Man setze, die Neigung ändere sich nicht in allen Kanten zugleich, sondern bleibe in einigen unverändert.

Fig. 204. FI sey eine dieser letzten Kanten, so kann man dieselbe ganz übergehen, und die beiden aneinander stossenden Seitenflächen FIG und EFIH in eine, nicht ebe-

ne, aber von der unveränderlichen Figur EFGHI umschlossene Fläche vereinigen. S', H' und A' mögen bezeichnen, was aus S, H und A, nach Uebergehung einer Kante wird, so ist $H' = H - 1$ und $A' = A - 1$; aber $S' = S$, weil die Zahl der Körperwinkel noch die nämliche ist. Also ist $S' + H' - A' = S + H - A = 2$, woraus folgt, daſs der Eulersche Satz auch noch für den Körper Statt findet, welcher eine Kante und eine Seitenfläche weniger hat, indem zwey Seitenflächen in eine einzige, nicht ebene, vereinigt worden sind.

Nimmt man von diesem neuen Körper wiederum eine Kante, in welcher die Neigung unverändert bleibt, weg, so werden durch die Weglassung dieser Kante von Neuem zwey an einanderstoſsende Seitenflächen in eine vereint, und es wird eben so bewiesen, daſs der Eulersche Lehrsatz auch für den dritten, durch die Weglassung zweyer Kanten entstandenen Körper, Statt findet.

So kann man so viel Kanten als man will weglassen, in sofern nur nicht die Weglassung eines Körperwinkels damit verbunden ist. Der Eulersche Lehrsatz gilt für den übrig bleibenden Körper immer. Dieser Umstand läſst sich auch direct und allgemein zeigen, wenn man sich des Beweises erinnert, den wir von dem Eulerschen Lehrsatze gegeben haben. Denn dieser Beweis setzt nicht voraus, daſs die Seitenflächen eben sind; er gilt eben so wohl wenn auch die Umrisse der Seitenflächen nicht in Ebenen liegen. Er setzt blos voraus, daſs jeder Umriſs einem Kugelvielecke entspreche, und daſs die Summe der Flächen dieser Vielecke der ganzen Kugelfläche gleich sey. Es ist selbst nicht einmal nöthig, daſs alle diese Vielecke convex sind, wenn nur jedes Vieleck, als die Summe mehrerer convexen Vielecke betrachtet werden kann, welches letztere immer der

Fall ist, wenn sich auch, nach Weglassung mehrerer, zu dem gegebenen Polyëder gehörigen Kanten, mehrere ebene Seitenflächen in eine einzige nicht ebene Fläche vereinigen; denn alsdann ist das Kugelvieleck, welches dieser Fläche entspricht, aus der Summe der convexen Kugelvielecke zusammen gesetzt, welche zu den weggelassenen Seitenflächen gehören.

Wir kommen nun zu dem Fall, wenn die Weglassung von Kanten in welchen die Neigung unverändert bleibt, diejenige von mehreren *Körperwinkeln* nach sich zieht, weil entweder die Neigung in vielen Kanten oder aller Seitenebenen unverändert bleibt, oder weil sich die Neigung nur in drey Kanten verändern kann, in welchem Fall die Neigungen nothwendig unveränderlich bleiben.

Wir wollen zuerst setzen, es werde nur ein Körperwinkel weggelassen, und die Zahl der Seitenflächen dieses Winkels oder der Kanten, die in seinen Scheitel zusammenstossen, sey m. Uebergeht man diesen Körperwinkel, so übergeht man dadurch m Kanten, und aus den m Seitenflächen, welche den Körperwinkel bilden, wird eine einzige. Bezeichnet man also durch S', A', H' was aus S, A, H nach Weglassung des Körperwinkels wird, so ist $S' = S - 1$, $A' = A - m$, $H' = H - (m - 1)$. Daraus folgt $S' + H' - A' = S - H - A = 2$. Also gilt auch für diesen neuen Körper der Eulersche Lehrsatz.

Man kann also so viel Körperwinkel als man will weglassen: der Eulersche Lehrsatz gilt für das übrig bleibende Polyëder immer; denn läſst man einen Körperwinkel nach dem andern weg, so entstehen nach und nach neue Polyëder, von welchen je zwey auf einander folgende immer für obigen Fall passen.

Läſst man also überhaupt von dem gegebenen Polyëder alle Kanten weg, in welchen sich die Neigung nicht verändert, die Zahl der Körperwinkel mag dadurch vermindert werden oder nicht, so gilt für das übrig bleibende Polyëder der Eulersche Lehrsatz allemal; das heiſst, wenn s, h, a für dieses Polyëder die Werthe der Gröſsen S, H, A aus dem gegebenen Polyëder sind, so ist immer $s + h - a = S + H - A = 2$.

In dem übrig bleibenden Körper verändern sich aber nun die Neigungen in den Kanten *sämmtlich*, weil man alle die Kanten, in welchen sich die Neigungen nicht ändern, weggelassen hat, also paſst das übrig bleibende Polyëder auf den ersten Fall, und folglich kann die Veränderung aller dieser Neigungen zugleich nicht Statt finden, ohne das Polyëder zu zerstören.

Mithin kann schlieſslich kein convexes Polyëder in ein anderes, mit den nämlichen in gleicher Ordnung auf einander folgenden, vieleckigen Seitenflächen verwandelt werden.

Ende der Anmerkungen.

Die

Trigonometrie.

Der Zweck der Trigonometrie ist die Auflösung der Dreyecke, das heifst, die Berechnung ihrer Winkel und Seiten aus einer hinreichenden Zahl gegebener Stücke *).

Bey gradlinigen Dreyecken sind von den vorhandenen sechs Bestimmungsstücken drey hinreichend, jedoch mufs sich unter denselben eine Seite befinden; denn drey Winkel allein kommen allen ähnlichen Dreyecken gleichmäfsig zu.

Bey Kugeldreyecken sind immer drey Bestimmungsstücke, gleich viel ob Winkel oder Seiten, hinreichend, weil bey diesen Dreyecken, nicht sowohl die absolute Gröfse der Seiten, als vielmehr ihr Verhältnifs zum Quadranten, oder die Zahl der Grade, welche sie enthalten, in Betracht kommt.

In dem Anhange zum zweyten Buche ist gezeigt worden, wie sich gradlinige Dreyecke mit drey gegebenen Bestimmungsstücken construiren lassen; der 24ste und 25ste Satz des fünften Buchs geben einen Begriff von den Constructionen, durch welche in ähnlichen

*) Die Auflösung der Dreyecke ist nur eine einzelne Anwendung der trigonometrischen, oder vielmehr goniometrischen Sätze. A. d. Uebers.

Fällen Kugeldreyecke aufgelöset werden. Aber alle diese Constructionen, obgleich sie in der Theorie sehr genau sind, gewähren in der Ausübung, wegen der Unvollkommenheit der dazu anzuwendenden Instrumente, nur eine sehr mangelhafte Annäherung *). Man nennt dieselben *graphische Auflösungen.* Durch die trigonometrischen Auflösungen hingegen, welche von keiner mechanischen Operation abhängen, kann man sich der Wahrheit so weit man will, nähern. Sie beruhen auf die Eigenschaften von Linien, welche man Sinus, Cosinus, Tangenten u. s. w. nennt, und mittelst welcher sich die Verhältnisse zwischen den Seiten und Winkeln der Dreyecke auf eine einfache Weise ausdrücken lassen.

Wir wollen zuerst die Eigenschaften dieser Linien, und die vorzüglichsten daraus folgenden Formeln vortragen. Diese Formeln haben durch die ganze Mathematik den ausgebreitetsten Nutzen, und liefern selbst der Analysis Mittel zur Vervollkommnung. Hernach soll die Anwendung der Formeln auf die Auflösung der gradlinigen und Kugeldreyecke folgen.

Eintheilung des Kreisumfanges.

1. Bis in die neueste Zeit haben die Mathematiker den Kreisumfang in 360 gleiche Theile getheilt, welche *Grade* heissen, jeden Grad in 60 Minuten, jede Minute in 60 Secunden u, s. w. Diese Eintheilung hat in der

*) Man muſs die Figuren welche zum Beweise eines Lehrsatzes oder zur Auflösung einer Aufgabe nothwendig sind, von den, zur Ausmittlung irgend einer Abmessung construirter Figuren, unterscheiden. Die erstern werden immer als genau angenommen, die letztern geben, wenn sie nicht genau gezeichnet sind, unrichtige Resultate.

A. d. Verf.

Ausübung einige Vortheile, weil die Zahlen 60 und 360 eine Menge Theiler haben, aber sie hat dagegen auch alle die wesentlichen Nachtheile zusammengesetzter Zahlen, und erschwert also die Rechnung.

Die Urheber des neuen Maafs - und Gewichtssystems haben die grofsen Vortheile der Decimaleintheilung für die Winkelmessung erkannt. Sie haben deshalb den vierten Theil des Kreisumfanges, oder den Quadranten, welcher das Maafs des rechten Winkels ist, zur Einheit angenommen, und diese Einheit in 100 Theile, *Grade* genannt, den Grad in 100 *Minuten*, die Minute in 100 *Secunden* u. s. w. getheilt.

Wir werden uns hier durchweg der neuen Eintheilung, das heifst, der Decimaleintheilung des Kreisumfanges bedienen. Sie ist der Arithmetik am angemessensten und am geschicktesten zur Abkürzung der Rechnung.

2. Grade, Minuten und Secunden werden durch $^\circ$, $'$, $''$ bezeichnet. So z. B. bedeutet der Ausdruck 16°, $6'$, $75''$ einen Bogen oder Winkel von 16 Graden, 6 Minuten und 75 Secunden. Bezöge man den nämlichen Bogen auf den Quadranten als Einheit, so würde er durch 0,160675 bezeichnet werden müssen. Man sieht aus dieser Bezeichnung sogleich, dafs sich der von dem Bogen gemessene Winkel zum rechten verhält wie 160675 zu 1000000, welches bey der alten Eintheilung des Kreisumfanges nicht so in die Augen fällt.

Bogen und Winkel werden in der Rechnung ohne weitern Unterschied durch eine Zahl von Graden, Minuten und Secunden angegeben. Wir wollen also den rechten Winkel oder den Quadranten, durch 100°, zwey rechte Winkel, oder den halben Umfang, durch 200°,

vier rechte Winkel, oder den ganzen Umfang, durch 400° u. s. w. bezeichnen *).

3. Das *Complement* eines Winkels oder Bogens ist der Winkel welcher übrig bleibt wenn man den gegebenen Winkel oder Bogen von ρ abzieht. Also hat z. B. der Winkel von 25° 40′, zum Complement 74° 60′, der Winkel von 12° 4′ 62″, zum Complement 87° 95′ 38″.

Allgemein, wenn A irgend einen Winkel oder Bogen bedeutet, so ist ρ — A das Complement dieses Winkels oder Bogens. Daraus folgt, dafs wenn ein Winkel den rechten übersteigt, sein Complement negativ ist. So ist das Complement von 160° 84′ 10″ gleich — 60° 84′ 10″. In diesem letzten Falle würde das Complement, wenn man es positiv nähme, die Gröfse seyn, welche von dem gegebenen Winkel oder Bogen abgezogen werden mufs, um ρ zum Rest zu geben.

Die beiden spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreyecks betragen zusammen einen rechten Winkel; also ist jeder des andern Complement.

4. Das *Supplement* eines Winkels oder Bogens ist der Winkel, welcher übrig bleibt, wenn man den gege-

*) Damit diejenigen welche der Decimalrechnung abhold, und vielleicht irgend einer andern als der Decimaleintheilung des Quadranten mehr zugethan oder mehr gewohnt sind, weniger Anstofs finden mögen, wird sich der Uebersetzer die Freyheit nehmen, statt der Legendrischen Bezeichnung ein allgemeines Zeichen zu setzen, nämlich den Buchstaben ϱ für den rechten Winkel oder Quadranten. Andere Winkel, wo es irgend ohne Unbequemlichkeit angeht, werden in Theilen von ϱ, sey es durch gewöhnliche oder durch Decimalbrüche, wie es grade am passendsten ist, ausgedrückt werden. Dann kann Jeder selbst den Quadranten oder rechten Winkel in so viele Theile oder Grade eintheilen als es ihm beliebt.

A. d. Uebers.

benen Winkel oder Bogen von 2ρ, oder von zwey rechten Winkeln, oder dem halben Umfange abzieht. Wenn also A irgend einen Winkel oder Bogen bedeutet, so ist 2ρ — A sein Supplement.

In jedem Dreyecke ist jeder Winkel das Supplement der Summe der beiden andern, weil alle drey zusammen gleich 2ρ sind.

Die Winkel der gradlinigen Dreyecke sowohl als der Kugeldreyecke, so wie die Seiten der letztern, haben immer positive Supplemente, weil sie immer kleiner als 2ρ sind.

Allgemeine Erklärung der Sinus, Cosinus, Tangenten etc.

Fig. 1. 5. Der *Sinus* des Bogens AM oder des Winkels ACM ist das Perpendikel MP aus dem einen Endpuncte des Bogens auf den Halbmesser durch den andern Endpunct.

Zieht man in dem Endpuncte des Halbmessers CA, das Perpendikel AT, bis es den verlängerten Halbmesser CM schneidet, so heifst die auf diese Weise begrenzte Linie AT, *Tangente* und CT, *Secante* des Bogens AM, oder des Winkels ACM.

Diese drey, vom Bogen AM abhängenden, und durch denselben und den Halbmesser bestimmten Linien MP, AT, CT werden wie folgt, bezeichnet: MP = sin AM oder sin ACM, AT = tang AM, oder tang ACM, CT = sec AM, oder sec ACM.

6. Wenn AD ein Quadrat ist, und man zieht aus M und D die Linien MQ und DS auf den Halbmesser CD senkrecht, so dafs die eine von dem Halbmesser CD, die andere von dem verlängerten Halbmesser CM begrenzt wird, so sind die Linien MQ, DS, CS Sinus, Tangente

und Secante des Bogens MD, also des Complements von AM. Man nennt sie, der Kürze wegen, *Cosinus, Cotangente* und *Cosecante* des Bogens AM, und bezeichnet sie wie folgt: MQ = cos AM, oder cos ACM, DS = cot AM, oder cot ACM, CS = cosec AM, oder cosec ACM. Im allgemeinen ist, wenn A irgend einen Winkel bedeutet, cos A = sin (ρ — A), cot A = tang (ρ — A) cosec A = sec (ρ — A).

Das Dreyeck MQC ist, der Construction nach, dem Dreyecke CPM gleich; also ist CP = MQ: folglich sind in dem rechtwinkligen Dreyecke CMP, dessen Hypothenuse der Halbmesser ist, die beiden Seiten MP und CP, Sinus und Cosinus des Bogens AM. Die Dreyecke CAT und CDS sind den gleichen Dreyecken CPM, CQM, und folglich einander ähnlich. Hieraus folgen die weiter unten vorzutragenden Verhältnisse zwischen den eben erklärten Linien. Ehe die Verhältnisse der Linien abgehandelt werden können, mufs ihr Verhalten gezeigt werden, wenn der Bogen, auf welchen sie sich beziehen, von o bis 2ρ wächst.

7. Man setze, das eine Ende des Bogens bleibe in A fest, das andere, mit M bezeichnete Ende aber durchlaufe nach und nach den halben Umfang von A bis B, in der Richtung ADB.

Fällt M in A, oder ist der Bogen AM = o, so fallen die drey Puncte T, M, P alle in A, woraus folgt, dafs Sinus und Tangente eines Bogens o, auch o, dafs der Cosinus aber und die Secante, dem Halbmesser gleich sind. Bezeichnet man also den Halbmesser des Kreises durch r *), so ist

$$\sin o = o, \ \text{tang}\, o = o, \ \cos o = r, \ \sec o = r.$$

*) Legendre setzt den Buchstaben R. Ich habe den bequemern kleinern Buchstaben gewählt, auch schon der meh-

8. So wie M gegen D fortrückt, wächst der Sinus, die Tangente und die Secante; der Cosinus, die Cotangente und Cosecante aber nehmen ab.

Fällt der Punct M in die Mitte von AD, so daſs der Bogen AM $= \frac{1}{2}\rho$ eben wie sein Complement MD, so ist der Sinus MP dem Cosinus MQ oder CP gleich. Das gleichschenklige Dreyeck CMP giebt alsdann die Proportion MP : CM $= 1 : \sqrt{2}$, oder $\sin \frac{1}{2}\rho : r = 1 : \sqrt{2}$. Also ist $\sin \frac{1}{2}\rho = \cos \frac{1}{2}\rho = \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} r \sqrt{2}$. In diesem Falle ist auch das Dreyeck CAT gleichschenklig und dem Dreyecke CDS gleich, woraus folgt, daſs die Tangente von $\frac{1}{2}\rho$, so wie die Cotangente, beide dem Halbmesser gleich sind, und daſs also $\tang \frac{1}{2}\rho = \cot \frac{1}{2}\rho = r$.

9. Nimmt der Bogen AM weiter zu, so wächst auch der Sinus, bis der Punct M nach D gelangt ist. Alsdann ist der Sinus dem Halbmesser gleich, und der Cosinus $= 0$. Also ist $\sin \rho = r$ und $\cos \rho = 0$. Es ist zu bemerken, daſs diese Werthe auch aus den für den Sinus und Cosinus eines Bogens 0 gefundenen Werthen folgen. Denn da das Complement von ρ gleich Null ist, so ist $\sin \rho = \cos 0 = r$ und $\cos \rho = \sin 0 = 0$.

Die Tangente nimmt sehr schnell zu, wie sich der Punct M dem Puncte D nähert. Fällt M in D so giebt es eigentlich zu dem Bogen keine Tangente mehr, weil alsdann die Linien AT und CD parallel sind, und sich also nicht schneiden können. Diesen Umstand bezeichnet man dadurch, daſs man sagt, die Tangente von ρ sey unendlich. Man schreibt $\tang \rho = \infty$.

reren Uebereinstimmung wegen mit der Bezeichnung des rechten Winkels oder Quadraten durch ρ.

A. d. Uebers.

Da das Complement von ρ gleich Null ist, so ist tang o = cot ρ und cot o = tang ρ, Also ist cot o = ∞ und cot ρ = o.

10. Rückt der Punct M weiter von D nach B, so nehmen die Sinus ab und die Cosinus zu. So hat der Bogen AM′ zum Sinus M′P′ und zum Cosinus M′Q oder CP′. Aber der Bogen M′B ist das Supplement von AM′, weil AM′ + M′B ein halber Umfang ist, und wenn man M′M mit AB parallel zieht, so sind die, zwischen Parallelen liegenden Bogen AM und BM′, gleich, wie ihre Sinus MP und M′P′. *Also ist der Sinus jedes Bogens oder Winkels, gleich dem Sinus vom Supplement des nämlichen Winkels oder Bogens.*

Das Supplement des Winkels oder Bogens A ist 2ρ — A, also ist allgemein

$$\sin A = \sin (2\rho - A),$$

die nämliche Eigenschaft kann auch durch

$$\sin (\rho + B) = \sin (\rho - B)$$

ausgedrückt werden, wenn B den Bogen DM, oder den gleichen Bogen DM′ bedeutet.

11. Die nämlichen Bogen AM′ und AM, deren jeder das Supplement des andern ist, und welche gleiche Sinus haben, haben auch gleiche Cosinus CF′ und CP, aber mit dem Unterschiede, dafs die Cosinus entgegengesetzte Richtungen haben. Dieser Unterschied der Lage wird für die Rechnung durch die Entgegengesetztheit der Zeichen ausgedrückt, so, dafs wenn man die Cosinus von Bogen die kleiner sind als ρ, positiv setzt, oder ihnen das Zeichen + giebt, diejenigen Cosinus, welche zu gröfsern Bogen als ρ gehören, negativ seyn und mit — bezeichnet werden müssen *).

*) Dafs diese Entgegengesetztheit der Lage der Linien derjenigen entspreche, welche durch + und — bey Zahlgröfsen

Es ist also allgemein

$$\cos A = -\cos(2\rho - A)$$

$$\text{oder } \cos(\rho + B) = -\cos(\rho - B),$$

das heifst, *der Cosinus eines Bogens oder Winkels, welcher gröfser ist als ρ, ist dem Cosinus seines Supplements, negativ genommen, gleich.*

Da das Complement eines Bogens, der gröfser als ρ ist, negativ war (3.), so ist es nicht befremdend, dafs auch der Sinus dieses Complements negativ ist. Um aber das letztere deutlicher zu machen, wollen wir den Ausdruck der Entfernung des Puncts A von dem Perpendikel MP suchen. Nennt man nämlich den Bogen AM, x, so ist CP = cos x, und die gesuchte Entfernung ist AP = r — cos x. Dieser Ausdruck mufs also die Entfernung des Puncts A von der graden Linie MP geben, welches auch die Gröfse des Bogens AM, dessen Anfangspunct A ist, seyn mag. Man setze also, der Punct M komme nach M′, so dafs x den Bogen AM′ bezeichnet, so ist, auch für diesen Punct, AP′ = r — cos x, also ist cos x = r — AP′ = AC — AP′ = — CP′, welches zeigt, dafs alsdann cos x negativ ist. Und weil alsdenn CP′ = CP = — cos (2ρ — x), so ist cos x = — cos (2ρ — x) wie oben.

Daraus folgt, dafs ein stumpfer Winkel eben den Sinus und Cosinus hat, wie der spitze, der sein Supplement ist, nur mit dem Unterschiede, dafs der Cosinus

bezeichnet wird, müfste wohl noch erst besonders nachgewiesen werden, denn die Bezeichnung der Linien mit + oder —, nach ihrer Lage, ist nicht willkürlich oder blos analog mit der Bezeichnnng der Zahlgröfsen. Sie ist nothwendig. Der Wechsel des Zeichens einer veränderlichen Linie findet bey jedem Durchgange durch Null oder Unendlich Statt, wie bey Zahlen. A. d. Uebers.

des stumpfen Winkels negativ ist. Also ist z. B. $\sin \frac{3}{2} \rho = \sin \frac{1}{2} \rho = \frac{1}{2} r \sqrt{2}$ und $\cos \frac{3}{2} \rho = - \cos \frac{1}{2} \rho = - \frac{1}{2} r \sqrt{2}$.

Der Sinus des halben Umfanges ADB ist Null: sein Cosinus ist gleich dem negativen Halbmesser. Also ist $\sin 2\rho = 0$ und $\cos 2\rho = - r$. Das Nämliche geben die Formeln $\sin A = \sin (2\rho - A)$ und $\cos A = - \cos (2\rho - A)$, wenn man $A = 2\rho$ setzt.

12. Wir wollen jetzt die Tangente eines Winkels der gröfser als ρ ist, untersuchen. Nach der Erklärung wird die Tangente durch das Zusammentreffen der Linien AT und CM′ bestimmt. Diese Linien schneiden sich in der Richtung AT gar nicht, sondern nur in der entgegengesetzten AV, woraus folgt, dafs die Tangente eines Bogens, der gröfser ist als ρ, negativ ist. Weil AV die Tangente des Bogens AN (Fig. 1), des Supplements von AM′ ist, (denn NAM′ ist ein Halbkreis,) so folgt, dafs die Tangente eines gröfsern Bogens oder Winkels als ρ, der Tangente seines Supplements, negativ genommen, gleich ist, so dafs also

$$\tang A = - \tang (2\rho - A).$$

Eben so verhält es sich mit der Cotangente, welche DS′ vorstellt und welche, in entgegengesetzter Richtung, der Cotangente DS von AM, gleich ist. Also ist auch

$$\cot A = - \cot (2\rho - A).$$

Die Tangenten und Cotangenten sind also für Winkel zwischen ρ und 2ρ negativ, wie die Cosinus. Für 2ρ selbst ist $\tang 2\rho = 0$, $\cot 2\rho = - \cot 0 = - \infty$.

13. In der Trigonometrie kommen zwar die Sinus, Cosinus etc. von gröfsern Winkeln als 2ρ nicht vor, denn die Winkel in gradlinigen und Kugeldreyecken, und die Seiten der letztern liegen immer zwischen 0 und 2ρ. Bey mehreren Anwendungen der Geometrie aber kommen Bogen vor, welche gröfser sind als der halbe Umfang und selbst als mehrere

Umfänge. Der Ausdruck des Sinus und Cosinus ist also für Bogen von jeder beliebigen Gröfse nöthig.

Man bemerke zuerst, dafs zwey gleiche Bogen AM und AN, von verschiedenen Zeichen, gleiche Sinus MP und PN, aber ebenfalls von verschiedenen Zeichen haben, während der Cosinus CI für beide der nämliche ist. Es ist also allgemein

$$\sin(-x) = -\sin x,$$
$$\cos(-x) = \cos x,$$

welche Formeln zum Ausdruck der Sinus und Cosinus negativer Bogen dienen.

Von o bis 2ρ sind die Sinus immer positiv, weil sie auf der nämlichen Seite des Durchmessers AB liegen; von 2ρ bis 4ρ sind die Sinus negativ, weil sie auf der andern Seite des Durchmessers liegen. $ABN' = x$ sey ein gröfserer Bogen als 2ρ, so ist sein Sinus $P'N'$, dem Sinus PM des Bogens $AM = x - 2\rho$ gleich; also ist allgemein

$$\sin x = -\sin(x - 2\rho).$$

Diese Formel giebt die Sinus zwischen 2ρ und 4ρ, aus den Sinus zwischen o und 2ρ. Es folgt auch daraus $\sin 4\rho = -\sin 2\rho = 0$. Es ist klar, dafs wenn ein Bogen dem ganzen Umfange gleich ist, die beiden Endpuncte in einen Punct zusammen fallen, und der Sinus o ist.

Eben so offenbar ist es, dafs man, wenn man zu irgend einem Bogen AM einen oder mehrere ganze Umfänge hinzu thut, genau wieder denselben Punct M treffen mufs, und dafs also der auf solche Weise vergröfserte Bogen, mit AM einerley Sinus hat. Bezeichnet also c einen ganzen Umfang oder 4ρ, so ist

$$\sin x = \sin(c + x) = \sin(2c + x) = \sin(3c + x) \text{ etc.}$$

Eben das gilt für den Cosinus, die Tangente u. s. w.

Nun sey ein Bogen x gegeben, welchen man will, so ist leicht zu sehen, dafs sein Sinus, mit dem angemessenen Zeichen, immer mittels des Sinus eines Bogens ausgedrückt

werden kann, der kleiner ist als ρ. Denn erst kann man von x so oft mal 4ρ abziehen, als solche darin vielleicht enthalten sind. Für den Rest y ist sin x = sin y. Ist nun noch $y > 2\rho$, so mache man $y = 2\rho + z$. Dann ist sin y = — sin z. Es läfst sich also jeder beliebige Bogen auf einen andern reduciren der kleiner als 2ρ ist. Und da nun weiter $\sin(\rho + x) = \sin(\rho - x)$, so kommt zuletzt jeder beliebige Bogen auf einen andern zurück der zwischen o und ρ liegt.

14. Die Cosinus lassen sich vermittelst der Formel $\cos A = \sin(\rho - A)$, oder wenn man will, vermittelst der Formel $\cos A = \sin(\rho + A)$ immer auf Sinus reduciren. Da man nun die Sinus für alle mögliche Fälle ausdrücken kann, so kann ein Gleiches mit den Cosinus geschehen. Uebrigens zeigt unmittelbar die Figur, dafs die negativen Cosinus von den positiven durch den Durchmesser DE abgesondert sind, so dafs alle Bogen, deren Endpuncte links von DE fallen, positiv, und alle Bogen, deren Endpuncte rechts fallen, negative Cosinus haben.

Also sind die Cosinus von o bis ρ positiv, von ρ bis 3ρ negativ, von 3ρ bis 4ρ wieder positiv, und wenn der ganze Umkreis durchlaufen ist, so erhalten sie wieder dieselben Werthe wie im ersten Umkreise. Denn es ist auch $\cos(4\rho + x) = \cos x$.

Die Sinus und Cosinus der Vielfachen des Quadranten sind also folgende:

$\sin 0 = 0$	$\sin \rho = r$	$\cos 0 = r$	$\cos \rho = 0$
$\sin 2\rho = 0$	$\sin 3\rho = -r$	$\cos 2\rho = -r$	$\cos 3\rho = 0$
$\sin 4\rho = 0$	$\sin 5\rho = r$	$\cos 4\rho = r$	$\cos 5\rho = 0$
$\sin 6\rho = 0$	$\sin 7\rho = -r$	$\cos 6\rho = -r$	$\cos 7\rho = 0$
$\sin 8\rho = 0$	$\sin 9\rho = r$	$\cos 8\rho = r$	$\cos 9\rho = 0$
etc.	etc.	etc.	etc.

Im allgemeinen bezeichne k irgend eine ganze Zahl, so ist

$$\sin 2k\rho = 0 \qquad \cos(2k+1)\rho = 0$$
$$\sin(4k+1)\rho = r \qquad \cos 4k\rho = r$$
$$\sin(4k-1)\rho = -r \qquad \cos(4k+2)\rho = -r.$$

Was über die Sinus und Cosinus gesagt ist enthält schon das Nöthige von den Tangenten, Cotangenten etc. gröſseren Bogen als 2ρ, denn die Werthe der Tangenten etc. sind immer aus den Werthen der Sinus und Cosinus der nämlichen Bogen zu finden, wie man weiter unten sehen wird.

Lehrsätze und Formeln über Sinus, Cosinus, Tangenten u. s. w.

15. *Der Sinus eines Bogens ist die Hälfte der Sehne des doppelten Bogens.*

Fig. 1. Denn der auf MN senkrechte Halbmesser CA halbirt die Sehne MN und ihren Bogen MAN, also ist der Sinus MP des Bogens MA die Hälfte der Sehne MN, welche zu dem Bogen MAN $=$ 2MA gehört.

Die Sehne vom sechsten Theil des Umfanges ist dem Halbmesser gleich, also ist $\sin \frac{4\rho}{12}$ oder $\sin \frac{1}{3}\rho = \frac{1}{2} r$, das heiſst, der Sinus von dem dritten Theile des rechten Winkels ist der Hälfte des Halbmessers gleich.

16. *Das Quadrat des Sinus eines Bogens mit dem Quadrate des Cosinus zusammen genommen, ist gleich dem Quadrate des Halbmessers, so daſs allgemein*

$$\sin A^2 + \cos A^2 = r^2 \text{ *)}.$$

Dieses folgt aus dem rechtwinkligen Dreyecke CMP, in welchem $MP^2 + CP^2 = CM^2$ ist **). Wenn also

*) Durch $\sin A^2$ wird hier das Quadrat von $\sin A$ und durch $\cos A^2$ das Quadrat von $\cos A$ bezeichnet.

A. d. Verf.

**) Der Halbmesser hätte durchweg gleich 1 gesetzt werden

der Sinus eines Bogens gegeben ist, so läfst sich auch der Cosinus des Bogens finden, und umgekehrt, und zwar vermittelst der Formeln

$$\cos A = \pm\sqrt{(r^2 - \sin A^2)} \text{ und } \sin A = \pm\sqrt{(r^2 - \cos A^2)}$$

können, denn in einzelnen Fällen, wo eine allgemeine Bezeichnung r nothwendig ist, z. B. bey der Anwendung trigonometrischer Ausdrücke auf die Auflösung von Gleichungen höherer Grade, kann dieselbe leicht wieder eingeführt werden. Man bezeichne nämlich den Sinus, Cosinus etc. eines Winkels für den Halbmesser r durch ein darüber gesetztes r, also durch $\overset{r}{\sin}\, x$, $\overset{r}{\cos}\, x$ etc. den Sinus, Cosinus etc. für den Halbmesser 1 aber ohne Beysatz, so ist $\overset{r}{\sin}\, x = r \sin x$, $\overset{r}{\cos}\, x = r \cos x$ etc., weil z. B. der Sinus eines Winkels für den Halbmesser r offenbar um r mal gröfser ist, als der Sinus des nämlichen Winkels für den Halbmesser 1. Daraus folgt $\sin x = \frac{\overset{r}{\sin}\, x}{r}$, $\cos x = \frac{\overset{r}{\cos}\, x}{r}$, $\tang x = \frac{\overset{r}{\tang}\, x}{r}$, $\cot x = \frac{\overset{r}{\cot}\, x}{r}$, $\sec x = \frac{\overset{r}{\sec}\, x}{r}$, $\cosec x = \frac{\overset{r}{\cosec}\, x}{r}$. Hat man nun trigonometrische Formeln die für den Halbmesser 1 berechnet sind, und man will solche in andere für den Halbmesser r verwandeln, so kann solches auf der Stelle geschehen, wenn man $\frac{\sin x}{r}$ statt sin x, $\frac{\cos x}{r}$ statt cos x u. s. w. schreibt. In den meisten Fällen ist der Halbmesser willkürlich und kann also gleich 1 gesetzt werden. Für die wenigen Fälle in welchen der Halbmesser nicht willkürlich ist, kann man allemal wie so eben bemerkt, die für die Halbmesser 1 berechnete Formeln in andere für einen bestimmten Halbmesser r verwandeln. Es ist also keineswegs nöthig das Zeichen r für den Halbmesser allgemein beyzubehalten und überall durch die Rechnung mit zu führen. Alle hier folgenden Ausdrücke hätten, wenn r = 1 gesetzt worden wäre, um Etwas vereinfacht und übersichtlicher gemacht werden können.

A. d. Uebers.

Das doppelte Zeichen findet Statt, weil der nämliche Sinus MP zu zweyen Bogen AM und AM′ gehört, deren Cosinus CP und CP′ einander gleich sind, aber entgegengesetzte Zeichen haben, und der nämliche Cosinus CP zweyen Bogen AM und AN zugleich angehört, deren Sinus MP und PN einander gleich sind, aber entgegengesetzte Zeichen haben.

So z. B. findet man aus $\sin \frac{1}{3}\rho = \frac{1}{2}r$, $\cos \frac{1}{3}\rho$ oder $\sin \frac{1}{3}\rho = \sqrt{(r \;-\; \frac{1}{4}r^2)} = \sqrt{(\frac{3}{4}r^2)} = \frac{1}{2}r\sqrt{3}$.

17. *Aus dem gegebenen Sinus und Cosinus des Bogens A, läſst sich die Tangente, Secante, Cotangente und Cosecante dieses Bogens vermittelst folgender Ausdrücke finden.*

$$\text{tang } A = r \cdot \frac{\sin A}{\cos A}, \sec A = \frac{r^2}{\cos A}, \cot A = r \cdot \frac{\cos A}{\sin A}, \text{cosec } A = \frac{r^2}{\sin A}.$$

Denn die ähnlichen Dreyecke CPM, CAT, CDS geben die Proportionen

$$CP : PM = CA : AT \text{ oder } \cos A : \sin A = P : \text{tang } A = r\,\frac{\sin A}{\cos A}$$

$$CP : CM = CA : CT \text{ oder } \cos A : r = r : \sec A = \frac{r^2}{\cos A},$$

$$PM : CP = CD : DS \text{ oder } \sin A : \cos A = r : \cot A = r\,\frac{\cos A}{\sin A}$$

$$PM : CM = CD : DS \text{ oder } \sin A : r = r : \text{cosec } A = \frac{r^2}{\sin A},$$

woraus die obigen Formeln folgen. Uebrigens kann man auch die beiden letzten Formeln aus den beiden erstern unmittelbar finden, wenn man ρ — A statt A setzt. Diese Ausdrücke geben die Werthe und Zeichen der Tangenten, Secanten etc. für jeden Bogen, dessen Sinus und Cosinus man kennt. Da nun das Fortschreitungsgesetz der Sinus und Cosinus in Beziehung auf die zugehörigen Bogen, im vorigen Abschnitte ausführlich gezeigt ist, so kennt man auch mittelst der Formeln das Fortschreitungsgesetz für die Tangenten, Secanten etc.

Es bestätigen sich durch diese Formeln mehrere oben erwähnten Satze von den Tangenten, z. B. wenn $A = \rho$, so ist $\sin A = r$ und $\cos A = o$, also $\tang \rho = \frac{r^2}{o}$, welcher Ausdruck eine unendliche Gröfse bezeichnet; denn r^2 dividirt durch eine sehr kleine Gröfse würde einen sehr grofsen Quotienten geben, also giebt r^2 dividirt durch o einen Quotienten der gröfser ist als jede endliche Gröfse. Und weil o sowohl mit dem Zeichen + als — genommen werden kann, so hat $\tang \rho$ den doppelten Werth $\pm \infty$.

Ist $A = 2\rho - B$, so ist $\sin A = \sin B$ und $\cos A = -\cos B$, also $\tang 2\rho - B = \frac{r \sin B}{-\cos B} = -\frac{r \sin B}{\cos B} = -\tang B$, wie in (12).

18. Verbindet man die Formeln der vorigen Nummer mit einander und mit der Gleichung $\sin A^2 + \cos A^2 = r^2$, so erhält man neue merkwürdige Ausdrücke.

Zuerst ist $r^2 + \tang A^2 = r^2 + r^2 \frac{\sin A^2}{\cos A^2} = r^2 \frac{\sin A^2 + \cos A^2}{\cos A^2} = \frac{r^4}{\cos A^2}$ also ist $r^2 + \tang A^2 = \sec A^2$, wie es auch unmittelbar aus dem rechtwinkligen Dreyecke CAT folgt. Eben so ist, sowohl aus den Formeln, als aus dem rechtwinkligen Dreyecke CDS, $r^2 + \cos A^2 = \operatorname{cosec} A^2$.

Multiplicirt man die beiden Ausdrücke $\tang A = r \frac{\sin A}{\cos A}$ und $\cot A = r \frac{\cos A}{\sin A}$ in einander, so erhält man $\tang A \,.\, \cot A = r^2$, welches giebt $\cot A = \frac{r^2}{\tang A}$ und $\tang A = \frac{r^2}{\cot A}$. Eben so würde seyn $\cot B = \frac{r^2}{\tang B}$. Also ist $\cot A : \cot B = \tang B : \tang A$, das heifst, *die Cotangenten zweyer Bogen verhalten sich umgekehrt, wie ihre Tangenten.*

Dieser Ausdruck cot A . tang A $= r^2$ läſst sich auch unmittelbar aus den ähnlichen Dreyecken CAT und CDS finden; denn es ist AT : CA = CD : DS oder tang A : r = r : cot A.

19. *Wenn die Sinus und Cosinus zweyer Bogen a und b gegeben sind, so lassen sich die Sinus und Cosinus der Summe und der Differenz der Bogen durch folgende Ausdrücke finden.*

$$\sin(a+b) = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{r}$$

$$\sin(a-b) = \frac{\sin a \cos b - \cos a \sin b}{r}$$

$$\cos(a+b) = \frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b}{r}$$

$$\cos(a-b) = \frac{\cos a \cos b + \sin a \sin b}{r}.$$

Fig, 2. Der Halbmesser AC sey = r, der Bogen AB = a, BD = b, und folglich ABD = a + b. Aus B und D ziehe man BE und DF auf AC senkrecht, und DI, aus D auf BC senkrecht, endlich IK aus I auf AC senkrecht, und IC mit AL parallel.

Die ähnlichen Dreyecke BCE und ICK geben die Proportionen

CB : CI = BE : IK oder r : cos b = sin a : IK $= \frac{\sin a \cos b}{r}$,

CB : CI = CE : CK oder r : cos b = cos a : CK $= \frac{\cos a \cos b}{r}$.

Die Dreyecke DIL und CBE, welche, weil die Seiten des einen auf den Seiten des andern senkrecht stehen, ähnlich sind, geben die Proportionen

CB : DI = CE : DL oder r : sin b = cos a : DL $= \frac{\cos a \sin b}{r}$,

CB : DI = BE : IL oder r : sin b = sin a : IL $= \frac{\sin a \sin b}{r}$.

Es ist aber IK + DL = DF = sin (a + b) und CK = IL = CF = cos (a + b). Also ist

$$\sin(a+b) = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{r}$$

$$\cos(a+b) = \frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b}{r}$$

Die Werthe von sin (a — b) und cos (a — b) würden aus diesen beiden Formeln leicht gefunden werden können, indessen kann man sie auch unmittelbar aus der Figur nehmen. Denn wenn man den Sinus DI verlängert bis er den Umfang in M schneidet, so ist BM = BD = b und MI = ID = sin b. Durch M ziehe man MP auf AC senkrecht und MN mit AC parallel, so ist MN = IL und IN = DL, weil MI = DI. Es ist aber IK — IN = MP = sin (a — b) und CK + MN = CP = cos (a — b), also ist

$$\sin(a-b) = \frac{\sin a \cos b - \cos a \sin b}{r}$$

$$\cos(a-b) = \frac{\cos a \cos b + \sin a \sin b}{r}$$

wie oben.

Es läfst sich zweifeln ob dieser Beweis allgemein sey, weil in der dazu gebrauchten Figur die Bogen a und b, und selbst a + b kleiner sind als ρ. Es ist leicht, denselben auf Fälle auszudehnen, in welchen zwar a und b kleiner sind als ρ, ihre Summe a + b aber gröfser ist als ρ. Der Punct F fällt in diesem Fall auf die Verlängerung von AC, und die einzige Veränderung des Beweises würde seyn, dafs man cos (a + b) = — CF setzt. Da aber dann zugleich CF = IL — CK ist, so folgt immer wieder cos (a + b) = CK — IL oder r cos (a + b) = cos a cos b — sin a sin b. Nun setze man, die Formeln

$$r \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \text{ und}$$

$$r \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

wären für Werthe von a und b, die kleiner sind als die

Grenzen A und B, erwiesen, so behaupte ich, daſs sie auch noch Statt finden, wenn man die Grenzen A und B bis zu $\rho + A$ und B erweitert.

Denn für jedes x ist allgemein

$$\sin(\rho + x) = \cos x$$
$$\cos(\rho + x) = -\sin x.$$

Diese Gleichungen sind klar, wenn $x < \rho$. Daſs sie für jeden beliebigen Werth von x gelten, davon überzeugt man sich durch die 18te Figur, wo MM′ und M′M″ zwey auf einander senkrechte Durchmesser sind, und wo man nach und nach für x die Bogen AM, ADM′, ADBM″, ADBEM‴, und eben diese Bogen mit so vielen ganzen Umfängen vermehrt, als man will, annehmen kann.

Nun sey $x = m + b$, so ist

$$\sin(\rho + m + b) = \cos(m + b)$$
$$\cos(\rho + m + b) = -\sin(m + b).$$

Nach der Vorausszetung kennt man die Werthe der zweyten Glieder, so lange m und b nicht die Grenzen A und B überschreiten. Also ist, dieser Voraussetzung gemäſs,

$$r \sin(\rho + m + b) = \cos m \cos b - \sin m \sin b$$
$$r \cos(\rho + m + b) = -\sin m \cos b - \cos m \sin b$$

Es sey $\rho + m = a$. Da $\sin(r + m) = \cos m$ und $\cos(\rho + m) = -\sin m$, so ist $\cos m = \sin a$ und $\sin m = -\cos a$. Substituirt man dieses in die vorigen Gleichungen, so erhält man

$$r \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$r \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Daraus folgt, daſs die Ausdrücke, die vorhin nur innerhalb der Grenzen $a < A$, $b < B$ bewiesen waren, jetzt für die ausgedehntern Grenzen $a < \rho + A$ und $b < B$ gelten. Auf dieselbe Weise kann nun wieder die Grenze von b um ρ erweitert werden, hierauf wiederum die Grenze von a u. s. w.

Mithin finden die Formeln ohne Ausnahme Statt, wie grofs auch a und b seyn mögen *).

Da der Bogen a gleich der Summe der Bogen a — b und b ist, so ist nach den obigen Formeln:

$$r \sin a = \sin (a - b) \cos b + \cos (a - b) \sin b$$
$$r \cos a = \cos (a - b) \cos b - \sin (a - b) \sin b,$$

woraus folgt:

$$r \sin (a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$
$$r \cos (a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \text{ **)},$$

welche Ausdrücke ebenfalls für jeden beliebigen Werth von a und b Statt finden.

20. Wenn man in den obigen Formeln b = a setzt, so geben die erste und dritte

$$\sin 2a = \frac{2 \sin a \cos a}{r}, \quad \cos 2a = \frac{\cos a^2 - \sin a^2}{r}.$$

Diese Formeln drücken den Sinus und Cosinus des zweyfachen Bogens durch den Sinus und Cosinus des

*) Dieser wichtige Beweis darf unstreitig nicht übergangen werden, weil sonst die Ausdehnung der aus der Figur nur für $a + b < \varrho$ bewiesenen Formeln auf gröfsere Winkel, durch Nichts gerechtfertigt ist.

A. d. Uebers.

**) Nämlich wenn man die erste Formel mit cos b, die zweyte mit sin b multiplicirt, so erhält man

$$r \sin a \cos b = \sin (a - b) \cos b^2 + \cos (a - b) \sin b \cos b$$
$$r \cos a \sin b = \cos (a - b) \cos b \sin b - \sin (a - b) \sin b^2$$

zieht man diese beiden Ausdrücke von einander ab, so erhält man

$$r (\sin a \cos b - \cos a \sin b) = \sin (a - b) (\cos b^2 + \sin b^2)$$

und weil $\cos b^2 + \sin b^2 = r^2$ ist

$$r (\sin a \cos b - \cos a \sin b) = r^2 \sin (a - b) \text{ oder}$$
$$r \sin (a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b,$$

welches das erste obige Resultat ist. Auf eine ähnliche Weise findet man das andere.

A. d. Uebers.

einfachen Bogens aus. Sie enthalten die Auflösung der Aufgabe von Verdoppelung eines Winkels.

Um einen Winkel a zu halbiren, setze man in die obigen Formeln $\frac{1}{2}$a statt a, so kommt

$$\sin a = \frac{2 \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a}{r}, \quad \cos a = \frac{\cos \frac{1}{2} a^2 - \sin \frac{1}{2} a^2}{r}.$$

Weil nun $\cos \frac{1}{2} a^2 + \sin \frac{1}{2} a^2 = r^2$ und $\cos \frac{1}{2} a^2 - \sin \frac{1}{2} a^2 = r \cos a$, so ist $\cos \frac{1}{2} a^2 = \frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{2} r \cos a$ und $\sin \frac{1}{2} a^2 = \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{2} r \cos a$, also

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{(\tfrac{1}{2} r^2 - \tfrac{1}{2} r \cos a)}$$
$$\cos \tfrac{1}{2} a = \sqrt{(\tfrac{1}{2} r^2 + \tfrac{1}{2} r \cos a)}.$$

Setzt man also $a = \rho$, oder $\cos a = 0$, so ist $\sin \frac{1}{2} \rho = \cos \frac{1}{2} \rho = \sqrt{(\frac{1}{2} r^2)} = r\sqrt{\frac{1}{2}}$. Setzt man ferner $a = \frac{1}{2} \rho$, welches $\cos a = r\sqrt{\frac{1}{2}}$ giebt, so ist $\sin \frac{1}{4} \rho = r\sqrt{(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}})}$ und $\cos \frac{1}{4} \rho = r\sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}})}$.

21. Man kann auch $\sin \frac{1}{2}$ a und $\cos \frac{1}{2}$ a durch sin a ausdrücken, welches zuweilen nöthig ist; nämlich wie folgt:

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \tfrac{1}{2}\sqrt{(r^2 + r \sin a)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(r^2 - r \sin a)}$$
$$\cos \tfrac{1}{2} a = \tfrac{1}{2}\sqrt{(r^2 + r \sin a)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(r^2 - r \sin a)}.$$

Denn, quadrirt man die erste dieser Gleichungen, so ist $\sin \frac{1}{2} a^2 = \frac{1}{4} (r^2 + r \sin a) + \frac{1}{4} (r^2 - r \sin a) - \frac{1}{2}\sqrt{(r^4 - r^2 \sin a^2)} = \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{2} r \cos a$. Quadrirt man die zweyte Gleichung, so erhält man $\cos \frac{1}{2} a^2 = \frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{2} r \cos a$, welches mit den obigen Ausdrücken von $\sin \frac{1}{2}$ a und $\cos \frac{1}{2}$ a übereinstimmt. Die Wurzelgröſse $\sqrt{(r^2 - r \sin a)}$ in den Ausdrücken von $\sin \frac{1}{2}$ a und $\cos \frac{1}{2}$ a muſs mit entgegengesetzten Zeichen genommen werden, wenn cos a negativ ist, wodurch die eine Formel in die andere übergeht.

22. Aus diesen Formeln lassen sich leicht die Sinus und Cosinus aller Zehntheile des Quadranten finden.

Es sey zuerst $\sin \frac{1}{5} \rho = x$, so ist 2x die Sehne von $\frac{2}{5} \rho$, oder die Sehne des regelmäſsigen eingeschriebenen Zehnecks. Diese Seite ist gleich dem gröſsern Theil des

im mittlern und äussern Verhältnisse getheilten Halbmessers (4s B. 5r S.). Setzt man also den Halbmesser $= 1$, so ist $1 : 2x = 2x = 1 - 2x$. Daraus folgt $4x^2 = 1 - 2x$, oder $x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}$, also $(x + \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$, oder $x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{5}$ und x oder $\sin \frac{1}{5}\rho = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5})$.

Dieses quadrirt giebt $\sin \frac{1}{5}\rho^2 = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{16}$; also ist $1 - \sin \frac{1}{5}\rho^2$, oder $\cos \frac{1}{5}\rho^2 = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}$. Aber $\cos a^2 - \sin a^2 = \cos 2a$, also ist $\cos \frac{2}{5}\rho$, oder $\sin \frac{3}{5}\rho = \frac{4 + 4\sqrt{5}}{16} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

Setzt man nun in den Formeln No 21, $r = 1$, $a = \frac{1}{5}\rho$ und $\sin a = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5})$ so erhält man

$$\sin \tfrac{1}{10}\rho = \tfrac{1}{4}\sqrt{(3 + \sqrt{5})} - \tfrac{1}{4}\sqrt{(5 - \sqrt{5})}$$
$$\cos \tfrac{1}{10}\rho = \tfrac{1}{4}\sqrt{(3 + \sqrt{5})} + \tfrac{1}{4}\sqrt{(5 - \sqrt{5})}.$$

Setzt man darauf in die nämlichen Formeln $a = \frac{6}{10}\rho$ und $\sin a = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$, so erhält man

$$\sin \tfrac{3}{10}\rho = \tfrac{1}{4}\sqrt{(5 + \sqrt{5})} - \tfrac{1}{4}\sqrt{(3 - \sqrt{5})}$$
$$\cos \tfrac{3}{10}\rho = \tfrac{1}{4}\sqrt{(5 + \sqrt{5})} + \tfrac{1}{4}\sqrt{(3 - \sqrt{5})}.$$

Aus diesen Ausdrücken und den schon bekannten von $\sin \frac{1}{2}\rho$ und $\sin \rho$ erhält folgende Tafel:

$$\sin 0 = \cos \rho = 0$$
$$\sin \tfrac{1}{10}\rho = \cos \tfrac{9}{10}\rho = \tfrac{1}{4}\sqrt{(3 + \sqrt{5})} - \tfrac{1}{4}\sqrt{(5 - \sqrt{5})}$$
$$\sin \tfrac{2}{10}\rho = \cos \tfrac{8}{10}\rho = \tfrac{1}{4}(-1 + \sqrt{5})$$
$$\sin \tfrac{3}{10}\rho = \cos \tfrac{7}{10}\rho = \tfrac{1}{4}\sqrt{(5 + \sqrt{5})} - \tfrac{1}{4}\sqrt{(5 - \sqrt{5})}$$
$$\sin \tfrac{4}{10}\rho = \cos \tfrac{6}{10}\rho = \tfrac{1}{4}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$$
$$\sin \tfrac{5}{10}\rho = \cos \tfrac{5}{10}\rho = \tfrac{1}{4}\sqrt{2}$$
$$\sin \tfrac{6}{10}\rho = \cos \tfrac{4}{10}\rho = \tfrac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$$
$$\sin \tfrac{7}{10}\rho = \cos \tfrac{3}{10}\rho = \tfrac{1}{4}\sqrt{(5 + \sqrt{5})} + \tfrac{1}{4}\sqrt{(3 - \sqrt{5})}$$
$$\sin \tfrac{8}{10}\rho = \cos \tfrac{2}{10}\rho = \tfrac{1}{4}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}$$
$$\sin \tfrac{9}{10}\rho = \cos \tfrac{1}{10}\rho = \tfrac{1}{4}\sqrt{(3 + \sqrt{5})} + \tfrac{1}{4}\sqrt{(5 - \sqrt{5})}$$
$$\sin \rho = \cos 0 = 1.$$

Diese Ausdrücke können auch noch vereinfacht werden, weil $\sqrt{(3 + \sqrt{5})} = \frac{1}{2}\sqrt{10} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $\sqrt{(3 - \sqrt{5})}$

$= \frac{1}{2} \sqrt{10} - \frac{1}{2} \sqrt{2}$ ist, woraus folgt, daſs, wenn man $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ und $\sqrt{10}$ als bekannt annimmt, nur vier Wurzelausziehungen nöthig sind, um die Sinus und Cosinus aller Zehntheile des Quadranten zu finden.

21. Aus diesen Formeln folgen auch nachstehende zwey merkwürdige Sätze.

Erstlich: weil $2 \sin \frac{2}{5} \rho$ die Sehne von $\frac{4}{5} \rho$, oder die Seite des eingeschriebenen regelmäſsigen Fünfecks ist, so ist diese Seite $= \frac{1}{2} \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$ und ihr Quadrat $= \frac{10 - 2\sqrt{5}}{4}$. Die Seite des regelmäſsigen Zehnecks ist $2 \sin \frac{2}{10} \rho = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$ und ihr Quadrat $= \frac{1}{2}(6 - 2\sqrt{5})$. Es ist aber $\frac{1}{4}(10 - 2\sqrt{5}) = 1 + \frac{1}{4}(6 - 2\sqrt{5})$. *Also ist die Summe der Quadrate des Halbmessers und der Seite des Zehnecks gleich dem Quadrate der Seite des eingeschriebenen regelmäſsigen Fünfecks* *).

*) Dieser Satz läſst sich auch ohne vorherige Auflösung in Zahlen, wie folgt, beweisen, und zugleich noch etwas vervollständigen. Die halbe Seite eines beliebigen eingeschriebenen regelmäſsigen Vielecks mit einer graden Seitenzahl 2n sey nämlich x, so daſs also $x = \sin \frac{4\varrho}{2n}$ ist; die halbe Seite des eingeschriebenen regelmäſsigen Vielecks von der halben Seitenzahl n sey z, so daſs $z = \sin \frac{4\varrho}{n}$, so ist $z = 2x \sqrt{(1 - x^2)}$, weil $\sin \frac{4\varrho}{n}$ oder $\sin 2 \left(\frac{4\varrho}{2n}\right) = 2 \sin \frac{4\varrho}{2n} \cos \frac{4\varrho}{2n}$ ist (20). Soll nun die Summe der Quadrate des Halbmessers und der Seite des ersten Vielecks, dem Quadrate der Seite des zweyten Vielecks gleich seyn, so muſs seyn $4z^2 = 4x^2 + 1$, also $16x^2(1 - x^2) = 4x^2 + 1$, oder $16x^4 - 12x^2 + 1 = 0$, oder $(4x^2 - 1)^2 - 4x^2 = 0$, oder $(4x^2 - 1 - 2x)(4x^2 - 1 + 2x) = 0$, woraus folgt $4x^2 - 1 - 2x = 0$ und $4x^2 - 1 + 2x = 0$, oder

$$4x^2 = 1 \pm 2x.$$

Zweytens. Für die Sinus der ungraden Zahlen von Zehntheilen des Quadranten findet folgende Gleichung Statt:

$$\sin \tfrac{1}{10}\varrho + \sin \tfrac{3}{10}\varrho + \sin \tfrac{9}{10}\varrho = \sin \tfrac{5}{10}\varrho + \sin \tfrac{7}{10}\varrho,$$

für die Sinus der graden Zahlen von Zehntheilen das Verhältniſs:

$$\sin \tfrac{6}{10}\varrho = \sin \tfrac{2}{10} + \tfrac{1}{2}.$$

Doch diese Formeln enthalten nur einzelne Fälle von all-

Nun ist für das Zehneck wirklich $4x^2 = 1 - 2x$, weil $1 : 2x = 2x = 1 - 2x$ ist (4s B. 5r S.), also findet die vorausgesetzte Eigenschaft zwischen dem Zehneck und Fünfeck Statt, wie behauptet wird. Die andere Bedingungsgleichung $4x^2 - 2x - 1 = 0$ giebt $x = \frac{1}{4} \pm \sqrt{(\frac{1}{16} + \frac{1}{4})}$, oder $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Für das Zehneck war nach der ersten, $4x^2 + 2x - 1$, und $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Beide Bedingungsgleichungen geben eigentlich nur zwey von einander verschiedene Werthe von x, nämlich $\pm \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$ und $\pm \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$, denn ob der Werth von x im ganzen positiv oder negativ genommen wird, ändert in seiner Gröſse nichts. Der erste Werth von x, nämlich $\pm \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$, entspricht wie vorhin bewiesen, dem Zehneck, also die Sehne 2x, einem Winkel von $\frac{1}{10}$ des Umfangs am Mittelpuncte; der zweyte Werth von x, nämlich $\pm \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$, entspricht, wie aus Legendres obiger Tafel zu sehen, einem Winkel von $\frac{6}{10}\varrho$; also die Sehne 2x einem Winkel von $2 \cdot \frac{6}{10}\varrho = \frac{2 \cdot 6}{10 \cdot 4} \cdot 4\varrho = \frac{3}{10} \cdot 4\varrho$; also von $\frac{3}{10}$ des Umfanges, *mithin haben eigentlich nicht allein die Sehnen von $\frac{1}{10}$ und $\frac{2}{10}$ des Umfanges, welche das regelmäſsige Zehneck und Fünfeck bilden, die Eigenschaft, daſs die Summe der Quadrate des Halbmessers und der ersten, dem Quadrate der zweyten gleich ist, sondern auch die Sehnen von $\frac{3}{10}$ und $\frac{6}{10}$ des Umfanges.*

A. d. Uebers.

gemeinern Verhältnissen. Es kann bewiesen werden, daſs für jeden beliebigen Bogen

$$\sin(\varrho - x) + \sin(\tfrac{1}{5}\varrho + x) + \sin(\tfrac{1}{5}\varrho - x) = \sin(\tfrac{3}{5}\varrho - x) + \sin(\tfrac{3}{5}\varrho + x)$$

ist. Denn die Formel $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b$ giebt $\sin(\tfrac{1}{5}\varrho + x) + \sin(\tfrac{1}{5}\varrho - x) = 2 \sin \tfrac{1}{5}\varrho \cos x$ und

$$\sin(\tfrac{3}{5}\varrho + x) + \sin(\tfrac{3}{5}\varrho - x) = 2 \sin \tfrac{3}{5}\varrho \cos x$$

also, weil $\sin \tfrac{3}{5}\varrho - \sin \tfrac{1}{3}\varrho = \tfrac{1}{2}$ und $\cos x = \sin(\varrho - x)$ ist, wenn man eine Gleichung von der andern abzieht,

$$\sin(\tfrac{3}{5}\varrho - x) + \sin(\tfrac{3}{5}\varrho - x) - \sin(\tfrac{1}{5}\varrho + x) - \sin(\tfrac{1}{5}\varrho - x) = \sin(\varrho - x),$$

aus welcher Gleichung sich die Gleichung für die ungraden Theile finden läſst, wenn man $x = \tfrac{1}{10}\varrho$ setzt. Auch dient die allgemeine Formel zur Prüfung der Sinustafeln.

24. Wenn man in der ersten und dritten Formel des 19ten Art. $b = 2a$ setzt, so erhält man

$$\sin 3a = \frac{\sin 2a \cos a + \cos 2a \sin 3a}{r},\ \cos 3a = \frac{\cos 2a \cos a - \sin 2a \sin a}{r}.$$

Setzt man in diese Ausdrücke statt $\sin 2a$ und $\cos 2a$ ihre Werthe aus dem 20sten Art. und reducirt die Resultate mittelst der Gleichung $\sin a^2 + \cos a^2 = r^2$, so erhält man

$$\sin 3a = 3 \sin a - \frac{4 \sin a^3}{r^2}$$

$$\cos 3a = \frac{4 \cos a^3}{r^2} - 3 \cos a.$$

Diese Formeln für die Verdreyfachung der Bogen dienen auch zur Theilung derselben in drey gleiche Theile. Denn wenn man $\sin 3a = c$ und $\sin a = x$ setzt, so erhält man zur Bestimmung von x die Gleichung $cr^2 = 3r^2 x - 4x^3$; woraus folgt, daſs die Theilung eines Winkels in drey gleiche Theile, analytisch betrachtet, von einer Gleichung des dritten Grades abhängt.

Macht man in den obigen Formeln (19.) nach und nach $b = 3a$, $b = 4a$ u. s. w., so erhält man die Sinus und Cosinus der Bogen $4a$, $5a$ u. s. w., das heiſst, all-

gemein, die Sinus und Cosinus der Vielfachen von a. Umgekehrt geben die Formeln welche zur Vervielfachung der Winkel dienen, Gleichungen, durch deren Auflösung die Theilung des Bogens in eben so viele gleiche Theile bewerkstelligt werden, das heifst, sin a oder cos a aus sin na und cos na gefunden werden kann.

25. Wir wollen noch die Werthe von sin 5a und cos 5a entwickeln und uns dazu der Formeln

$$\sin(3a + 2a) = \frac{\sin 3a \cos 2a + \cos 3a \sin 2a}{r}$$

$$\cos(3a + 2a) = \frac{\cos 3a \cos 2a - \sin 3a \sin 2a}{r}$$

bedienen. Setzt man in dieselben die (Art. 20 und 24) gefundenen Ausdrücke, so erhält man nach gehöriger Reduction

$$\sin 5a = 5 \sin a - \frac{20 \sin a^3}{r^2} + \frac{16 \sin a^5}{r^4}$$

$$\cos 5a = 5 \cos a - \frac{20 \cos a^3}{r^2} + \frac{16 \cos a^5}{r^4}$$

woraus folgt, dafs die Aufgabe, einen Winkel in fünf gleiche Theile zu theilen, vom fünften Grade ist. Eben so verhält es sich mit allen übrigen Theilungen durch die Primzahlen 7, 11, 13 etc.

26. Es sey z. B. der Werth des Sinus $\frac{1}{100}\rho$ bis auf 15 Decimalstellen zu suchen, welches bey Berechnung der Sinustafeln vorkommt. Der Ausdruck von sin $\frac{1}{10}\rho$ (Art. 22) für $r = 1$ in einen Decimalbruch verwandelt giebt sin $\frac{1}{10}\rho$ $= 0{,}15643\ 44650\ 40231$. Daraus findet man mittelst der Formel No. 21, sin $\frac{1}{10}\rho = 0{,}07845\ 90957\ 27845$. Nun sey sin $\frac{1}{100}\rho = x$, so mufs, um x zu finden, die Gleichung

$$16x^5 - 20x^3 + 5x = 0{,}07845\ 90957\ 27845$$

aufgelöset werden. Bezeichnet man das zweyte Glied der Kürze wegen durch c, so ist näherungsweise $5x - 20x^3 = c$ und $x = \frac{1}{5}c + 4(\frac{1}{5}c)^3$. Nun ist $\frac{1}{5}c = 0{,}01569\ 18191$ und $4(\frac{1}{5}c^3) = 0{,}00001\ 5456$, also erhält man durch die erste

Näherung $x = 0{,}0157073$, welcher Werth erst in der achten Decimalstelle vom wahren Werthe abweicht. Um ihn genauer zu finden, sey $x = 0{,}0157073 + y$, so erhält man durch die Substitution in die gegebene Gleichung, wenn man das Quadrat und die übrigen Potenzen von y wegläſst,

$$0{,}078459009424927 + 4{,}9852017\ y = 0{,}0784590095727845$$

woraus folgt $y = 0{,}0000000173118207$ und

$$x \text{ oder } \sin \tfrac{1}{100} \rho = 0{,}01570\ 73173\ 118207.$$

Aus dem Sinus von $\frac{1}{100}\rho$ findet man durch ein ähnliches Verfahren den Sinus von $\frac{1}{200}\rho$ von $\frac{1}{1000}\rho$ und endlich von $\frac{1}{10000}\rho$.

27. Aus den Formeln des 19ten Art. lassen sich eine groſse Menge anderer ableiten, von welchen wir nur diejenigen hersetzen wollen, welche am häufigsten vorkommen. Erstlich folgende vier:

$$\sin a \cos b = \tfrac{1}{2} r \sin (a + b) + \tfrac{1}{2} r \sin (a - b)$$
$$\sin b \cos a = \tfrac{1}{2} r \sin (a + b) - \tfrac{1}{2} r \sin (a - b)$$
$$\cos a \cos b = \tfrac{1}{2} r \cos (a - b) + \tfrac{1}{2} r \cos (a + b)$$
$$\sin a \sin b = \tfrac{1}{2} r \cos (a - b) - \tfrac{1}{2} r \cos (a + b)$$

mittelst welcher man ein *Product* mehrerer Cosinus oder Sinus in eine *Summe* einzelner Cosinus und Sinus, die nur in unveränderliche Gröſsen multiplicirt sind, verwandeln kann.

28. Setzet man in diesen Ausdrücken $a + b = p$, $a - b = q$, so daſs $a = \frac{p+q}{2}$, $b = \frac{p-q}{2}$, so erhält man

$$\sin p + \sin q = \frac{2}{r} \sin \tfrac{1}{2}(p + q) \cos \tfrac{1}{2}(p - q)$$

$$\sin p - \sin q = \frac{2}{r} \sin \tfrac{1}{2}(p - q) \cos \tfrac{1}{2}(p + q)$$

$$\cos p + \cos q = \frac{2}{r} \cos \tfrac{1}{2}(p + q) \cos \tfrac{1}{2}(p - q)$$

$$\cos q - \cos p = \frac{2}{r} \sin \tfrac{1}{2}(p + q) \sin \tfrac{1}{2}(p - q).$$

Dieser Formeln bedient man sich bey trigonometrischen Rechnungen häufig, um zwey Glieder in eines zusammen zu ziehen.

29. Endlich findet man aus diesen Formeln durch die Division, und in Erwägung dafs $\frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\text{tang}\, a}{r} = \frac{r}{\cot a}$ folgende:

$$\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{\sin \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q)}{\cos \frac{1}{2}(p+q) \sin \frac{1}{2}(p-q)} = \frac{\text{tang}\, \frac{1}{2}(p+q)}{\text{tang}\, \frac{1}{2}(p-q)}$$

$$\frac{\sin p + \sin q}{\cos p + \cos q} = \frac{\sin \frac{1}{2}(p+q)}{\cos \frac{1}{2}(p+q)} = \frac{\text{tang}\, \frac{1}{2}(p+q)}{r}$$

$$\frac{\sin p + \sin q}{\cos q - \cos p} = \frac{\cos \frac{1}{2}(p-q)}{\sin \frac{1}{2}(p-q)} = \frac{\cot \frac{1}{2}(p-q)}{r}$$

$$\frac{\sin p - \sin q}{\cos p + \cos q} = \frac{\sin \frac{1}{2}(p-q)}{\cos \frac{1}{2}(p-q)} = \frac{\text{tang}\, \frac{1}{2}(p-q)}{r}$$

$$\frac{\sin p - \sin q}{\cos q - \cos p} = \frac{\cos \frac{1}{2}(p+q)}{\sin \frac{1}{2}(p+q)} = \frac{\cot \frac{1}{2}(p+q)}{r}$$

$$\frac{\cos p + \cos q}{\cos q - \cos p} = \frac{\cos \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q)}{\sin \frac{1}{2}(p+q) \sin \frac{1}{2}(p-q)} = \frac{\cot \frac{1}{2}(p-q)}{\text{tang}\, \frac{1}{2}(p-q)}$$

$$\frac{\sin (p+q)}{\sin p + \sin q} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p+q)}{2 \sin \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q)} = \frac{\cos \frac{1}{2}(p+q)}{\cos \frac{1}{2}(p-q)}$$

$$\frac{\sin (p+q)}{\sin p - \sin q} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p+q)}{2 \sin \frac{1}{2}(p-q) \cos \frac{1}{2}(p+q)} = \frac{\sin \frac{1}{2}(p+q)}{\sin \frac{1}{2}(p-q)}.$$

Diese Formeln sind die Ausdrücke eben so vieler Lehrsätze. Aus der ersten folgt, dafs sich die Summen der Sinus zweyer Bogen zur Differenz der Sinus verhält, wie die Tangente der halben Summe der Bogen zur Tangente ihrer halben Differenz.

30. Macht man in den Formeln der drey letzten Artikel $b = a$ oder $q = 0$, so erhält man Folgendes:

$$\cos a^2 = \tfrac{1}{2} r^2 + \tfrac{1}{2} r \cos 2a$$

$$\sin a^2 = \tfrac{1}{2} r^2 - \tfrac{1}{2} r \cos 2a$$

$$r + \cos p = \frac{2 \cos \frac{1}{2} p^2}{r}$$

$$r - \cos p = \frac{2 \cos \frac{1}{2} p^2}{r}$$

$$\sin p = \frac{2 \sin \frac{1}{2} p \cos \frac{1}{2} p}{r}$$

$$\frac{\sin p}{r + \cos p} = \frac{\tang \frac{1}{2} p}{r} = \frac{r}{\cot \frac{1}{2} p}$$

$$\frac{\sin p}{r - \cos p} = \frac{\cot \frac{1}{2} p}{r} = \frac{r}{\tang \frac{1}{2} p}$$

$$\frac{r + \cos p}{r - \cos p} = \frac{\cot \frac{1}{2} p^2}{r^2} = \frac{r^2}{\tang \frac{1}{2} p}$$

31. Um auch einiger Formeln für die Tangenten zu gedenken, wollen wir den Ausdruck tang $(a + b) = \frac{r \sin (a + b)}{\cos (a + b)}$ näher betrachten. Substituirt man in denselben die Werthe von $\sin (a + b)$ und $\cos (a + b)$ so erhält man

$$\tang (a + b) = r \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}.$$

Nun ist $\sin a = \frac{\cos a \tang a}{r}$ und $\sin b = \frac{\cos b \tang b}{r}$. Substituirt man diese Werthe und dividirt oben und unten mit cos a cos b, so erhält man

$$\tang (a + b) = \frac{r^2 (\tang a + \tang b)}{r^2 - \tang a \tang b}.$$

Dieses ist der Ausdruck der Tangente der Summe zweyer Bogen durch die Tangenten der Bogen selbst. Man findet auf dieselbe Weise die Tangente der Differenz zweyer Bogen

$$\tang (a - b) = \frac{r^2 (\tang a - \tang b)}{r^2 + \tang a \tang b}.$$

Wenn $b = a$ ist, so erhält man für den zweyfachen Bogen folgende Formel:

$$\tang 2a = \frac{2 r^2 \tang a}{r^2 - \tang a^2},$$

woraus folgt:

$$\cot 2a = \frac{r^2}{\tan g\, 2a} = \frac{r^2}{2 \tan g\, a} - \tfrac{1}{2} \tan g\, a = \tfrac{1}{2} \cot a - \tfrac{1}{2} \tan g\, a.$$

Wenn b = 2a ist, so erhält man für den dreyfachen Bogen

$$\tan g\, 3a = \frac{r^2 (\tan g\, a + \tan g\, 2a)}{r^2 - \tan g\, a \tan g\, 2a}.$$

Setzt man hierin den Ausdruck von tang 2a, so erhält man

$$\tan g\, 3a = \frac{3r^2 \tan g\, a - \tan g\, a^3}{r^3 - 3 \tan g\, a^2}.$$

32. Die Entwickelung trigonometrischer Formeln in ihrer ganzen Allgemeinheit macht einen wichtigen Theil der Analysis aus, über welchen Eulers vortreffliche Introductio in anal. inf., oder die Uebersetzung dieses Werks von Labey *) nachgesehen werden können. Hier glauben wir die Formeln entwickeln zu müssen, welche den Sinus und Cosinus durch den Bogen geben. Diese Formeln sind oben in der 4ten Anmerkung als bekannt angenommen, und zur Verfertigung der Sinustafeln nöthig.

Setzt man r = 1, welches die Allgemeinheit der Resultate nicht vermindert, so ist $\sin a^2 + \cos a^2 = 1$. Das erste Glied kann als das Product zweyer unmöglichen Factoren $\cos A + \sqrt{-1} \sin A$ und $\cos A - \sqrt{-1} \sin A$ angesehen werden. Multiplicirt man zwey ähnliche Factoren $\cos A + \sqrt{-1} \sin A$ und $\cos B + \sqrt{-1} \sin B$ in einander, so ist das Product $\cos A \cos B - \sin A \sin B + (\sin A \cos B + \cos A \sin B) \sqrt{-1}$. Dieses Product läſst sich auch durch $\cos (A + B) + \sqrt{-1} \sin (A + B)$ ausdrücken. In der letzten Gestalt ist es jedem der beiden einzelnen Factoren ähnlich. Also ist allgemein

$$(\cos A + \sin A - \sqrt{-1})(\cos B + \sqrt{1} \sin B) = \cos (A+B) + \sqrt{-1} \sin (A+B).$$

*) so wie Lagrange leçons sur le calcul des fonctions: leçons X et XI. A. d. Uebers.

Zu bemerken ist, daſs die Multiplication solcher Gröſsen auch durch Addition verrichtet werden kann, wie bey Logarithmen. Man findet nach und nach

$$(\cos A + \sqrt{-1} \sin A)(\cos A + \sqrt{-1} \sin A) = \cos 2A + \sqrt{-1} \sin 2A$$
$$(\cos A + \sqrt{-1} \sin A)(\cos 2A + \sqrt{-1} \sin 2A) = \cos 3A + \sqrt{-1} \sin 3A$$
$$(\cos A + \sqrt{-1} \sin A)(\cos 3A + \sqrt{-1} \sin 3A) = \cos 4A + \sqrt{-1} \sin 4A$$
etc.

Das erste Product ist gleich $(\cos A + \sqrt{-1} \sin A)^2$ das zweyte $(\cos A + \sqrt{-1} \sin A)^3$ u. s. w.; also ist allgemein, wenn n irgend eine ganze Zahl bedeutet,

$$(\cos A + \sqrt{-1} \sin A)^n = \cos nA + \sqrt{-1} \sin nA,$$

daraus folgt, wenn man das Zeichen von $\sqrt{-1}$ verändert,

$$(\cos A - \sqrt{-1} \sin A)^n = \cos nA - \sqrt{-1} \sin nA.$$

Aus diesen beiden Gleichungen, welche eine aus der andern folgen, findet man folgende Ausdrücke für sin n A und cos n A, nämlich

$$\cos nA = \tfrac{1}{2}(\cos A + \sqrt{-1} \sin A)^n + \tfrac{1}{2}(\cos A - \sqrt{-1} \sin A)^n$$

$$\sin nA = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(\cos A + \sqrt{-1} \sin A)^n - \frac{1}{2\sqrt{-1}}(\cos A - \sqrt{-1} \sin A)^n.$$

33. Will man diese Gröſsen durch Reihen ausdrücken, so muſs $(\cos A + \sqrt{-1} \sin A)^n$ durch die Binomialformel entwickelt werden. Dieses giebt

$$\cos A^n + \frac{n}{1} \cos A^{n-1} \sin A \sqrt{-1} - \frac{n.n-1}{1.2} \cos A^{n-2} \sin A^2$$
$$- \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} \cos A^{n-3} \sin A^3 \sqrt{-1} + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}$$
$$\cos A^{n-4} \sin^4 A \ldots.$$

Da diese Gröſse der Werth von $\cos nA + \sqrt{-1} \sin nA$ ist, so kann der mögliche Theil derselben mit cos n A, der unmögliche mit $\sqrt{-1} \sin nA$ verglichen werden. Also ist

$$\cos nA = \cos A^n - \frac{n.n-1}{1.2.} \cos A^{n-2} \sin A^2 + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}.$$
$$\cos A^{n-4} \sin A^4 \ldots.$$

$$\sin nA = n \cos A^{n-1} \sin A - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} \cos A^{n-3} \sin A^3 \ldots$$

Das Gesetz dieser Reihen ist sehr deutlich. Man findet durch dieselben den Sinus und Cosinus eines vielfachen Bogens A viel schneller als durch die Operationen Art. 24.

34. Weil $\sin A = \cos A \tan A$, so können die obigen Reihen auch auf folgender Gestalt gebracht werden:

$$\cos nA = \cos A^n \left(1 - \frac{n.n-z}{1.2} \text{tang} A^2 + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} \text{tang} A^4 \ldots\right)$$

$$\sin nA = \cos A^n \left(\frac{n}{1} \text{tang} A - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} \text{tang} A^3 \ldots\right)$$

Es sey $n = \frac{x}{A}$, so ist, wenn man $\frac{x}{A}$ statt n setzt, und den Factor $\cos A^n$ beybehält,

$$\cos x = \cos A^n \left(1 - \frac{x.x-A}{1.2} \frac{\text{tang} A^2}{A^2} + \frac{x.x-A.x-2A.x-3A}{1.2.3.4} \frac{\text{tang} A^4}{A^4} \ldots\right)$$

$$\sin x = \cos A^n \left(\frac{x}{1} \frac{\text{tang} A}{A} \quad \frac{x.x-A.x-2A}{1.2.3} \frac{\text{tang} A^3}{A^3} \ldots\right)$$

In diesen Ausdrücken ist A willkürlich. Man nehme A sehr klein an, so ist $\frac{\text{tang} A}{A}$ von der Einheit sehr wenig verschieden, weil die Tangente eines sehr kleinen Bogens beynahe dem Bogen gleich ist. Inzwischen ist immer, so lange nicht der Bogen Null ist, $\text{tang} A > A$ *), oder $\frac{\text{tang} A}{A} > 1$ und $A > \sin A$ **). Also ist $\frac{\text{tang} A}{A} < \frac{\text{tang} A}{\sin A}$ oder $\frac{\text{tang} A}{A} < \frac{1}{\cos A}$. Daraus folgt, daſs der Quotient $\frac{\text{tang} A}{A}$

*) Fig. 1. AT ist gröſser als AM, weil sich das Dreyeck ATC zum Ausschnitte ACM wie $AT \times \frac{1}{2} AC$ zu $AM \times \frac{1}{2} AC$, oder wie AT zu AM verhält. A. d. Verf.

**) AM ist gröſser als MP, weil der Bogen MAN gröſser ist als die Sehne MN. A. d. Verf.

immer zwischen den Grenzen 1 und $\frac{1}{\cos A}$ liegt. Es sey $A = 0$, so ist $\cos A = 1$. Weil nun $\frac{\tang A}{A}$ immer zwischen 1 und $\frac{1}{\cos A}$ liegt, so ist genau $\frac{\tang A}{A} = 1$ für $A = 0$. Setzt man also oben $A = 0$, so erhält man

$$\cos x = \cos A^n \left(1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} = \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} \ldots\right)$$

$$\sin x = \cos A^n \left(x - \frac{x^4}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} \ldots\right)$$

Es ist noch zu untersuchen, was aus $\cos A^n$ wird, wenn A immer mehr abnimmt und zuletzt $= 0$ wird. Es ist $\frac{1}{\cos A^2} = \sec A^2 = 1 + \tang A^2$, also ist $\cos A = (1 + \tang A^2)^{-\frac{1}{2}}$ also $\cos A^n = (1 + \tang A^2)^{-\frac{n}{2}}$ $= 1 - \frac{n}{2} \tang A^2 + \frac{n.n+2}{2.4} \tang A^4 \ldots$ Setzt man statt n seinen Werth $\frac{x}{A}$ so erhält man

$$\cos A^n = 1 - \frac{x}{2} A . \frac{\tang A^2}{A^2} + \frac{x.x+2A}{2.4} A^2 . \frac{\tang A^4}{A^4} \ldots$$

Nimmt nun A immer mehr ab, während x sich nicht verändert, so nähert sich der Werth von $\cos A^n$ immer mehr der Einheit. Zuletzt ist, wenn man $A = 0$ setzt, $\frac{\tang A}{A} = 1$, und folglich genau $\cos A^n = 1$, also ist

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^5}{1.2.3.4.5.6} \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} \ldots$$

Mittelst dieser Formeln lassen sich die Sinus und Cosinus eines Bogens berechnen, dessen Länge in Theilen des zur Einheit angenommenen Halbmessers gegeben ist *).

*) Bekanntlich können diese Formeln auch noch auf mancherley andern kürzern Wegen gefunden werden.

A. d. Uebers.

35. Die Werthe von sin x und cos x können auch kürzer durch Exponentialgröſsen ausgedrückt werden. Man erinnere sich, daſs wenn p die Zahl bedeutet, deren natürlicher Logarithme gleich 1 ist,

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} \ldots.$$

Setzt man in diese Formel $z = x\sqrt{-1}$, so erhält man

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + \frac{x\sqrt{-1}}{1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^4\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{°}{1.2.3.4} + \frac{x^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} \ldots,$$

und wenn man das Zeichen von $\sqrt{-1}$ verändert

$$e^{-x\sqrt{-1}} = 1 - \frac{x\sqrt{-1}}{1} - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} \ldots$$

Daraus folgt

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \ldots.$$

und $$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} \ldots.$$

Die Reihen in den zweyten Gliedern dieser Gleichungen sind die eben gefundenen Werthe von cos x und sin x; also ist

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

woraus folgt:

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}} = \sqrt{-1} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{-1} \text{ tang } x$$

welche Formel oben in der vierten Anmerkung gebraucht worden ist.

Obige Ausdrücke geben auch $e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \sin x$ und $e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1} \sin x$. Also ist, wenn man Eins durch das Andere dividirt,

$$e^{2x\sqrt{-1}} = \frac{\cos x + \sqrt{-1} \sin x}{\cos x - \sqrt{-1} \sin x} = \frac{1 + \sqrt{-1} \operatorname{tang} x}{1 - \sqrt{-1} \operatorname{tang} x};$$

folglich, wenn man auf beiden Seiten die Logarithmen nimmt, $2x\sqrt{-1} = \log\left(\frac{1 + \sqrt{-1} \operatorname{tang} x}{1 - \sqrt{-1} \operatorname{tang} x}\right)$. Bekanntlich aber ist $\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2z + \frac{2}{3} z^2 + \frac{2}{5} z^3 \ldots.$ Setzt man also $\sqrt{-1} \operatorname{tang} x$ statt z, und dividirt rechts und links durch $2\sqrt{-1}$, so erhält man

$$x = \operatorname{tang} x - \frac{1}{3} \operatorname{tang} x^3 + \frac{1}{5} \operatorname{tang} x^5 - \frac{1}{3} \operatorname{tang} x^7 \ldots.$$

Mittelst dieser einfachen Formel läſst sich der Bogen aus seiner Tangente berechnen, in sofern dieselbe kleiner als 1 ist.

36. Um die obigen Formeln zur Berechnung der Sinus und Cosinus eines gegebenen Bogens in Graden und Gradtheilen anzuwenden, muſs die Länge des Bogens in Theilen des Halbmessers, oder, was daſselbe ist, das Verhältniſs des Bogens zum Halbmesser, bekannt seyn. Der halbe Umfang, oder der zu zwey rechten Winkeln gehörige Bogen, ist für den Halbmesser 1 gleich 3,14159 26535 897932. Die[illegible]h heiſse π, so ist die Länge des Bogens $\frac{m}{n}\varrho$ gleich $\frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$. Setzt man in die obigen Formeln $x = \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$ und hernach den Werth von π, und berechnet die Coefficienten bis auf 16 Decimalstellen, so findet man folgende Ausdrücke:

$\sin \frac{m}{n} \rho =$		$\cos \frac{m}{n} \rho =$	
1,57079 63267 948966	$\frac{m}{n}$	1,00000 00000 000000	
− 0,64596 40975 062463	$\frac{m^3}{n^3}$	− 1,23370 05501 361698	$\frac{m^2}{n^2}$
+ 0,07969 26262 461670	$\frac{m^5}{n^5}$	+ 0,25366 95079 010480	$\frac{m^4}{n^4}$
− 0,00468 17541 353187	$\frac{m^7}{n^7}$	− 0,02086 34807 633530	$\frac{m^6}{n^6}$
+ 0,00016 04411 847874	$\frac{m^9}{n^9}$	+ 0,00091 92602 748394	$\frac{m^8}{n^8}$
− 0,00000 35988 432352	$\frac{m^{11}}{n^{11}}$	− 0,00002 52020 423731	$\frac{m^{10}}{n^{10}}$
+ 0,00000 00569 217292	$\frac{m^{13}}{n^{13}}$	+ 0,00000 04710 874779	$\frac{m^{12}}{n^{12}}$
− 0,00000 00006 688035	$\frac{m^{15}}{n^{15}}$	− 0,00000 00063 866031	$\frac{m^{14}}{n^{14}}$
+ 0,00000 00000 060669	$\frac{m^{17}}{n^{17}}$	+ 0,00000 00000 656596	$\frac{m^{16}}{n^{16}}$
− 0,00000 00000 000438	$\frac{m^{19}}{n^{19}}$	− 0,00000 00000 005294	$\frac{m^{18}}{n^{18}}$
+ 0,00000 00000 000003	$\frac{m^{21}}{n^{21}}$	+ 0,00000 00000 000034	$\frac{m^{20}}{n^{20}}$

Die Sinus und Cosinus der Bogen von 0 bis $\frac{1}{2}\rho$ begreifen zugleich die Sinus und Cosinus der Bogen von $\frac{1}{2}\rho$ bis ρ in sich, denn es ist $\sin(\frac{1}{2}\rho + z) = \cos(\frac{1}{2}\rho - z)$ und $\cos(\frac{1}{2}\rho + z) = \sin(\frac{1}{2}\rho - z)$. Also kann man in den Formeln für $\sin \frac{m}{n} \rho$ und $\cos \frac{m}{n} \rho$ immer $\frac{m}{n} < \frac{1}{2}$ setzen.

Auf diese Weise convergiren die Reihen immer so stark, daſs nur wenige Glieder zu berechnen nöthig sind, besonders wenn man nicht viele Decimalstellen verlangt.

Macht man der Reihe nach $\frac{m}{n} = \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}$ so findet man

$$\sin \tfrac{1}{10}\,\varrho = \cos \tfrac{9}{10}\,\varrho = 0{,}15643\ 44650\ 40231$$
$$\sin \tfrac{2}{10}\,\varrho = \cos \tfrac{8}{10}\,\varrho = 0{,}30901\ 69943\ 74947$$
$$\sin \tfrac{3}{10}\,\varrho = \cos \tfrac{7}{10}\,\varrho = 0{,}45399\ 04997\ 39547$$
$$\sin \tfrac{4}{10}\,\varrho = \cos \tfrac{6}{10}\,\varrho = 0{,}58778\ 52522\ 92473$$
$$\sin \tfrac{5}{10}\,\varrho = \cos \tfrac{5}{10}\,\varrho = 0{,}70710\ 67811\ 86548$$
$$\sin \tfrac{6}{10}\,\varrho = \cos \tfrac{4}{10}\,\varrho = 0{,}80901\ 69943\ 74\ 47$$
$$\sin \tfrac{7}{10}\,\varrho = \cos \tfrac{3}{10}\,\varrho = 0{,}89100\ 652\ 1\ 88368$$
$$\sin \tfrac{8}{10}\,\varrho = \cos \tfrac{2}{10}\,\varrho = 0{,}95105\ 65162\ 95154$$
$$\sin \tfrac{9}{10}\,\varrho = \cos \tfrac{1}{10}\,\varrho = 0{,}98768\ 83405\ 95138$$
$$\sin \varrho = \cos 0 = 1{,}00000\ 00000\ 00000$$

welches mit den algebraischen Formeln (Art. 22) übereinstimmt. So findet man auch, wenn man $\frac{m}{n} = \frac{1}{100}$ setzt, den nämlichen Werth von $\sin \frac{1}{100}\,\varrho$, wie in Art. 26. Die grofse Leichtigkeit, mit welcher man auf diesem Wege zu den Resultaten gelangt, ist ein Beweis von der Güte der Methode.

Von Berechnung der Sinustafeln.

37. Die Mathematiker, welche zuerst Sinustafeln berechneten, gründeten ihre Rechnung auf sinnreiche, aber in der Anwendung beschwerliche Methoden. Der Analysis verdankt man leichtere Mittel zu diesem Zwecke; da indessen die Rechnungen fertig waren, so würden die leichtern Methoden ohne Anwendung geblieben seyn, wenn nicht die Einführung des neuen metrischen Systems die Berechnung neuer Tafeln nach der Decimaleintheilung des Kreisumfanges nothwendig gemacht hätte.

Um einen Begriff von der Berechnung solcher Tafeln zu geben, setze man, es wären die Sinus aller Bogen von Minute zu Minute zu suchen, von einer Minute an bis zu 10000 Minuten, oder 100 Grade *). Man setze den Halb-

*) nämlich nach der Decimaleintheilung des Kreisumfanges.
A. d. Uebers.

messer $= 1$, den Bogen von einer Minute $= a$, so muſs zuerst der Sinus und Cosinus des Bogens a sehr genau berechnet werden.

Da der Halbmesser $= 1$ ist, so ist, wie bekannt, der Bogen von 200 Graden $(2\varrho) = 3{,}14159\ 26535\ 897932$. Man dividire diese Zahl durch 20000, so findet man für den Bogen von einer Minute $a = 0{,}00015707963267948966$. welche Zahl bis in die zwanzigste Decimalstelle genau ist. Der Sinus eines sehr kleinen Bogens ist sehr wenig von dem Bogen verschieden, also ist sehr nahe $\sin a = 0{,}00015707963267948966$. Diese Zahl ist noch in der dreyzehnten Decimalstelle, also noch in der zehnten Ziffer unrichtig. Die genauere Zahl findet man am leichtesten durch die Formeln des 36sten Art., welche, wenn man $\frac{m}{n} = \frac{1}{10000}$ setzt, unmittelbar aus zwey oder drey Glieder der Reihen

$$\sin a = 0{,}00015\ 70796\ 32033\ 525563$$

$$\cos a = 0{,}99999\ 99876\ 62994\ 52400\ 5263$$

geben. Diese Werthe sind bis zur zwanzigsten Stelle für den Sinus, und bis zur vier und zwanzigsten für den Cosinus genau.

38. Nachdem nunmehr Sinus und Cosinus des durch a bezeichneten Bogens von einer Minute gefunden sind, darf man nur, um daraus weiter die Sinus der vielfachen Bogen a zu finden, in den Formeln des 22. Art. $p = x + a$, $q = x - a$ setzen. Die erste und dritte geben für $r = 1$,

$$\sin(x + a) = 2 \cos a \sin x - \sin(x - a)$$

$$\cos(x + a) = 2 \cos a \cos x - \cos(x - a).$$

Aus diesen Ausdrücken folgt, daſs, wenn die Bogen eine arithmetische Reihe bilden, deren Differenz a ist, ihre Sinus eine rücklaufende Reihe ausmachen, deren Scale $2\cos a, -1$ ist, das heiſst, wenn zwey Sinus A und B berechnet sind, daſs man dann den folgenden C findet, wenn man B mit $2\cos a$ und A mit -1 multiplicirt und die Producte zu-

sammenrechnet, welches $C = 2B \cos a - A$ giebt. Die Cosinus bilden eine rücklaufende Reihe mit der Scale $2 \cos a, -1$. Also ist der Reihe nach

$\sin 0 = 0$	$\cos 0 = 1$
$\sin a = \sin a$	$\cos a = \cos a$
$\sin 2a = 2 \cos a \sin a$	$\cos 2a = 2 \cos a \cos a - 1$
$\sin 3a = 2 \cos a \sin 2a - \sin a$	$\cos 3a = 2 \cos a \cos 2a - \cos a$
$\sin 4a = 2 \cos a \sin 3a - \sin 2a$	$\cos 4a = 2 \cos a \cos 3a - \cos 2a$
$\sin 5a = 2 \cos a \sin 4a - \sin 3a$	$\cos 5a = 2 \cos a \cos 4a - \cos 3a$

u. s. w.

39. Nunmehr ist nur noch die Ausführung der angezeigten Operationen durch Substitution der Werthe von sin a und cos a nöthig. Will man Sinustafeln mit 10 Decimalstellen haben, so ist es hinreichend, die Werthe von sin a und cos a bis auf 16 Decimalstellen zu berechnen, nämlich:

$$\sin a = 0{,}00015\ 70796\ 320335$$

$$\cos a = 0{,}99999\ 99876\ 629945.$$

Aber da cos a von 1 wenig abweicht, so kann man kürzer, wie folgt, verfahren. Es sey $k = 2(1 - \cos a)$

$= 0{,}00000\ 00246\ 740110$, so ist $2 \cos a = 2 - k$, welches giebt

$$\sin(x + a) - \sin x = \sin x - \sin(x - a) - k \sin x$$

$$\cos(x + a) - \cos x = \cos x - \cos(x - a) - k \cos x.$$

Um also $\sin(x + a)$ zu finden, darf man nur zu dem vorhergehenden Gliede sin x, die Differenz $\sin(x + a) - \sin x$ addiren, welche immer sehr klein ist. Diese Differenz ist aber nach der Formel, einer ähnlichen schon berechneten Differenz $\sin x - \sin(x - a)$, weniger dem Product von sin x in die unveränderliche Zahl k gleich. Diese letzte Multiplication ist also die einzige, ein wenig weitläuftige, bey der Ableitung eines Sinus aus den beiden vorhergehenden, vorkommende Operation. Indessen ist zu bemerken, *erstlich,* daſs das Product nur bis in die sechszehnte Decimalstelle nothwendig ist, weshalb nur wenig Ziffern berechnet werden

dürfen; *zweytens*, daſs die Multiplicationen sehr abgekürzt werden können, wenn man im voraus die Producte der constanten Zahl 246740110 in 1, 2, 3 bis 9 berechnet; denn alsdann hat man unmittelbar die theilweisen Producte, welche aus den verschiedenen Zifern des Multiplicators entstehen, und braucht solche nur zusammen zu ziehen, wenn man bey der sechszehnten Decimalstelle stehen bleibt.

Durch ein gleiches Verfahren berechnet man die Cosinus. Setzt man die beiden Reihen bis $\frac{1}{2}\rho$ fort; so ist die Tafel vollendet.

40. Wir bemerken wiederholentlich, daſs man nothwendig die Sinus bis auf 16 Decimalstellen berechnen muſs, das heiſst, bis auf fünf oder sechs Stellen mehr als verlangt werden, um Fehler zu vermeiden, die sich leicht im Laufe von 5000 Operationen vervielfältigen könnten, und die auf die zehnte Decimalstelle keinen Einfluſs haben sollen. Ist die Rechnung vollendet, so schneidet man die überflüssigen Decimalstellen ab, und behält in der Tafel nur die verlangten zehn bey.

Uebrigens ist es bey einer so groſsen Menge von Rechnungen sehr nothwendig, die Resultate so oft als möglich zu prüfen. In dem angenommenen Beyspiele einer Tafel von Minute zu Minute würden vorher die Sinus und Cosinus von Grad zu Grad berechnet werden müssen, welches von 100 zu 100 Gliedern gute Proben abgiebt. Um die Sinus von Grad zu Grad zu berechnen, kann man sich folgender Formeln bedienen:

$$\sin(x+1^\circ) - \sin x = \sin x - \sin(x-1^\circ) - h \sin x$$

$$\cos(x+1\) - \cos x = \cos x - \cos(x-1^\circ) - h \cos x$$

$$\sin 1^\circ = 0{,}01570\ 73173\ 11820\ 676$$

$$\cos 1\ = 0{,}99987\ 66324\ 81660\ 599$$

$$h = 2(1 - \cos 1^\circ) = 0{,}00024\ 67350\ 36678\ 802.$$

Die von Grad zu Grad berechneten Sinus werden wieder durch die schon gefundenen Werthe von $\sin \frac{1}{10}\rho$, $\sin \frac{2}{10}\rho$ etc.

geprüft. Ist endlich die Tafel ganz vollendet, so kann man sie noch so viel man will durch die Formel

$$\sin(\varrho - x) + \sin(\tfrac{1}{5}\varrho - x) + \sin(\tfrac{1}{5}\varrho + x) = \sin(\tfrac{3}{5}\varrho + x) + \sin(\tfrac{3}{5}\varrho + x)$$

prüfen.

41. Die auf diese Weise berechneten Sinus sind in Theilen des Halbmessers ausgedrückt, und man nennt sie *natürliche Sinus.* In der Ausübung hat man gefunden, daſs die Logarithmen der Sinus für die Rechnung vortheilhafter sind, als die Sinus selbst. Deshalb enthalten die meisten Tafeln die natürlichen Sinus gar nicht, sondern nur ihre Logarithmen. Es ist leicht zu sehen, daſs wenn die Sinus, wie oben beschrieben, berechnet worden sind, auch hernach ihre Logarithmen gefunden werden können. Da die Logarithmen aller Sinus negativ werden würden, wenn man den Halbmesser gleich 1 setzte, so setzt man denselben = 10000000000; das heiſst, man multiplicirt alle für den Halbmesser 1 gefundene Sinus mit 10000000000. Dann hat der Halbmesser oder Sinus von ϱ die Zahl 10 zum Logarithmen, und die Winkel müſsten kleiner seyn als sie jemals in der Ausübung vorkommen, wenn ihre Logarithmen negativ werden sollten.

Sind die Logarithmen der Sinus gefunden, so findet man aus denselben sehr leicht die Logarithmen der Tangenten, und zwar durch bloſse Subtraction; denn weil tang x $= r\frac{\sin x}{\cos x}$, so ist log tang x $= 10 +$ tang sin x — log cos x. Die Logarithmen der Secanten findet man noch leichter aus der Gleichung $\sec x = \frac{r^2}{\cos x}$. Weil man dieselben so sehr leicht finden kann, werden in die Tafeln gewöhnlich nur die Logarithmen der Sinus und Tangenten aufgenommen.

Es wäre nun noch das Interpolationsverfahren zu erklären, durch welches man die Logarithmen der Sinus und Tangenten von Bogen findet, welche Bruchtheile der Minute

enthalten, oder die Bogen, welche Logarithmen entsprechen, die zwischen zwey auf einander folgende Logarithmen der Tafeln liegen. Man kann aber deshalb die Erklärung nachsehen, mit welcher gewöhnlich die Tafeln begleitet sind *).

*) So einfach auch die oben beschriebene Methode der Berechnung von Sinustafeln seyn mag, so ist doch ohne Zweifel die Berechnungsart durch höhere Differenzen, diejenige nämlich, nach welcher man einzelne, nicht zu weit von einander entfernte Sinus, etwa nach den Formeln des 36sten Art., und dann die erste, zweyte, dritte etc. Differenzen der dazwischen liegenden Sinus berechnet, die höchste Differenz gleichförmig annimmt, und daraus die zwischen liegenden Sinus durch bloſse successive Addition der Differenzen findet, unstreitig noch weit einfacher und sicherer, mithin noch vorzüglicher und vielleicht von allen die beste. Legendre verlangt, und zwar mit Recht, einzelne nicht zu weit von einander entfernte Sinus zur Probe, also werden diese einzelne Sinus, die bey der Differenzenmethode die Grundpfeiler der Rechnung sind, bey der von Legendre beschriebene Methode ebenfalls nicht erspart. Auſserdem paſst die Differenzenmethode nicht blos auf die Sinus, sondern auch auf alle Logarithmen, und überhaupt auf jede beliebige Reihe von Gröſsen, in sofern sie nur gleichförmig nach irgend einem bestimmten Gesetze fortschreitet. Es kommt nur darauf an, daſs man vorher genau untersucht, bis zu welcher Differenz man gehen muſs, um die verlangte Genauigkeit zu erreichen, welches sich sehr allgemein thun läſst. Sind bey der Differenzenmethode die einzelnen Glieder vorher berechnet worden, so ist die Operation, um die übrigen dazwischen liegenden zu finden, weil sie in durchaus nichts weiter als in Addition besteht, in so hohem Grade einfach, daſs der allergewöhnlichste Rechner sie verrichten kann. Die Logarithmen der Sinus aus den Sinus selbst zu finden, würde wohl höchst beschwerlich seyn. Bey der Berechnung dieser Logarithmen besonders sind die groſsen Vortheile der Differenzenmethode fühlbar.

Grundgleichungen zur Auflösung gradliniger Dreyecke.

42. *In jedem rechtwinkligen Dreyecke verhält sich der Halbmesser zum Sinus eines der spitzen Winkel wie die Hypothenuse zu der dem spitzen Winkel gegenüberliegenden Seite.*

Fig. 3. ABC sey das gegebene, in A rechtwinklige Dreyeck. Aus dem Puncte C beschreibe man mit einer dem Halbmesser der Tafeln gleichen Linie CD, den Bogen DE, so ist derselbe das Maafs des Winkels C. Auf CD fälle man das Perpendikel EF, welches der Sinus des Winkels C ist. Dann sind die Dreyecke CBA und CEF ähnlich, und geben die Proportion CE : EF = CB : BA, also ist

$$r : \sin C = BC : BA.$$

43. *In jedem rechtwinkligen Dreyecke verhält sich der Halbmesser zur Tangente jedes der beiden spitzen Winkel, wie die an diesen Winkel anliegende Seite, zu der gegenüberstehenden.*

Nachdem, wie im vorigen Artikel, der Bogen DE beschrieben worden, ziehe man DG auf CD senkrecht, so ist DG die Tangente des Winkels C. Die ähnlichen

Nach der Differenzenmethode sind berechnet worden die Sinustafeln von Hobert und Ideler, und die grofsen Sinustafeln für das Cadastre in Frankreich, unter Prony's Direction. Man sehe deshalb die Einleitung zu den Hobertischen Tafeln, und Prony's Notiz über die seinigen, welche letztre im 5ten Bande der Memoiren des Nationalinstituts (Abtheilung für Mathematik und Physik) abgedruckt ist. Ich gedenke in dem zweyten Bande meiner Sammlung mathematischer Abhandlungen über diesen Gegenstand noch einige Bemerkungen zu machen.

A. d. Uebers.

Dreyecke CDG und CAB geben die Proportion CD : DG = CA : AB, also ist

r : tang C = CA : AB.

44. *In jedem beliebigen gradlinigen Dreyecke verhalten sich die Sinus der Winkel wie die den Winkel gegenüberliegenden Seiten.*

Fig. 4. ABC sey das gegebene Dreyeck, AD das Perpendikel aus dem Scheitel A auf die gegenüberliegenden Seite BC, so können zwey Fälle Statt finden.

Erstlich. Wenn das Perpendikel innerhalb des Dreyecks ABC fällt, so geben die rechtwinkligen Dreyecke ABD und ACD, nach Art. 42,

r : sin B = AB : AD

r : sin C = AC : AD.

In diesen beiden Proportionen sind die äufsern Glieder gleich, also geben die mittlern die Proportion

sin C : sin B = AB : AC.

Fig. 5. *Zweytens.* Wenn das Perpendikel innerhalb des Dreyecks ABC fällt, so geben die rechtwinkligen Dreyecke ABD und ACD die Proportionen

r : sin ABD = AB : AD

r : sin C = AC : AD,

woraus folgt: sin C : sin ABD = AB : AC. Der Winkel ABD ist aber das Supplement von ABC oder B, also ist sin ABD = sin B, folglich ist wiederum

sin C : sin B = AB : AC.

45. *In jedem gradlinigen Dreyecke verhält sich der Cosinus eines Winkels zum Halbmesser, wie die Summe der Quadrate der Seiten, welche den Winkel einschliessen, weniger dem Quadrate der dritten Seite, zum doppelten Rechtecke unter den beiden ersten Seiten, so dafs also*

$\cos B : r = AB^2 + BC^2 - AC^2 : 2AB \times BC$

und $\cos B = r \times \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \times BC}$.

Man ziehe wiederum AD aus A auf BC senkrecht.

Fig. 4. *Erstlich.* Fällt das Perpendikel innerhalb des Dreyecks, so ist $AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2BC \times BD$ (3s B 12r S.), also $BD = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2BC}$. In dem rechtwinkligen Dreyecke ABD ist aber r : sin BAD = AB : BD; der Winkel BAD ist das Complement von B, also ist sin BAD = cos B, folglich $\cos B = r \times \frac{BD}{AB}$, und wenn man den Werth von BD substituirt,

$$\cos B = r \times \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \times BC}.$$

Fig. 5. *Zweytens.* Fällt das Perpendikel aufserhalb des Dreyecks, so ist $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \times BD$ (3s B. 13r S.). Also ist $BD = \frac{AC^2 - AB^2 - AC^2}{2BC}$. Nun ist wiederum in dem rechtwinkligen Dreyecke BAD, sin BBD oder $\cos BAD = r \times \frac{BD}{AB}$, und weil der Winkel ABD das Supplement von ABC oder B ist, cos B $= - \cos ABD = - r \times \frac{BD}{AB}$ (11.). Also erhält man auch hier, wenn man den Werth von BD substituirt,

$$\cos B = r \times \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \times BC}.$$

46. A, B, C sollen die drey Winkel eines beliebigen Dreyecks seyn, a, b, c die ihnen gegenüberliegenden Seiten, so ist nach dem vorigen Satze $\cos B = r . \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$. Der nämliche Satz, auf jeden der beiden andern Winkel angewendet, giebt

$$\cos A = r . \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos C = r . \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Diese drey Formeln sind zur Auflösung aller Aufgaben der ebenen Trigonometrie hinreichend, Denn wenn von den sechs Gröſsen A, B, C, a, b, c drey gegeben sind, so findet man unter den obigen Formeln allemal die nöthigen Gleichungen zur Entwickelung der übrigen drey Gröſsen. Die schon früher gefundenen Sätze, und alle Sätze, welche noch gefunden werden können, müssen also Folgen jener drey Hauptgleichungen seyn.

Der Werth von cos B giebt $\sin B^2 = r^2 - \cos B^2 = r^2 \cdot \frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2c^2} = \frac{r^2}{4a^2c^2}(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)$;

also ist $\frac{\sin B}{b} = \frac{r}{2abc} \sqrt{(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)}$.

Da das zweyte Glied eine Function von a, b, c ist, in welcher diese drey Gröſsen gleichförmig vorkommen, so kann man zwey derselben nach Belieben verwechseln. Also ist $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$, welches der Satz des 24sten Art. ist. Aus diesem aber folgen weiter die Sätze von Art. 42 und 43.

47. *In jedem gradlinigen Dreyecke verhält sich die Summe zweyer Seiten zu ihrem Unterschiede, wie die Tangente der halben Summe der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel, zur Tangente ihres halben Unterschiedes.*

Fig. 4. 5. Denn aus der Proportion $AB : AC = \sin C : \sin B$ folgt $AC + AB : AC - AB = \sin B + \sin C : \sin B - \sin C$. Nach den Formeln des 29sten Art. aber ist

$$\sin B + \sin C : \sin B - \sin C = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(B + C) : \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(B - C);$$

also ist

$$AC + AB : AC - AB = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(B + C) : \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(B - C)$$

wie behauptet wurde.

Mit dieser kleinen Zahl von Sätzen lassen sich alle Fälle der ebenen Trigonometrie auflösen.

Auflösung rechtwinkliger Dreyecke.

Fig. 3. 48. A soll der rechte Winkel eines gegebenen rechtwinkligen Dreyecks, B und C sollen die andern beiden Winkel seyn: a sey die Hypothenuse, b die dem Winkel B, c die dem Winkel C gegenüberliegende Seite. Man erinnere sich, daſs die beiden Winkel, einer des andern Complement sind, und daſs also sin C = cos B, sin B = cos C oder tang B = cot C, tang C = cot B ist. Alsdann lassen sich die verschiedenen Aufgaben bey rechtwinkligen Dreyecken auf folgende vier bringen.

Erster Fall.

49. *Aus der Hypothenuse a und einer Seite b, die dritte Seite c, und die beiden spitzen Winkel zu finden.*

Den Winkel B findet man aus der Proportion a : b = r : sin B (43.). Sodann ist C gleich dem Complement ρ — B. Auch kann man C unmittelbar aus der Proportion a : b = r : cos C nehmen.

Die dritte Seite c kann man auf zweyerley Art finden. Entweder nämlich giebt die Proportion r : cot B = b : c (43.), nachdem zuvor B berechnet worden, den Werth von c, oder man kann gradezu c aus der Gleichung $c^2 = a^2 - b^2$ nehmen, welche $c = \surd(a^2 - b^2)$ und folglich $\log c = \frac{1}{2} \log (a + b) + \frac{1}{2} \log (a - b)$ giebt.

Zweyter Fall.

50. *Aus den beiden Seiten b und c und dem rechten Winkel die Hypothenuse und die Winkel zu finden.*

Den Winkel B findet man aus der Proportion c : b = r : tang B. Hierauf C = ρ — B. Auch C unmittelbar aus der Proportion b : c = r : tang C.

Kennt man den Winkel B, so findet sich die Hypothenuse a aus der Proportion sin B : r = b : a, oder

auch unmittelbar aus der Gleichung $a = \sqrt{(b^2 + c^2)}$, welche indessen, weil sie sich nicht in Factoren zerlegen läfst, für Logarithmen nicht sehr bequem ist.

Dritter Fall.

51. *Aus der Hypothenuse a und einen Winkel B die beiden andern Seiten b und c zu finden.*

Die Proportionen $r : \sin B = a : b$ und $r : \cos B = a : c$ geben b und c. Der Winkel C ist gleich dem Complement von B.

Vierter Fall.

52. *Aus einer Seite b, dem rechten Winkel und einen der spitzen Winkel, die Hypothenuse und die andere Seite zu finden.*

Wenn man einen der spitzen Winkel kennt, so kennt man auch den andern. Also kann man die Seite b und den gegenüberliegenden Winkel B als bekannt annehmen, alsdann finden sich a und c aus den Proportionen

$$\sin B : r = b : a \text{ und } r : \cot B = b : c.$$

Auflösung beliebiger gradliniger Dreyecke.

A, B und C sollen die drey Winkel eines gegebenen gradlinigen Dreyecks, a, b, c die ihnen gegenüberliegenden Seiten seyn. Die verschiedenen Aufgaben aus drey von jenen sechs Gröfsen die drey übrigen zu finden, lassen sich auf folgende vier bringen.

Erster Fall.

53. *Aus einer gegebenen Seite a und zwey Winkeln des Dreyecks, die beiden andern Seiten b und c zu finden.*

Die beiden bekannten Winkel geben auch den drit-

ten, die beiden Seiten b und c finden sich aus den Proportionen (44.)

$$\sin A : \sin B = a : b$$

$$\sin A : \sin C = a : c$$

Zweyter Fall.

54. *Aus den beiden Seiten a und b und dem, der einen von ihnen gegenüberliegenden Winkel, die dritte Seite c und die beiden andern Winkel B und C zu finden.*

Man findet zuerst den Winkel B aus der Proportion

$$a : b = \sin A : \sin B.$$

M sey der spitze Winkel, dessen Sinus $\frac{b \sin A}{a}$ ist, so kann man, je nach dem Werthe von sin B, $B = M$ oder $B = 2\rho - M$ setzen. Zwey Auflösungen würden aber nur dann Statt finden, wenn der Winkel A spitz, und zugleich $b > a$ wäre. Ist der Winkel A stumpf, so kann nicht B stumpf seyn; folglich findet alsdann nur eine Auflösung Statt. Ist A spitz, so ist $b < a$, und es findet ebenfalls nur eine Auflösung Statt, weil alsdann $M < A$ ist, und wenn man $B = 2\rho - M$ machte, $A + B > 2\rho$ seyn würde, welches nicht möglich ist.

Kennt man die Winkel A und B, so läfst sich daraus der dritte Winkel C finden. Endlich findet man die Seite c aus der Proportion

$$\sin A : \sin C = a : C.$$

Man kann auch c unmittelbar aus der Gleichung $\frac{\cos A}{r} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ nehmen. Dieses giebt $c = \frac{b \cos A}{r} \pm r\sqrt{\left(a^2 - \frac{b^2 \sin A^2}{r^2}\right)}$. Aber dieser Ausdruck für c kann mit Logarithmen nur durch einen Hülfswinkel M oder B

berechnet werden, welches auf die vorige Auflösung hinaus kommt.

Dritter Fall.

55. *Aus zwey gegebenen Seiten a und b und dem eingeschlossenen Winkel C die beiden andern Winkel A und B und die dritte Seite C zu finden.*

Kennt man den Winkel C, so kennt man auch die Summe der beiden andern Winkel $A + B = 2\rho - C$, so wie ihre halbe Summe $\frac{1}{2}(A + B) = \rho - \frac{1}{2} C$. Ferner läſst sich die halbe Differenz dieser Winkel vermittelst der Proportion

$$a + b : a - b = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A + B) \text{ oder } \cot\tfrac{1}{2}C : \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A - B)$$

berechnen, wobey $a > b$, und folglich $A > B$ angenommen wird.

Ist die halbe Differenz $\frac{1}{2}(A - B)$ gefunden, so erhält man, wenn man die halbe Summe $\frac{1}{2}(A + B)$ dazu addirt, den gröſsern Winkel A, und wenn man die halbe Summe davon abzieht, den kleinern Winkel B. Denn weil A und B zwey beliebige Gröſsen sind, so ist immer

$$A = \tfrac{1}{2}(A + B) + \tfrac{1}{2}(A - B)$$
$$B = \tfrac{1}{2}(A + B) - \tfrac{1}{2}(A - B).$$

Sind die Winkel A und B gefunden, so darf man nur, um die dritte Seite c zu haben, die Proportion

$$\sin A : \sin C = a : c$$

machen.

56. Zuweilen sind bey trigonometrischen Rechnungen von den beiden Seiten a und b die Logarithmen gegeben. Um alsdann nicht erst die zugehörigen Zahlen aufsuchen zu dürfen, nimmt man einen Winkel φ aus der Proportion $b : a = r : \text{tang}\,\varphi$. Dieser Winkel φ ist gröſser als $\frac{1}{2}\rho$ weil $a > b$ angenommen wird. Zieht man also $\frac{1}{2}\rho$ von φ ab, und setzt die Proportion $r : \text{tang}\,(\varphi - \frac{1}{2}\rho) =$

cot $\frac{1}{2}$ C : tang $\frac{1}{2}$ (A — B), so läſst sich wie oben, der Werth von $\frac{1}{2}$ (A — B) finden, und darauf der Werth der beiden Winkel A und B.

Diese Auflösung gründet sich darauf, daſs tang $(\varphi - \frac{1}{2}\rho)$ $= \frac{r^2 \tan \varphi - r^2 \tan \frac{1}{2}\rho}{r^2 + \tan \varphi \tan \frac{1}{2}\rho}$. Nun ist tang $\varphi = \frac{ar}{b}$ und tang $\frac{1}{2}\rho = r$, also ist tang $(\varphi - \frac{1}{2}\rho) = r\,\frac{a-b}{a+b}$, folglich $a+b : a-b = r : \tan(\varphi - \frac{1}{2}\rho) = \cot \frac{1}{2} C : \tan \frac{1}{2}(A-B)$.

Die dritte Seite c kann unmittelbar aus der Gleichung $\frac{\cos C}{r} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ gefunden werden, welches $c = \sqrt{(a^2+b^2 - 2ab\,\frac{\cos C}{r})}$ giebt. Dieser Ausdruck ist aber zur Berechnung mit Logarithmen nicht bequem, wenigstens nicht, wenn die Zahlen a, b und cos C nicht sehr einfach sind.

Der Ausdruck für c kann auch auf folgende Gestalten gebracht werden:

$$c = \sqrt{\left[(a-b)^2 + 4ab\frac{\sin\frac{1}{2}C^2}{r^2}\right]} = \sqrt{\left[(a+b)^2\frac{\sin\frac{1}{2}C^2}{r^2} + (a-b)\frac{\cos\frac{1}{2}C^2}{r^2}\right]},$$

welches aus den Formeln $\sin \frac{1}{2} C^2 = \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{2} r \cos C$ und $\cos \frac{1}{2} C^2 = \frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{2} r \cos C$ leicht zu ersehen ist. Diese Ausdrücke sind vorzüglich dann nützlich, wenn der Winkel C nebst a — b sehr klein sind, und man will c sehr genau berechnen. Aus dem zweyten Ausdrucke folgt, daſs c die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreyecks ist, dessen Seiten $(a+b)\frac{\sin\frac{1}{2}C}{r}$ und $(a-b)\frac{\cos\frac{1}{2}C}{r}$ sind, welches sich auch durch eine leichte Construction zeigen läſst.

Fig. 6. CAB sey das gegebene Dreyeck, in welchem die Seiten CB = a und CA = b nebst dem eingeschlossenen Winkel C bekannt sind. Aus C beschreibe man mit einem, der gröſsten Seite gleichen Halbmesser CB, einen Kreisumfang, welcher die verlängerte Seite CA in D und E schneidet. Man ziehe BD und BE, desgleichen AF auf BD senkrecht. Der in den Halbkreis eingeschriebene Winkel

DBE ist ein rechter, also sind die Linien AF und BE parallel, und es verhält sich BF : AE = DF : AD = cos D : r. Auch ist in dem rechtwinkligen Dreyecke DAF, AF : DA = sin D : r. Substituirt man hierin DA = DC + CA = a + b, AE = CE — CA = a — b, und D = ½ C, so erhält man

$$AF = \frac{(a + b) \sin \frac{1}{2} C}{r} \text{ und } BF = \frac{(a - b) \cos \frac{1}{2} C}{r}.$$

Also ist die dritte Seite AB des gegebenen Dreyecks die Hypothenuse des rechtwinkligen Dreyecks ABF, dessen Seiten $(a + b) \frac{\sin C}{r}$ und $(a - b) \frac{\cos \frac{1}{2} C}{r}$ sind. Sucht man in diesem nämlichen Dreyecke den der Seite AF gegenüberliegenden Winkel ABF, und zieht den Winkel CBD = ½ C ab, so erhält man den Winkel B des Dreyecks ABC. Also läſst sich die Auflösung des Dreyecks ABC, von welchem zwey Seiten a und b und der eingeschlossene Winkel C gegeben sind, auf die Auflösung des rechtwinkligen Dreyecks AB bringen, in welchem zwey Seiten und der rechte Winkel gegeben sind, nämlich $AF = (a + b) \frac{\sin \frac{1}{2} C}{r}$ und $BF = (a - b) \frac{\cos \frac{1}{2} C}{r}$. Man könnte durch diese Construction den Satz No. 47 ersparen.

Vierter Fall.

57. *Aus den drey Seiten a, b, c die drey Winkel A, B, C zu finden.*

Den der Seite a gegenüberliegenden Winkel A findet man durch die Formel $\cos A = r \frac{b^2 + c^2\ a^2}{2bc}$, die beiden andern Winkel durch ähnliche Formeln. Es giebt aber noch andere für die Berechnung mit Logarithmen bequemere Ausdrücke.

Erinnert man sich nämlich des Ausdrucks $r^2 - r \cos A = 2 \sin \frac{1}{2} A$, und setzt darin den Werth von

cos A, so erhält man $2 \sin \frac{1}{2} A = r^2 \frac{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc}{2bc}$ $= r^2 \cdot \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = r^2 \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$. Also ist $\sin \frac{1}{2} A = r \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}$. Der Kürze wegen sey $\frac{1}{2}(a+b+c) = p$, oder $a+b+c = 2p$, so ist $a+b-c = 2p - 2c$, $a-b+c = 2p - 2b$; also ist

$$\sin \tfrac{1}{2} A = r \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

aus welcher Formel auch die Proportion

$$bc : (p-b)(p-c) = r^2 : \sin \tfrac{1}{2} A^2$$

folgt, welche mit Logarithmen bequem zu berechnen ist. Kennt man den Logarithmen von $\sin \frac{1}{2} A$, so kennt man auch $\frac{1}{2} A$, wovon das Doppelte der gesuchte Winkel A ist. Daſselbe gilt für die beiden andern Winkel B und C.

Auch folgende Formeln sind zur Auflösung der Aufgabe geschickt. Zuerst giebt die Formel $r^2 + r \cos A = 2 \cos \frac{1}{2} A^2$, $\cos \frac{1}{2} A$ $= r^2 \frac{b^2 + c^2 + 2bc - a^2}{4bc} = r^2 \cdot \frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc} = r^2 \cdot \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{4bc}$. Macht man wieder $a+b+c = 2p$, so ist $b+c-a = 2p - 2a$, also

$$\cos \tfrac{1}{2} A = r \sqrt{\frac{(p-a)\,p}{bc}}.$$

Dieser Werth mit dem von $\sin \frac{1}{2} A$ verbunden, giebt auch, weil $\operatorname{tang} \frac{1}{2} A = r \frac{\sin \frac{1}{2} A}{\cos \frac{1}{2} A}$ ist,

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A = r \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p \cdot (p-a)}}.$$

Beyspiele von Auflösung gradliniger Dreyecke.

Fig. 7. 58. *Erstes Beyspiel.* Man setze, es werde die Höhe eines Thurmes verlangt, dessen Fuſs unzugänglich ist.

Nachdem man auf dem Terrain horizontal eine Grundlinie AD gemessen hat, welche im Verhältnifs zur Höhe AB weder sehr grofs noch sehr klein ist, setze man den Fufs des Instruments, mit welchem man den, von der horizontalen, mit AD parallelen Linie CE, und von der Gesichtslinie nach dem Gipfel des Gebäudes CB eingeschlossenen Winkel BCE messen will, in D. Angenommen, es sey AD oder CE = 67, 84 Meter, und der Winkel BCE = 45°, 64′ gefunden, so mufs man, um BE zu finden, das rechtwinklige Dreyeck BCE auflösen, in welchem der Winkel C und die anliegende Seite EC bekannt sind. Also mufs man nach dem 4ten Falle, die Proportion r : tang 45°, 64′ = 67, 84 : BE machen,

$$\log \tan 45^\circ\, 64' = 9{,}9403263$$
$$\log \quad 67,\,84 = 1{,}8314858$$
$$\text{Summe} - \log r = 1{,}7718121.$$

Dieser Logarithme gehört zu 59, 130, also ist BE = 59, 13 Meter. Addirt man zu BE die Höhe des Instruments CD oder AE, welche 1, 12 Meter seyn mag, so ist die gesuchte Höhe AB = 60, 25 Meter.

Verlangt man in dem nämlichen Dreyecke BEC die Hypothenuse BC, so macht man die Proportion cos 45° 64′ : r = 67, 84 : BC.

$$\log r + \log\ 67,\,84 = 11{,}8314858$$
$$\log \cos 45^\circ\, 64' = 9{,}8772784$$
$$\text{Unterschied} - = 1{,}9542074 = \log BC.$$

Also ist BC = 89,993 Meter.

Anmerkung. Wenn man nur den Gipfel B des Gebäudes, oder irgend eines Orts, dessen Höhe man verlangt, sehen könnte, so liefse sich die Entfernung BC wie in dem folgenden Beyspiele finden. Diese Entfernung und der bekannte Winkel BCE sind zur Auflösung des rechtwinkligen

Dreyecks BCE, dessen Seite BE, zusammen mit der Höhe des Instruments, der verlangten Höhe gleich ist, hinreichend.

Fig. 8. 59. *Zweytes Beyspiel.* Um auf dem Felde die Entfernung eines Puncts A von einem unzugänglichen Gegenstande B zu finden, messe man eine Grundlinie AD, und die beiden anliegenden Winkel BAD und ADB. Gesetzt es sey AD = 588, 45 Meter, BAD = 115°, 48′ und BDA = 40°, 8′, so findet man daraus den dritten Winkel ABD = 44°, 44′, mithin darf man, um AB zu haben, nur die Proportion sin ABD : sin ADB = AD : AB machen:

$$\begin{aligned} \log AD &= 2{,}7697096 \\ \log \sin ADB &= 9{,}7699689 \\ \hline \text{Summe} &= 2{,}5396785 \\ \log \sin ABD &= 9{,}8080314 \\ \hline \log AB &= 2{,}7316471, \end{aligned}$$

folglich ist die gesuchte Entfernung AB = 539,07 Meter.

Hat man für einen andern unzugänglichen Gegenstand C die Winkel CAD = 39° 17′ und ADC = 132° 83′ gefunden, so folgt daraus auf dieselbe Weise die Entfernung AC = 1202, 32 Meter.

Fig. 8. 60. *Drittes Beyspiel.* Um die Entfernung zwischen zwey unzugänglichen Gegenständen B und C zu finden, suche man AB und AC wie in dem vorigen Beyspiele, so hat man zugleich den eingeschlossenen Winkel BAC = BAD — DAC *). Gesetzt man fände

*) Die vier Puncte A, B, C, D könnten auch nicht alle in einer Ebene liegen; alsdann wäre der Winkel BAC nicht mehr die Differenz zwischen BAD und DAC, und man

AB = 539,07 Meter, AC = 1202,32 Meter, und den Winkel BAC = 76°, 31′. Um nun BC zu finden, mufs das Dreyeck BAC aufgelöset werden, in welchem man zwey Seiten und den eingeschlossenen Winkel kennt. Nun ist, nach dem dritten Falle, AC + AB : AC — AB = tang ½ (B + C) : tang ½ (B — C), oder 1741,39 : 663,25 = tang 61°, 84½′ : tang ½ (B — C).

log 663,25	=	2,8216773
log tang 61°84½′	=	10,1654748
Summe	=	12,9811521
log 1741,39 —	=	3,2408960
log tang ½ (B — C)	=	9,7462561;

also ½ (B — C) = 32° 37,8′

Es ist aber ½ (B + C) = 61° 84,5′

also ist B = 94° 22,3′

und C = 29° 46,7′.

Um nun die Entfernung BC zu finden, mache man die Proportion sin B : sin A = AC : BC, oder

sin 94° 22,3′ : sin 76° 31′ = 1202,32 Meter : BC

log 1202,32	=	3,0800200
log sin 76° 31′	=	9,9692099
Summe		13,0492299
log sin 94° 22,3′	=	9,9982096
log BC	=	3,0510203,

also ist die gesuchte Entfernung BC = 1124,66 Meter.

Fig. 9. 61. *Viertes Beyspiel.* Auf der Charte eines Landes sind drey Puncte A, B, C gegeben. Man verlangt die Lage eines vierten Punctes M, aus welchem die beiden Winkel AMB, AMC gemessen werden. Die

müſste alsdann den Winkel BAC unmittelbar messen. Ausserdem aber wäre das Verfahren das nämliche.

A. d. Verf.

vier Puncte werden in einer und derselben Ebene angenommen.

Man beschreibe über AB das Segment AMDB, welches den gegebenen Winkel BMA fasset; über AC das Segment AMC, welches den gegebenen Winkel AMC fasset. Unter den beiden Puncten A und M, in welchen sich die beiden Bogen schneiden, wird M der gesuchte Punct seyn. Denn die Puncte des Bogens AMDB sind die einzigen, aus welchen man die Linie AB unter dem Winkel AMB sieht, die Puncte des Bogens AMC die einzigen, aus welchem man AC unter dem Winkel AMC sieht; also ist auch der Durchschnittspunct M dieser beiden Bogen der einzige, aus welchem man zugleich AB und AC unter den Winkeln AMB und AMC sieht. Nun müfste die Lage des Puncts M nach dieser Construction trigonometrisch berechnet werden.

Es sey gegeben AB = 2500 M., AC = 1000 M., BC = 9000 M., AMB = 30° 80′, AMC = 121° 40′. In dem Dreyecke ABC, in welchem man die drey Seiten kennt, findet sich der Winkel BAC (57) aus der Formel $\sin \frac{1}{2} A = r^2 \frac{6750.\ 2250}{2500.\ 7000}$, woraus folgt $2 \log \sin \frac{1}{2} A = 19{,}9384483$, $\log \sin \frac{1}{2} A = 9{,}9692241$, $\frac{1}{2} A = 76° 31{,}5'$ und $A = 152° 63'$. Man ziehe den Durchmesser AD und die Sehne DB. In dem in B rechtwinkligen Dreyecke BAD ist die Seite BA = 2500, und der gegenüberliegende Winkel BDA = BMA = 30° 80′, woraus die Hypothenuse $AD = \frac{BA \times r}{\sin BDA} = 5374{,}6$ M. folgt. Eben so ziehe man den Durchmesser AE und die Sehne CE, so ist in dem rechtwinkligen Dreyecke ACE, die Seite AC = 7000 und der anliegende Winkel CAE = AMC — ρ = 21° 40′, woraus folgt $AE = \frac{B \times AC}{\cos CAE} = 7415$ M. Zieht man nun MD und ME, so ist die Linie DME eine grade, weil die

Winkel AMD und AME rechte sind. Es ist also nur noch das Dreyeck DAE aufzulösen, in welchem die Linie AM, deren Gröfse und Lage bestimmt werden soll, auf DE senkrecht steht. In diesem Dreyecke sind die gegebenen Seiten AD = 5374,6, AE = 7415; der eingeschlossene Winkel DAE ist gleich BAC + CAE — DAB = 104° 83'. Daraus folgt der Winkel ADE = 56° 93'. Endlich erhält man in dem rechtwinkligen Dreyecke DAM, AM = 4190,83 M. Diese Entfernung und der Winkel BAM = 112° 27' bestimmen vollständig die Lage des Puncts M *).

Grundgleichungen zur Auflösung rechtwinkliger Kugeldreyecke.

62. *In jedem rechtwinkligen Kugeldreyecke verhält sich der Halbmesser zum Sinus der Hypothenuse, wie der Sinus einer der schiefen Winkel zum Sinus der ihm gegenüberliegenden Seite.*

Fig. 10. ABC sey das gegebene Kugeldreyeck, A sein rechter Winkel. B und C sollen die beiden andern Winkel seyn, welche *schiefe Winkel* heissen, welche jedoch auch, einer sowohl als beide, rechte seyn können. Ich behaupte, dafs in diesem Dreyecke r : sin BC = sin B : sin AC ist.

Man ziehe aus dem Mittelpuncte der Kugel o die Halbmesser OA, OB, OC, mache OF gleich dem Halbmesser der Tafeln, und ziehe aus F die Linie FD auf OA senkrecht, so ist FD auf der Ebene OAB senkrecht, weil der Winkel A nach der Voraussetzung ein rechter

*) Diese Auflösung der unter dem Namen der Pothenotschen, bekannten Aufgabe, weicht zwar von den gewöhnlichen Auflösungen ab, dürfte aber denselben wenigstens nicht nachstehen. A. d. Uebers.

ist, und also die beiden Ebenen OAB und OAC auf einander senkrecht sind. Aus D ziehe man DE senkrecht auf OB, und darauf EF, so ist die Linie EF auch auf OB senkrecht, und der Winkel DEF misset die Neigung der beiden Ebenen OBA und OBC, und ist dem Winkel B im Dreyecke ABC gleich. Nun ist in dem in D rechtwinkligen Dreyecke DEF, r : sin DEF = EF : DF. Aber DEF = B, also, weil OF = REF = sin EOF = sin BC, DF = sin AC; folglich r : sin B = sin BC : sin AC, oder

$$r : \sin BC = \sin B : \sin AC.$$

Nennt man die Hypothenuse, oder die dem Winkel A gegenüberliegende Seite a, die dem Winkel B gegenüberliegende Seite b, die dem Winkel C gegenüberliegende Seite c, so ist

$$r : \sin a = \sin B : \sin b = \sin C : \sin c,$$

welches schon zwey Gleichungen zwischen den Bestimmungsstücken des rechtwinkligen Kugeldreyecks sind.

63. *In jedem rechtwinkligen Kugeldreyecke verhält sich der Halbmesser zum Cosinus eines der schiefen Winkel, wie die Tangente der Hypothenuse zur Tangente der an dem schiefen Winkel liegenden Seite.*

Fig. 10. Es sey wiederum ABC das gegebene, in A rechtwinklige Dreyeck, so behaupte ich, daſs r : cos B = tang B : tang AB ist.

Denn construirt man wie vorhin, so giebt das rechtwinklige Dreyeck DEF die Proportion r : cos DEF = EF : ED. Es ist aber DEF = B, EF = sin BC, OE = cos BC, und in dem in E rechtwinkligen Dreyecke OED ist $DE = \frac{OE \tan DOE}{r} = \frac{\cos BC \tan AB}{r}$; also ist $r : \cos B = \sin BC : \frac{\cos BC \tan AB}{r} = \frac{r \sin BC}{\cos BC} : \tan AB$, oder endlich

$$r : \cos B = \tan BC : \tan AB.$$

Macht man, wie oben, BC = a und AB = c, so ist r : cos B = tang a : tang c, oder cos B = $\frac{r \tan c}{\tan a}$ = $\frac{\tan c \cot a}{r}$. Eben dieses auf den Winkel C angewandt, giebt cos C = $\frac{r \tan b}{\tan a}$ = $\frac{\tan b \cot a}{r}$.

64. *In jedem rechtwinkligen Kugeldreyecke verhält sich der Halbmesser zum Cosinus eines Schenkels des rechten Winkels, wie der Cosinus des andern Schenkels zum Cosinus der Hypothenuse.*

Fig. 10. ABC sey das gegebene in A rechtwinklige Dreyeck, so behaupte ich, dafs r : cos AB = cos AC : cos BC. Denn wenn man wie in den beiden vorigen Sätzen construirt, so giebt das in D rechtwinklige Dreyeck ODF, in welchem die Hypothenuse OF = r ist, OD = cos DOF = cos AC; ferner giebt das in E rechtwinklige Dreyeck ODE, OE = $\frac{OD \cos DOE}{r}$ = $\frac{\cos A \cos AB}{r}$. In dem rechtwinkligen Dreyecke OEF ist aber OE = cos BC, also ist cos BC = $\frac{\cos AC \cos AB}{r}$ oder, was das nämliche ist,

$$r : \cos AC = \cos AB : \cos BC.$$

Diese dritte Grundgleichung läfst sich durch r cos a = cos b cos c ausdrücken; sie enthält kein Princip mehr wie die beiden vorigen, weil die Verwechselung von b und c in der Gleichung Nichts verändert.

65. Aus diesen drey allgemeinen Gleichungen folgen noch drey andere zur Auflösung der rechtwinkligen Kugeldreyecke. Dieselben würden sich auch unmittelbar durch besondere Constructionen beweisen lassen, aber es

ist besser sie aus den drey vorigen, wie folgt, analytisch zu entwickeln *).

Die Gleichungen $\sin B = r \cdot \frac{\sin b}{\sin b}$ und $\cos C = r \cdot \frac{\text{tang } b}{\text{tang } a}$ geben, wenn man sie in einander dividirt $\frac{\cos C}{\text{os } B} = \frac{\text{tang } b}{\sin b} \cdot \frac{\sin a}{\text{tang } a} = \frac{\cos a}{\cos b}$ (und zufolge der dritten Grundgleichung) $= \frac{\cos C}{r}$. Also findet sich folgende vierte Grundregel:

$$\sin B : \cos C = r : \cos c,$$

oder auch, durch Verwechselung der Buchstaben,

$$\sin C : \cos B = r : \cos b.$$

Die erste und zweyte Grundgleichung geben $\sin B = r \frac{\sin b}{\sin a}$, und $\cos B = r \frac{\text{tang } c}{\text{tang } a}$. Daraus folgt $\frac{\sin B}{\cos B}$ oder $\frac{\text{tang } B}{r} = \frac{\sin b \text{ tang } a}{\sin a \text{ tang } c} = \frac{r \sin b}{\cos a \text{ tang } c} =$ (zufolge der dritten Grundgleichung) $\frac{r^2 \sin b}{\cos b \cos c \text{ tang } c} = \frac{\text{tang } b}{\sin c}$; also erhält man zur fünften Grundgleichung $\text{tang } B = r \frac{\text{tang } b}{\sin c}$ oder die Proportion

$$r : \text{tang } B = \sin c : \text{tang } b,$$

oder auch, durch Verwechslung der Buchstaben,

$$r : \text{tang } C = \sin b : \text{tang } c.$$

Endlich geben diese beiden Formeln $\text{tang } B \text{ tang } C = r^2 \frac{\text{tang } b \text{ tang } c}{\sin b \sin c} = \frac{r^2}{\cos b \cos c} =$ (vermöge der dritten Grundgleichung) $\frac{r^3}{\cos a}$. Also ist $r^3 = \cos a \text{ tang } B \text{ tang } C$, oder $\cot B \cot C = r \cos a$ oder

$$\text{tang } B : \cot C = r : \cos a.$$

*) Die analytische Entwicklung wäre wohl überhaupt bey diesem Gegenstande besser. Der Vortrag würde dadurch ungemein viel kürzer und klarer werden. A. d. Uebers.

Dieses ist das sechste und letzte Princip. Es enthält keine andere Gleichung weiter, weil die Verwechslung von C und B Nichts ändert.

Die sechs Grundgleichungen, von welchen viere, jede zwey Gleichungen enthalten, sind also folgende:

1. $r \sin b = \sin a \sin B$, $r \sin c = \sin a \sin C$.
2. $r \operatorname{tang} b = \operatorname{tang} a \cos C$, $r \operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \cos B$.
3. $r \cos a = \cos b \cos c$.
4. $r \cos b = \sin C \cos b$, $r \cos C = \sin B \cos c$.
5. $r \operatorname{tang} b = \sin c \operatorname{tang} B$, $r \operatorname{tang} c = \sin b \operatorname{tang} C$.
6. $r \cos a = \cot B \cot C$.

Diese 10 Gleichungen enthalten alle mögliche Verhältnisse zwischen drey von den fünf Elementen B, C, a, b, c ausgedrückt. Man kann also immer, wenn man zwey von diesen Bestimmungsstücken nebst dem rechten Winkel kennt, unmittelbar das dritte durch seinen Sinus, Cosinus, durch seine Tangente oder Cotangente finden.

66. Wenn eine Seite oder ein Winkel des Dreyecks durch ihre Sinus allein gegeben sind, so haben sie zwey Werthe, folglich thun zwey Dreyecke der Aufgabe genug. Denn jeder Sinus eines Winkels oder Bogens gehört auch zu seinem Supplement. Nicht so verhält es sich, wenn das unbekannte Element durch den Cosinus, durch die Tangente oder Cotangente gegeben ist. Dann läfst sich an dem Zeichen des Ausdrucks sehen, ob das Element gröfser oder kleiner ist als ein rechter Winkel. Es ist kleiner als ρ, wenn der Cosinus, die Tangente oder die Cotangente das Zeichen + haben, gröfser, wenn diese Linien das Zeichen — haben. Es lassen sich über diesen Gegenstand allgemeine Regeln geben, welche aus den sechs Gleichungen folgen. So zum Beyspiel folgt aus der Gleichung $r \cos a = \cos b \cos c$, dafs entweder alle drey Seiten eines rechtwinkligen Kugeldreyecks kleiner

als ρ sind, oder dafs von den drey Seiten zwey gröfser als ρ sind, die dritte aber kleiner ist. Keine andere Verbindung bringt die Gleichheit der Zeichen von cos b cos c und cos a hervor, welche die Gleichung verlangt.

Eben so folgt aus der Gleichung r tang c = sin b tang C, wo sin b immer positiv ist, dafs tang C und tang c immer einerley Zeichen haben. *Also sind in jedem rechtwinkligen Kugeldreyecke ein schiefer Winkel und die ihm gegenüberliegende Seite immer von der nämlichen Art, das heifst, beide zugleich sind gröfser oder kleiner als rechte Winkel.*

Auflösung der rechtwinkligen Kugeldreyecke.

67. Ein Kugeldreyeck kann drey rechte Winkel haben. Alsdann sind auf seine drey Seiten Quadranten. Es kann blos zwey rechte Winkel haben, und dann sind die gegenüberliegenden Seiten, Quadranten, der dritte Winkel aber und die ihm gegenüberliegende Seite sind gleiche Theile des Umkreises. Diese beiden Arten von Dreyecken geben keine Aufgabe. Also kann man sie übergehen, und bey den Dreyecken anfangen, welche blos einen rechten Winkel haben. Der rechte Winkel soll A, die beiden sogenannten schiefen Winkel sollen B und C, a, b und c sollen die den Winkeln A, B und C gegenüberliegenden Seiten seyn. Sind von diesen fünf Gröfsen B, C, a, b, c zwey gegeben, so reducirt sich die Auflösung des Dreyecks auf einen von folgenden sechs Fällen.

Erster Fall.

68. *Aus der Hypothenuse a und einer Seite b findet man die beiden Winkel B und C und die dritte Seite c, mittelst der Gleichungen.*

$$\sin B = r\frac{\sin b}{\sin a}, \cos C = \frac{\text{tang } b \ \cot a}{r}, \cos c = r\frac{\cos a}{\cos b}.$$

Der Winkel C ist nicht ungewifs, eben so wenig wie die Seite c. Der Winkel B mufs mit der Seite b von einerley Art seyn.

Zweyter Fall.

69. *Aus den beiden Seiten b und c um den rechten Winkel, findet man die Hypothenuse a, und die Winkel B und C mittelst der Gleichungen.*

$$\cos a = \frac{\cos b \cos c}{r}, \operatorname{tang} B = r \frac{\operatorname{tang} b}{\sin c}, \operatorname{tang} C = r \frac{\operatorname{tang} c}{\sin b}.$$

Auch hier findet kein zweyfaches Zeichen Statt.

Dritter Fall.

70. *Aus der Hypothenuse a und einem Winkel B, findet man die beiden Seiten b und c, und den andern Winkel c aus den Gleichungen*

$$\sin b = \frac{\sin a \sin B}{r}, \operatorname{tang} c = \frac{\operatorname{tang} a \cos B}{r}, \cot C = \frac{\cos a \operatorname{tang} B}{r}.$$

Die Elemente c und C werden durch diese Formeln wiederum ohne Zweydeutigkeit bestimmt. Die Seite b und der Winkel B sind von einerley Art.

Vierter Fall.

71. *Aus einem Schenkel des rechten Winkels b, und dem ihm gegenüberliegenden Winkel B findet man die drey andern Elemente a, c und C mittelst der Formeln*

$$\sin a = r \frac{\sin b}{\sin B}, \sin c = \frac{\operatorname{tang} b \cot B}{r}, \sin C = r \frac{\cos B}{\cos b}.$$

In diesem Falle werden die drey unbekannten Elemente durch Sinus bestimmt, also hat die Aufgabe zwey Auflösungen. In der That ist es klar, dafs die Dreyecke (Fig. 11.) ABC und AB'C beide in A rechtwinklig sind, und beide die Seite AB = b und den nämlichen gegenüberliegenden Winkel B = B' haben.

Die doppelten Werthe müssen sich aber so combiniren, dafs c und C von einerley Art sind. Dann bestimmen die Zeichen von c und b das Zeichen von a, gemäfs der Formel $\cos b \cos c = r \cos a$; den Werth von a aber findet man unmittelbar aus der Gleichung $\sin a = r \frac{\sin b}{\sin B}$.

Fünfter Fall.

72. *Aus einem Schenkel des rechten Winkels b und dem anliegenden Winkel C findet man die drey andern Stücke a, c, B mittelst der Formeln:*

$$\cot a = \frac{\cot b \cos C}{r}, \tan c = \frac{\sin b \tan C}{r}, \cos B = \frac{\cos b \sin C}{r}.$$

In diesem Falle sind wieder die Zeichen der gesuchten Stücke unzweifelhaft.

Sechster Fall.

73. *Aus den schiefen Winkeln B und C findet man die drey Seiten a, b, c mittelst der Formeln:*

$$\cos a = \frac{\cot B \cot C}{r}, \cos b = \frac{r \cos B}{\sin C}, \cos c = \frac{r \cos C}{\sin B}.$$

Auch in diesem Falle sind die Zeichen unzweifelhaft.

Bemerkung.

74. Das Kugeldreyeck, dessen Winkel A, B, C, und die gegenüberliegenden Seiten a, b, c sind, gehört immer mit einem Polardreyecke zusammen, dessen Winkel die Supplemente der Seiten a, b, c, und dessen Seiten die Supplemente der Winkel A, B, C sind, so, dafs wenn man die Winkel des Polardreyecks A′, B′, C′, und die denselben gegenüberliegenden Seiten a′, b′, c′ nennt,

$$A' = 2\rho - a,\ B' = 2\rho - b,\ C' = 2\rho - c$$
$$a' = 2\rho - A,\ b' = 2\rho - B,\ c' = 2\rho - C$$

ist. Ist nun eine Seite eines Kugeldreyecks a einem Quadranten gleich, so ist der correspondirende Winkel des Polardreyecks ein rechter, und folglich das Polardreyeck rechtwinklig. Also kann auch aus den beiden zur Auflösung des gegebenen Dreyecks nöthigen Stücken, das Polardreyeck, und wiederum mittelst desselben das gegebene Dreyeck aufgelöset werden. Daraus könnte man, die obigen ähnlichen Formeln, zur Auflösung von Dreyecken finden, in welchen eine Seite ein Viertel des Umfanges ist.

Ein gleichwinkliges Dreyeck läfst sich in zwey rechtwinklige, in allen ihren Theilen gleiche Dreyecke theilen; also hängt auch die Auflösung der gleichschenkligen Kugeldreyecke von der Auflösung der rechtwinkligen Kugeldreyecke ab.

Fig. 12. ABC sey ein Kugeldreyeck, in welchem von den beiden Seiten AB und BC, die eine der andern Supplement ist. Verlängert man die Seiten AB und AC, bis sie sich in D schneiden, so sind BC und BD, als Supplemente einer und derselben Seite AB, einander gleich. Ferner sind die Theile des Dreyecks ABC gegeben, so bald man die Theile des Dreyecks BCD kennt, denn ABC bleibt übrig wenn man BCD vom Zweyecke AD abzieht, und umgekehrt. Also beruht die Auflösung des Dreyecks ABC, in welchem zwey Seiten zusammen gleich zwey rechten Winkeln sind, auf der Auflösung des gleichschenkligen Dreyecks BCD, oder des rechtwinkligen BDE, welches die Hälfte von CBD ist.

Wenn von den beiden Seiten AB und BC, eine der andern Supplement ist, so müssen auch die gegenüberliegenden Winkel ACB und BAC einer des andern Supplement seyn. Denn BCD und BCA sind Supplemente. Nun ist BCD $=$ D $=$ A. Also kann nicht a $+$ c $= 2\rho$

seyn, ohne dafs zugleich $A + C = 2\rho$ wäre, und umgekehrt.

Daraus folgt, dafs durch rechtwinklige Kugeldreyecke auch aufgelöset werden können:

erstlich, Kugeldreyecke, in welchen eine Seite ein Quadrant ist;

zweytens, gleichschenklige Kugeldreyecke;

drittens, Kugeldreyecke, in welchen die Summe zweyer Seiten und die Summe der beiden gegenüberliegenden Winkel gleich zwey rechten ist.

Grundgleichungen zur allgemeinen Auflösung von Kugeldreyecken.

65. *In jedem Kugeldreyecke verhalten sich die Sinus der Winkel wie die Sinus der gegenüberliegenden Seiten.*

Fig. 13. ABC sey irgend ein Kugeldreyeck, so behaupte ich, dafs $\sin B : \sin C = \sin AC : \sin AB$.

Aus dem Scheitel A ziehe man den Bogen AD auf die gegenüberliegende Seite BC senkrecht, so geben die rechtwinkligen Dreyecke ABD und ACD die Proportionen:

$$\sin B : r = \sin AD : \sin AB$$
$$r : \sin C = \sin AC : \sin AD.$$

Man multiplicire diese Proportionen Glied um Glied, und lasse die gemeinschaftlichen Factoren weg, so erhält man

$$\sin B : \sin C = \sin AC : \sin AB.$$

Fig. 14. Fiele das Perpendikel AD aufserhalb des Dreyecks ABC, so würde man die nämlichen Proportionen erhalten, und in der einen würde sin C, den Sinus von ACD bezeichnen. Da aber die Winkel ACD und ACB von einander Supplemente sind, so sind ihre Sinus gleich; also ist immer $\sin B : \sin C = \sin AC : \sin AB$.

Sind a, b, c die den Winkeln A, B, C gegenüberliegenden Seiten, so ist, vermöge des obigen Satzes, sin A : sin a = sin B : sin b = sin C : sin c, welches die zweyfache Gleichung

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

giebt.

76. *In jedem Kugeldreyecke ist der Cosinus eines Winkels gleich dem Quadrate des Halbmessers, multiplicirt mit dem Cosinus der gegenüberliegenden Seite, weniger dem Producte des Halbmessers in die Cosinus der anliegenden Seiten, das Ganze dividirt durch das Product der Sinus der nämlichen Seiten; zum Beyspiel für den Winkel C ist*

$$\cos C = \frac{r^2 \cos c - r \cos a \cos b}{\sin a \sin b}.$$

Eben so ist für die andern beiden Winkel

$$\cos A = \frac{r^2 \cos a - r \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$\cos B = \frac{r^2 \cos b - r \cos a \cos c}{\sin a \sin c}$$

Fig. 15. ABC sey das gegebene Dreyeck, in welchem BC = a, AC = b, AB = c. Aus dem Mittelpuncte der Kugel O ziehe man die unbestimmten graden Linien OA, OB, OC, nehme OD willkürlich an, und ziehe durch den Punct D, in der Ebene OCA die Linie DE, und in der Ebene OCB die Linie DF, beide auf OD senkrecht und so, dafs sie die verlängerten Halbmesser OA und OB in E und F schneiden. Endlich ziehe man EF.

Der Winkel D des Dreyecks EDF ist, der Construction nach, das Maafs des Winkels zwischen den beiden Ebenen OCA und OCB; also ist der Winkel EDF gleich dem Winkel C des Kugeldreyecks ACB. In den Dreyecken DEF und OEF aber ist (65)

$$\frac{\cos EDF}{r} = \frac{DE^2 + DF^2 - EF^2}{2DE \cdot DF},$$

$$\frac{\cos EOF}{r} = \frac{OE^2 + OF^2 - EF^2}{2OE \cdot OF}.$$

Man nehme den Werth von EF^2 aus der zweyten von diesen beiden Gleichungen und substituire ihn in die erste, so findet man

$$\frac{\cos EDF}{r} = \frac{DE^2 + DF^2 - OE^2 - OF^2 + 2OE \cdot OF \cdot \frac{\cos EOF}{r}}{2DE \cdot DF}$$

Nun ist $OE^2 - DE^2 = OD^2$ und $OF^2 - DF^2 = OD^2$, also ist

$$\cos EDF = \frac{OE \cdot OF \cos EOF - OD^2 \cdot r}{DE \cdot DF}.$$

In diese Gleichung dürfen nur noch die auf das Kugeldreyeck sich beziehenden Werthe gesetzt werden. Es ist $EDF = C, EOF = AB = c, \frac{OE}{DE} = \frac{r}{\sin DOE} = \frac{r}{\sin b}$, $\frac{OF}{DF} = \frac{r}{\sin DOF} = \frac{r}{\sin a}$, $\frac{OD}{DE} = \frac{\cos DOE}{\sin DOE} = \frac{\cos b}{\sin b}$, $\frac{OD}{DF} = \frac{\cos DOF}{\sin DOF} = \frac{\cos a}{\sin a}$;

also ist

$$\cos C = \frac{r^2 \cos c - r \cos a \cos b}{\sin a \sin b}.$$

Diese Grundgleichung, welche, der Reihe nach auf die drey Winkel angewendet, drey Gleichungen giebt, ist zur Auflösung aller Aufgaben von Kugeldreyecken hinreichend. Sie hat für Kugeldreyecke eben die Allgemeinheit, wie die Gleichung Art. 45 für ebene Dreyecke. Denn weil immer drey Stücke zur Bestimmung der drey andern gegeben sind, so lassen sich aus der Grundgleichung allemal die zur Auflösung der Aufgabe nöthigen Gleichungen hernehmen. Die Entwicklung dieser neuen Gleichungen geschieht am besten analytisch, und daraus ferner eben so die Entwicklung derjenigen Formeln, welche für Logarithmen am bequemsten sind.

77. Weil die obige Grundgleichung ganz allgemein ist, so mufs sie alle andere auf Kugeldreyecke sich beziehende Gleichungen einschliefslich enthalten, namentlich auch die Gleichung des 65sten Art. Dafs es so sey, läfst sich leicht zeigen. Denn die Gleichung $\cos C = \frac{r^2 \cos c - r \cos a \cos b}{\sin a \sin b}$ giebt $r^2 - \cos C^2$ oder $\sin C^2 =$

$$\frac{r^2 \sin a^2 \sin b^2 - r^2 \cos a^2 \cos b^2 + 2r^3 \cos a \cos b \cos c - r^4 \cos c^2}{\sin a^2 \sin b^2}$$

Nun ist $\sin a^2 \sin b^2 = (r^2 - \cos a^2)(r^2 - \cos b^2) = r^4 - r^2 \cos a^2 - r^2 \cos b^2 + \cos a^2 \cos b^2$. Substituirt man dieses und zieht die Wurzel aus, so erhält man

$$\frac{r}{\sin a \sin b} \sqrt{\left[r^4 - r^2 \cos a^2 - r^2 \cos b^2 - r^2 \cos c^2 + 2r \cos a \cos b \cos c\right]}.$$

Der Kürze wegen sey

$$\sqrt{[r^4 - r^2 \cos a^2 - r^2 \cos b^2 - r^2 \cos c^2 + 2r \cos a \cos b \cos c]} = z$$

so ist

$$\sin C = \frac{rz}{\sin a \sin b}, \text{ oder } \frac{\sin C}{\sin c} = \frac{rz}{\sin a \sin b \sin c}.$$

Die Werthe von cos A und cos B würden geben

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{rz}{\sin a \sin b \sin c}, \quad \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{rz}{\sin a \sin b \sin c}.$$

Die Gröfse z ändert sich durch die Verwechslung der Buchstaben nicht, folglich ist $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$ und dies ist die Gleichung des 65sten Artikels.

78. Die für cos C und sin C gefundenen Ausdrücke dienen, die Winkel eines Kugeldreyecks aus den drey Seiten zu finden. Man kann aber die Formel für Logarithmen noch bequemer machen.

Denn setzt man in den Ausdruck $r^2 - r \cos C = 2 \sin \frac{1}{2} C^2$ den obigen Werth von cos C, so erhält man

$$\frac{2 \sin \frac{1}{2} C^2}{r} = 1 - \frac{\cos C}{r} = \frac{\cos a \cos b + \sin a \sin b - r \cos c}{\sin a \sin b}.$$

Der Zähler dieses Ausdrucks ist nichts anders als $r \cos(a - b) - r \cos c$. Nach der Formel $r \cos q - r \cos p = 2 \sin \frac{1}{2}(p + q) \sin \frac{1}{2}(p - q)$ (58.) ist aber $r \cos(a - b) - r \cos c = 2 \sin \frac{1}{2}(c - b + a) \sin \frac{1}{2}(c - a + b)$, also ist

$$\frac{\sin \frac{1}{2} C^2}{r^2} = \frac{\sin \frac{1}{2}(c + b - a) \sin \frac{1}{2}(c + a - b)}{\sin a \sin b},$$

oder $\sin \frac{1}{2} C = r \surd \left[\frac{\sin \frac{1}{2}(c + b + a) \sin \frac{1}{2}(c + a - b)}{\sin a \sin b}\right]$.

Aehnliches findet man für die Ausdrücke von $\sin \frac{1}{2} A$ und $\sin \frac{1}{2} B$, durch die drey Seiten a, b, c.

79. Die Aufgaben der sphärischen Trigonometrie bestehen, wie schon bemerkt, darin, drey von den sechs Seiten A, B, C, a, b, c aus den drey übrigen zu finden. Es sind also Gleichungen zwischen je vier Gröfsen nach allen Versetzungen nothwendig. Sechs Gröfsen lassen sich zu vieren $\frac{6.5}{2} = 15$ mal versetzen, also wären 15 verschiedene Gleichungen möglich. Nimmt man aber nur auf die wesentlich verschiedenen Rücksicht, so reduciren sich die 15 Gleichungen auf viere.

Denn *erstlich* umfafst die Verbindung abcA durch Versetzung der Buchstaben zugleich die Verbindungen abcA, abcB, abcC.

Zweytens. In der Verbindung abAB liegen zugleich noch bcBC und acAC.

Drittens. Die Verbindung abAC umfafst die sechs Verbindungen abAC, abBC, acAB, acBC, bcAB, bcAC.

Viertens. In der Verbindung aABC liegen zugleich noch bABC und cABC.

Es giebt also zwar im Ganzen 15 Verbindungen, aber nur vier wesentlich von einander verschiedene.

80. Die Gleichung $\cos A = \frac{r^2 \cos a - r \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$

drückt die erste Verbindung abcA aus, nebst denjenigen, welche davon abhängen.

Um die Gleichung zu finden, welche der Verbindung abAB entspricht, mufs man c zwischen den Ausdrücken von cos A und cos B wegschaffen. Diese Wegschaffung ist schon in (77) geschehen, und das Resultat ist $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b}$.

Die dritte Verbindung entsteht aus den Verhältnissen zwischen a, b, A, C. Da für dieselbe

$$\cos A \sin b \sin c = r^2 \cos a - r \cos b \cos c$$

$$\cos C \sin b \sin a = r^2 \cos c - r \cos b \cos a$$

ist, so darf man nur cos c wegschaffen, welches $r \cos A = \sin c + \cos C \sin a \cos b = r \cos a \sin b$ giebt. Setzt man darauf in diese Gleichung $\sin c = \frac{\sin a \sin C}{\sin A}$, so ist für die dritte Verbindung

$$\cot A \sin C + \cos C \cos b = \cot a \sin b.$$

Um endlich das Verhältnifs zwischen A, B, C, a zu finden, bemerke man, dafs in der vorigen Gleichung $\cot a \sin b = r \cos a, \frac{\sin b}{\sin a} = r \cos a \frac{\sin B}{\sin A}$ ist. Also ist, wenn man diese Gleichung mit sin A multiplicirt,

$$r \cos A \sin C = r \cos a \sin B - \sin A \cos C \cos b.$$

Verwechselt man in dieser Gleichung die Buchstaben A und B, und a und b, so erhält man,

$$r \cos B \sin C = r \cos b \sin A - \sin B \cos C \cos a,$$

und aus diesen beiden Gleichungen folgt, wenn man cos b wegschafft,

$$r^2 \cos A \sin C + r \cos B \sin C \cos C = \cos a \sin B \sin^2 C,$$

also endlich

$$\cos a = \frac{r^2 \cos A + r \cos B \cos C}{\sin B \sin C}.$$

Dieses ist das gesuchte Verhältnifs zwischen A, B, C und a, oder die vierte von den zur Auflösung von Kugeldreyecken nöthigen Gleichungen.

81. Die Gleichung zwischen A, B, C und a hat eine auffallende Aehnlichkeit mit derjenigen zwischen a, b, c und A. Der Grund davon ist die Eigenschaft der Polar- oder Supplementardreyecke. Denn wie bekannt, gehört zu einem Dreyecke, dessen Winkel A, B, C, und dessen, diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten a, b, c sind, allemal ein Polardreyeck, dessen Seiten $2\rho - A$, $2\rho - B$, $2\rho - C$, und dessen, diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel, $2\rho - a$, $2\rho - b$, $2\rho - c$ sind. Wendet man nun diese Gleichung des 76ten Art. auf dieses Polardreyeck an, so erhält man

$$\cos(2\rho - a) = \frac{r^2 \cos(2\rho - A) - r\cos(2\rho - B)\cos(2\rho - C)}{\sin(2\rho - B)\sin(2\rho - C)},$$

welches

$$\cos a = \frac{r^2 \cos A + r\cos B\cos C}{\sin B\sin C}$$

giebt, wie wir oben auf einem andern Wege fanden.

Diese Formel enthält unmittelbar die Auflösung in dem Falle, wenn eine Seite aus den drey Winkeln gesucht wird. Um aber eine für Logarithmen bequemere Formel zu haben, substituire man den Werth von cos a in die Gleichung $1 - \frac{\cos a}{r} = \frac{2\sin\frac{1}{2}a^2}{r}$ welches giebt:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}a^2}{r^4} = \frac{\sin B\sin C - \cos B\cos C - r\cos A}{\sin B\sin C} = \frac{-r\cos(B+C) - r\cos A}{2\sin B\sin C}$$

Weil nun allgemein $r\cos p + r\cos q = 2\cos\frac{1}{2}(p+q)$. $\cos\frac{1}{2}(p-q)$ ist (38), so reducirt sich die Gleichung auf

$$\frac{\sin\frac{1}{2}a^2}{r^2} = \frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B\sin C},$$

wobey zu bemerken, dafs das zweyte Glied, obgleich es das Zeichen — hat, dennoch immer positiv ist. Denn es ist allgemein $\sin(x - \rho) = \frac{\sin x\cos\rho - \cos x\sin\rho}{r}$ $= -\cos x$, also ist $-\cos\frac{1}{2}(A+B+C) = \sin(\frac{1}{2}(A+B+C) - \rho)$, welche Gröfse immer positiv ist

weil $A + B + C$ immer zwischen 2ρ und 6ρ, und folglich $\frac{1}{2}(A + B + C) - \rho$ immer zwischen o und 2ρ liegt. Eben so ist $\cos \frac{1}{2}(B + C - A)$ immer positiv, weil $B + C - A$ nicht gröſser als 2ρ seyn kann. Denn in dem Polardreyecke ist die Seite $2\rho - A$ kleiner als die Summe der beiden andern $2\rho - B$ und $2\rho - C$, also ist $2\rho - A < 4\rho - B - C$, oder $B + C - A < 2\rho$.

Da auf diese Weise das obige Resultat immer positiv ist, so hat man, um eine Seite aus den Winkeln zu finden, die Formel

$$\sin \tfrac{1}{2} a = r \sqrt{\left[\frac{-\cos \frac{1}{2}(A + B + C) \cos \frac{1}{2}(B + C - A)}{\sin B \sin C}\right]}.$$

82. Ehe wir weiter gehen, ist zu bemerken, daſs aus diesen allgemeinen Formeln diejenigen für rechtwinklige Dreyecke hergeleitet werden können *). Man mache zu dem Ende $A = \rho$, so wohl in den vier Hauptformeln, als in den übrigen, welche daraus durch Verwechslung der Buchstaben entstehen. Zunächst giebt die Gleichung $\cos A \sin b \sin c = r^2 \cos a - r \cos b \cos c$, durch diese Substitution,

$$1. \quad r \cos a = \cos b \cos c.$$

Die aus der allgemeinen Gleichung abgeleiteten Gleichungen enthalten kein A, und geben also für den Fall, daſs $A = \rho$ ist, nichts Abweichendes.

Die Gleichung $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b}$ giebt für $A = \rho$,

$$2. \quad \frac{r}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b}.$$

Die daraus abgeleitete $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin C}{\sin c}$ giebt $\frac{r}{\sin a} = \frac{\sin C}{\sin c}$, aber diese ist auch eben sowohl eine abgeleitete von der Gleichung 2.

*) Also, war es überflüſsig, die Formeln für rechtwinklige Dreyecke erst besonders aus der Figur zu suchen.

A. d. Uebers.

Die Gleichung cot A sin C + cos C cos b = cot a sin b giebt für A = ρ, cos C cos b = cot a sin b, oder

3. cos C tang a = r tang b.

Die abgeleitete cot C sin A + cos A cos b = cot c sin b giebt in dem nämlichen Falle, r cot C = cot c sin b, oder

4. r tang c = sin b tang C.

Endlich geben die vierte Hauptgleichung sin B sin C cos a = r^2 cos A + r cos B cos C, und ihre abgeleitete sin A sin C cos b = r^2 cos B + r cos A cos C, für A = ρ; sin B sin C cos a = r cos B cos C, und sin C cos b = r cos B, oder

5. cot B cot C = r cos a

6. sin C cos b = r cos B.

Auf diese 6 Gleichungen ist die Auflösung der rechtwinkligen Kugeldreyecke gegründet.

83. Wir wollen den Vortrag der sphärischen Grundgleichungen mit dem Beweise der sogenannten *Neperschen Analogieen* beschliefsen, welche häufig zur Vereinfachung der Auflösung von Kugeldreyecken dienen.

Durch die Verbindung der in a, b, c ausgedrückten Werthe von cos A und cos C finden wir

r cos A sin c = r cos a sin b — cos C sin a cos b (70).

Dieses giebt, durch Verwechslung der Buchstaben,

r cos B sin c = r cos b sin a — cos C sin b cos a.

Rechnet man diese beiden Gleichungen zusammen und reducirt sie, so erhält man

sin c (cos A + cos B) = (r cos C) sin (a + b).

Weil aber $\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}$, so ist

sin c (sin A + sin B) = sin C (sin a + sin b)

und sin c (sin A — sin B) (sin a — sin b) = sin C.

Dividirt man diese beiden Gleichungen durch die vorigen, so erhält man

$$\frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \frac{\sin C}{r - \cos C} \cdot \frac{\sin a + \sin b}{\sin (a + b)}$$

$$\frac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B} = \frac{\sin C}{r - \cos C} \cdot \frac{\sin a - \sin b}{\sin (a + b)},$$

und wenn man diese Ausdrücke mittelst der Formeln des 29sten und 30sten Art. reducirt,

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}(A + B) = \cot \tfrac{1}{2} C \frac{\cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2}(a + b)}$$

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}(A - B) = \cot \tfrac{1}{2} C \frac{\sin \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2}(a + b)}.$$

Sind also zwey Seiten a und b eines Kugeldreyecks mit dem eingeschlossenen Winkel C gegeben, so findet man die beiden andern Winkel A und B durch die *Analogieen:*

$$\cos \tfrac{1}{2}(a+b) : \cos \tfrac{1}{2}(a-b) = \cot \tfrac{1}{2} C : \text{tang}\ \tfrac{1}{2}(A+B)$$

$$\sin \tfrac{1}{2}(a+b) : \sin \tfrac{1}{2}(a-b) = \cot \tfrac{1}{2} C : \text{tang}\ \tfrac{1}{2}(A-B).$$

Wendet man diese Analogieen auf das Polardreyeck ABC an, so mufs $2\rho - A$, $2\rho - B$, $2\rho - C$, $2\rho - a$ $2\rho - b$, $2\rho - c$ statt A, B, C, a, b, c gesetzt werden. Dieses giebt folgende zwey andere Analogieen:

$$\cos \tfrac{1}{2}(A+B) : \cos \tfrac{1}{2}(A-B) = \text{tang}\ \tfrac{1}{2} c : \text{tang}\ \tfrac{1}{2}(a+b)$$

$$\sin \tfrac{1}{2}(A+B) : \sin \tfrac{1}{2}(A-B) = \text{tang}\ \tfrac{1}{2} c : \text{tang}\ \tfrac{1}{2}(a-b)$$

mittelst welcher man aus einer gegebenen Seite c, und den beiden anliegenden Winkeln A und B, die beiden andern Seiten a und b finden kann. Diese vier Proportionen sind unter dem Namen der *Neperschen Analogieen* bekannt.

Allgemeine Auflösung von Kugeldreyecken.

Bey Auflösung der Kugeldreyecke kommen sechs Fälle vor, welche wir der Reihe nach abhandeln wollen.

Erster Fall.

84. *Aus den drey Seiten a, b, c findet man einen beliebigen Winkel, zum Beyspiel den der Seite a gegenüberliegenden Winkel A, mittelst der Formel*

$$\sin \tfrac{1}{2} A = r \sqrt{\left[\frac{\sin \frac{1}{2}(a + b - c) \sin \frac{1}{2}(a + c - b)}{\sin b \sin c}\right]}.$$

Zweyter Fall.

85. *Aus zwey Seiten und dem, einer dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel A, die dritte Seite c und die beiden andern Winkel B und C zu finden.*

Erstlich den Winkel B giebt die Gleichung $\sin B = \frac{\sin A \sin b}{\sin a}$.

Zweytens. Um den Winkel C zu finden, muſs man die Gleichung $\cot A \sin C + \cos C \cos b = \cot a \sin b$ auflösen. Man nehme zu diesem Ende einen Hülfswinkel φ an, von der Art, daſs $\tang \varphi = \frac{\cos b \tang A}{r}$, oder $\cot A = \frac{\cos b \cos \varphi}{\sin \varphi}$. Diesen Werth von cot A setze man in die aufzulösende Gleichung, so erhält man $\frac{\cos b}{\sin \varphi}(\cos \varphi \sin C + \sin \varphi \cos C) = \cot a \sin b$, woraus folgt:

$$\sin (C + \varphi) = \frac{\tang b \sin \varphi}{\tang a}.$$

Durch dieses Hülfsmittel werden die beiden unbekannten Glieder der gegebenen Gleichung auf *ein* Glied gebracht, woraus sich dann der Winkel C leicht findet.

Drittens. Die Seite c findet sich aus der Gleichung

$$\sin c = \frac{\sin a \sin C}{\sin A}.$$

Auch kann man dieselbe unmittelbar durch Auflösung der Gleichung $r \cos b \cos c + \cos A \sin b \sin c = r^2 \cos a$ finden. Es sey nämlich $\cos A \sin b = \frac{r \cos b \sin \varphi}{\cos \varphi}$,

oder tang $\varphi = \frac{\cos A \tang b}{r}$, so erhält man $\frac{\cos b}{\cos \varphi} = (\cos c \cos \varphi + \sin c \sin \varphi) = r \cos a$. Also erhält man, wenn man erst den Hülfswinkel φ aus der Gleichung tang $\varphi = \frac{\cos A \tang b}{r}$ nimmt, für die Seite c, die Gleichung

$$\cos (c - \varphi) = \frac{\cos a \cos \varphi}{\cos b}.$$

Dieser zweyte Fall läſst zwey Auflösungen zu, wie der ähnliche Fall bey gradlinigen Dreyecken.

Dritter Fall.

86. *Aus zwey gegebenen Winkeln a und b und dem eingeschlossenen Winkel C die beiden andern Winkel A und B und die dritte Seite c zu finden.*

Erstlich. Die Winkel A und B finden sich aus den beiden Gleichungen

$$\cot A = \frac{\cot a \sin b - \cos C \cos b}{\sin C} \text{ und } \cot B = \frac{\cos b \sin a - \cos C \cos a}{\sin C},$$

in welchen auch die zweyten Glieder, mittelst eines Hülfwinkels auf ein einziges gebracht werden könnten. Indessen ist es besser, hier die Neperschen Analogieen zu gebrauchen, welche geben

$$\tang \tfrac{1}{2} (A - B) = \cot \tfrac{1}{2} C \frac{\sin \frac{1}{2} (a - b)}{\sin \frac{1}{2} (a + b)}$$

$$\tang \tfrac{1}{2} (A + B) = \cot \tfrac{1}{2} C \frac{\cos \frac{1}{2} (a - b)}{\cos \frac{1}{2} (a + b)}.$$

Zweytens. Kennt man die Winkel A und B, so läſst sich die dritte Seite c aus der Gleichung $\sin c = \sin a \frac{\sin C}{\sin A}$ finden. Um c unmittelbar zu haben, dient die Gleichung $r^2 \cos c = \sin a \sin b \cos C + r \cos a \cos b$. Man nehme einen Hülfswinksl φ an, so daſs $\sin b \cos C = \cos b \tang \varphi$, oder $\tang \varphi = \frac{\cos C \tang b}{r}$,

so erhält man

$$\cos c = \frac{\cos b}{\cos \varphi} \cos (a - \varphi).$$

Vierter Fall.

87. *Aus zwey gegebenen Winkeln A und B und der anliegenden Seite c die beiden andern Seiten a und b und den dritten Winkel C zu finden.*

Erstlich. Die beiden Seiten a und b werden durch die Formeln

$$\cot a = \frac{\cot A \sin B + \cos B \cos c}{\sin c}$$

$$\text{und } \cot b = \frac{\cot B \sin A + \cos A \cos c}{\sin c}$$

gefunden. Leichter noch berechnet man sie durch die Neperschen Analogieen, nämlich mittelst der Proportionen:

$$\sin \tfrac{1}{2}(A+B) : \sin \tfrac{1}{2}(A-B) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a-b)$$
$$\cos \tfrac{1}{2}(A+B) : \cos \tfrac{1}{2}(A-B) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a+b).$$

Zweytens. Kennt man a und b, so findet sich C aus der Gleichung $\sin C = \frac{\sin c \sin A}{\sin a}$. Auch kann man C unmittelbar aus der Gleichung $r^2 \cos C = \cos c \sin A \sin B - r \cos A \cos B$ finden. Man nehme den Hülfswinkel φ an, so dafs

$$\cos c \sin B = \cos B \cot \varphi \text{ oder } \cot \varphi = \frac{\cos c \operatorname{tang} B}{r},$$

so erhält man

$$\cos C = \cos B \,.\, \frac{\sin (A - \varphi)}{\sin \varphi}.$$

In diesem und dem vorigen Falle bleibt Nichts unbestimmt.

Fünfter Fall.

Aus den beiden Winkeln A und B und der, dem einen gegenüberliegenden Seite a, die beiden andern Seiten b und c und dem dritten Winkel C zu finden.

Erstlich. Die Seite b findet sich aus der Gleichung $\sin b = \sin a \frac{\sin B}{\sin A}$.

Zweytens. Die Seite c hängt von der Gleichung

$$\cot a \sin c - \cos B \cos c = \cot A \sin B$$

ab. Es sey $\cot a = \cos B \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$, oder $\tang \varphi = \frac{\cos B \tang a}{r}$, so ist $\frac{\cos B}{\sin \varphi}(\sin c \cos \varphi - \cos c \sin \varphi) = \cot A \sin B$, also

$$\sin(c - \varphi) = \frac{\tang B \sin \varphi}{\tang A}.$$

Drittens. Der Winkel C giebt die Gleichung $\cos a \sin B \sin C - r \cos B \cos C = r^2 \cos A$. Es sey nämlich $\cos a \sin B = \frac{r \cos B \cos \varphi}{\sin \varphi}$, oder $\cot \varphi = \frac{\cos a \tang B}{r}$, so erhält man $\frac{\cos B}{\sin \varphi}(\sin C \cos \varphi - \cos C \sin \varphi) = r \cos A$, also

$$\sin(C - \varphi) = \frac{\cos A \sin \varphi}{\cos B}.$$

Dieser fünfte Fall hat, wie der zweyte, zwey Auflösungen, eben wie in dem ähnlichen Falle bey gradlinigen Dreyecken.

Sechster Fall.

89. *Aus den drey Winkeln A, B und C findet man eine beliebige Seite, zum Beyspiel die dem Winkel A gegenüberliegende Seite a, mittelst der Formel*

$$\sin \tfrac{1}{2} a = r \sqrt{\left[\frac{-\cos \frac{1}{2}(A + B + C) \cos \frac{1}{2}(B + C - A)}{\sin B \sin C}\right]}.$$

Die drey letzten von diesen sechs allgemeinen Fällen können auch aus den drey ersten mittelst der Eigenschaften der Polardreyecke abgeleitet werden, so daſs es also eigentlich bey der Auflösung von Kugeldreyecken nur drey verschiedene Fälle giebt. Der erste Fall läſst sich durch eine einzige Gleichung auflösen,

wie bey gradlinigen Dreyecken, der dritte fast eben so leicht durch die Neperschen Gleichungen. Der zweyte erfordert zwey Gleichungen und hat zuweilen zwey Auflösungen, während der erste und dritte nie mehr als eine Auflösung haben.

Fig. 16. 90. Um im zweyten Falle zu sehen, ob für besondere Werthe von A, a, b zwey verschiedene Dreyecke Statt finden, welche der Aufgabe genug thun, oder nur eines, setze man den Winkel $A < \rho$, und verlängere die beiden Seiten AC und AB, bis sie sich zum zweytenmal in A schneiden. Macht man den Bogen $AC < \rho$ und zieht CD auf AB senkrecht, so sind beide Seiten AD und CD des rechtwinkligen Dreyecks ACD kleiner als ρ, die Linie CD ist die kleinste Entfernung des Puncts C vom Bogen AB, und wenn man $DB' = DB$ macht, so sind die schrägen Linien CB′ und CB einander gleich, und beide um so länger, je weiter sie sich vom Perpendikel entfernen. Es sey $AC = b$, $CB = a$, so hat offenbar das Dreyeck, in welchem $A < \rho$, $b < \rho$ und $a < b$, zwey Auflösungen ACB und ACB′; aber sobald $a > b$, während A und b kleiner als ρ sind, fällt der Punct B′ über A hinaus, und es giebt nur eine Auflösung ABC.

Ferner sey $AC' > \rho$. Zieht man C′D′ auf ABA′ senkrecht, so ist $C'D' < A'C'$, und der Bogen C′B‴ zwischen D′ und A′, ist $> C'D'$ und $< C'A'$. Macht man also $AC' = b$, $C'B'' = C'B''' = a$, so läſst die Voraussetzung $A < \rho$ und $b > \rho$ offenbar zwey Auflösungen zu, sobald $a + b < 2\rho$; aber nur eine, wenn $a + b > 2\rho$, weil alsdann der Punct B‴ über A′ hinaus fällt. Untersucht man auf gleiche Weise den Fall, wann der Winkel $A > \rho$ ist, so lassen sich auch die Kennzeichen finden, welche entscheiden, ob in dem zweyten Falle zwey Auflösungen Statt finden, oder nur eine.

$A < \rho, b < \rho$ { a > b hat eine Auflösung, a < b hat zwey Auflösungen,

$A < \rho, b > \rho$ { $a + b > 2\rho$ hat eine Auflösung, $a + b < 2\rho$ hat zwey Auflösungen,

$A > \rho, b < \rho$ { $a + b > 2\rho$ hat zwey Auflösungen, $a + b < 2\rho$ hat eine Auflösung,

$A > \rho, b > \rho$ { a > b hat zwey Auflösungen, a < b hat eine Auflösung.

Wenn $A = \rho$, so giebt es nur eine Auflösung, es mag $a = b$ oder $a + b = 2\rho$ seyn. Es finden zwey Auflösungen Statt wenn $b = \rho$.

91. Alle diese Resultate können mittelst des Polardreyecks auf den fünften Fall angewendet werden. Man erhält folgende Kennzeichen, aus welchen sich sehen läfst, ob für gegebene Werthe A, B und a zwey Dreyecke Statt finden, die der Aufgabe genug thun, oder nur eins.

$a > \rho, B > \rho$ { A + B hat eine Auflösung, A > B hat zwey Auflösungen,

$a > \rho, B < \rho$ { $A + B < 2\rho$ hat eine Auflösung, $A + B > 2\rho$ hat zwey Auflösungen,

$a < \rho, B > \rho$ { $A + B < 2\rho$ hat zwey Auflösungen, $A + B > 2\rho$ hat eine Auflösung,

$a < \rho, B < \rho$ { A < B hat zwey Auflösungen, A > B hat eine Auflösung.

Es giebt nur eine Auflösung, wenn entweder $a = \rho$, oder $A = B$, oder $A + B = 2\rho$. Es giebt deren zwey wenn $B = \rho$.

92. Um jedesmal die unnützen oder falschen *) Auflösungen zu vermeiden, mufs man sich erinnern, *erstlich*, dafs alle Winkel und Seiten immer kleiner als 2ρ sind.

*) Unnütz oder falsch kann wohl nie Etwas seyn, was man durch eine richtige Rechnung findet. A. d. Uebers.

Zweytens. Dafs die gröfsern Winkel den gröfsern Seiten gegenüber liegen, so dafs, wenn $A > B$, auch $a > b$ ist, und umgekehrt.

Beyspiele der Auflösung von Kugeldreyecken.

Fig. 15. 93. *Erstes Beyspiel.* O, M und N sollen drey Puncte in einer gegen den Horizont geneigten Ebene seyn; zieht man aus diesen drey Puncten Perpendikel OD, Mm und Nn auf die horizontale Ebene DEF, so sind D, m, n die Projectionen der in O, M, N liegenden Gegenstände auf die horizontale Ebene, und mDn ist die Projection des Winkels MON. Ist nun der Winkel MON nebst den Neigungen seiner beiden Schenkel OM, ON gegen die Verticale OD gegeben, so kommt es darauf an, den Projectionswinkel mDn zu finden.

Man beschreibe aus O mit einem Halbmesser $= 1$ eine Kugelfläche, welche die Schenkel OM, ON, und die Verticale OD in A, B, C schneiden, so entsteht ein Kugeldreyeck ABC, dessen drey Seiten bekannt sind; folglich kann man den Winkel C = mDn mittelst der Formel des ersten Falles berechnen.

Es sey z. B. der Winkel MON = AB = 64° 44′ 60″, der Winkel DOM = AC = 98° 12′ und der Winkel DON = BC = 105° 42′, so ist nach der erwähnten Formel

$$\sin \tfrac{1}{2} C = r^2 \frac{\sin 28^\circ\, 57'\, 30'' \cdot \sin 35^\circ\, 87'\, 30''}{\sin 98^\circ\, 12' \cdot \sin 105^\circ\, 42'}$$

welches, wie folgt, berechnet wird:

$$\begin{array}{lrlr}
\log \sin 28^\circ\, 57'\, 30'' = & 9{,}6373956 & \log \sin 98^\circ\, 12' = & 9{,}9998106 \\
\log \sin 35^\circ\, 87'\, 30'' = & \underline{9{,}7276562} & \log \sin 65^\circ\, 42' = & \underline{9{,}9984242} \\
\text{Summe} + 2 \log r = & 39{,}3650518 & & 19{,}9982348 \\
 & \underline{19{,}9982348} & & \\
2 \log \sin \tfrac{1}{2} C = & 19{,}3668170 & & \\
\log \sin \tfrac{1}{2} C = & 9{,}6843085 & \tfrac{1}{2} C = & 32^\circ\, 4'\, 70{,}5'' \\
 & & C = & 64^\circ\, 9'\, 41'
\end{array}$$

Also hat ein in der obigen schiefen Ebene gemessener Winkel von 64° 44′ 60″ einen Proportionswinkel von 64° 9′ 41″ im Horizonte.

Die Aufgabe kommt in der Feldmefskunst vor, wenn die zu bestimmenden Puncte in verschiedenen Höhen aufser dem Horizonte liegen.

94. *Zweytes Beyspiel.* Aus den Breiten zweyer Oerter auf der Erde und dem Unterschiede ihrer Länge, ihre kürzeste Entfernung von einander zu finden.

Fig. 14. Man stelle sich ein Kugeldreyeck vor, dessen Scheitel die beiden gegebenen Oerter und der Nordpol sind. In diesem Dreyecke ist der Winkel am Pol ACB bekannt, denn dieser Winkel ist dem Unterschiede der Längen der beiden Oerter A — B gleich, desgleichen sind die beiden Schenkel AC und BC bekannt, denn sie sind die Complemente der Breiten der Puncte A und B. Die dritte Seite AB läfst sich also mittelst der Formeln des dritten Falles berechnen.

Es sollen z. B. A und B die Sternwarten von Paris und Peking seyn. Die nördliche Breite der einen ist 54° 26′ 36″, die der andern 44° 33′ 73″, der Unterschied der Längen ist 126° 80′ 56″. Also ist

$$a = 45° 73' 64''$$
$$b = 55° 66' 27''$$
$$C = 126° 80' 56''.$$

Zur Berechnung von c aus den gegebenen Stücken, dienen die Formeln $\text{tang}\,\varphi = \frac{\cos C \,\text{tang}\, b}{r}$ und $\cos c = \frac{\cos b \cos (a - \varphi)}{\cos \varphi}$. Die Berechnung ist folgende:

$$\log \cos C = 9{,}6114352$$
$$\log \text{tang}\, b = 10{,}0776707$$
$$\log \text{tang}\, \varphi = 9{,}6891059$$

Der Winkel φ, welchen die Tafeln für diesen Tangenten Logarithmen geben, ist 28° 94′ 23″. Allein cos C ist negativ, folglich mufs, weil auch tang φ negativ ist,

$\varphi = -28^\circ\, 94'\, 23''$ genommen werden, welches $a - \varphi = 74^\circ\, 67'\, 87''$ giebt. Nun ist $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$, also ist die übrige Rechnung folgende:

$$
\begin{aligned}
\log\cos(a-\varphi) &= 9{,}5880938 \\
\log\cos b &= 9{,}8071953 \\
& \quad 19{,}3952891 \\
\log\cos\varphi - &= 9{,}9554823 \\
\log\cos c &= 9{,}4418068
\end{aligned}
$$

Folglich ist die gesuchte Entfernung $c = 82^\circ\, 16'\, 05''$. Diese Entfernung beträgt 821,605 Myriameter, denn ein Myriameter ist die Länge eines Bogens von 10 Minuten, ein Meter ist die Länge eines Bogens von einem Zehntheil einer Secunde.

95. *Drittes Beyspiel.* Zum Beyspiel für den fünften Fall diene ein Kugeldreyeck, in welchem die beiden gegebenen Winkel $A = 78^\circ\, 50'$, $B = 50^\circ\, 0'$ sind, und in welchem die dem Winkel A gegenüberliegende Seite $a = 99^\circ\, 20'\, 17''$ ist. Mit diesen gegebenen Stücken ist nach der Tafel in (91) nur eine Auflösung möglich, weil zugleich $a < \rho$, $B < \rho$ und $A > B$. Folgendes ist die Berechnung.

Erstlich. Die Seite b findet sich aus der Formel $\sin b = \sin a \frac{\sin B}{\sin A}$.

$$
\begin{aligned}
\log\sin a &= 9{,}9999659 \\
\log\sin B &= 9{,}8751256 \\
10 - \log\sin A &= 0{,}0252525 \\
\log\sin b &= 9{,}9003440
\end{aligned}
$$

welches $b = 58^\circ\, 50'\, 14''$ und sein Supplement $= 141^\circ\, 49'\, 86''$ giebt. Weil aber der Winkel $B < A$ ist, so ist die Seite $b < a$, also ist der erste Werth der einzige welcher Statt findet.

Zweytens. Um die Seite c zu finden, muſs man $\operatorname{tang}\varphi = \frac{\cos B \operatorname{tang} a}{r}$ und $\sin(c = \varphi) = \frac{\operatorname{tang} B \sin\varphi}{\operatorname{tang} A} = \frac{\operatorname{tang} B \cot A \sin\varphi}{r^2}$ setzen.

		$\log \sin \varphi =$	9,9999220
$\log \cos B =$	9,8204063	$\log \operatorname{tang} B - \log r =$	0,0547193
$\log \operatorname{tang} a - \log r =$	1,9016731	$\log \cot A =$	9,5455236
$\log \operatorname{tang} \varphi =$	11,7220794	$\log \sin (c - \varphi) =$	9,6001649
$\varphi =$	98° 79′ 28,8″	$c - \varphi =$	26° 7′ 70,5″

Hier hat man die Wahl, entweder $c - \varphi = 26° \; 7' \; 70{,}5''$, oder gleich dem Supplement von 26° 7′ 70,5″ nämlich = 173° 92′ 29,5″ zu setzen. Nimmt man den zweyten Werth an, so würde $c < 2\varrho$ seyn, welches unmöglich ist, also muſs man den ersten Werth nehmen, welcher $c = 124° \; 81' \; 99{,}3''$ giebt.

Drittens. Um den Winkel C unmittelbar zu berechnen, wollen wir uns der Formeln $\cot \psi = \frac{\cos a \operatorname{tang} B}{r}$ und $\sin (c - \psi) = \frac{\cos A \sin \psi}{\cos B}$ bedienen.

		$\log \sin \psi =$	9,9999563
$\log \cos a =$	8,0982928	$\log \cos A =$	9,5202711
$\log \operatorname{tang} B - \log r =$	0,0547193	$\log r - \log \cos B =$	0,1795937
$\log \cot \psi =$	8,1530121	$\log \sin (C - \psi) =$	9,6998211
$\psi =$	99° 9′ 45,5″	$C - \psi =$	33° 40′ 54,5″
		$\psi =$	99° 9′ 45,5″
		$C =$	132° 50′ 0,0″

Man kann für $C - \psi$ nicht das Supplement von 33° 40′ 54,5″ Secunden annehmen, weil sonst C gröſser als 2ϱ seyn würde. Also hat diese Aufgabe nur eine Auflösung.

Anmerkung. Wer die vorzüglichsten Anwendungen der sphärischen Trigonometrie kennen lernen will, kann nicht besser thun, als die Anweisung zur Topographie, Feldmeſskunst und zum Nivelliren von Puissant, Paris 1807, nachlesen.

A n h a n g.

Enthaltend die Auflösung verschiedener besonderen Fälle der Trigonometrie.

96. Die obige Auflösung der Dreyecke läſst in Absicht der Allgemeinheit nichts zu wünschen übrig. Unter gewissen Umständen sind indessen besondere Auflösungen besser als die allgemeinen, entweder weil sie die Rechnung abkürzen, oder schärfere und von der Ungenauigkeit der Tafeln unabhängigere, Resultate geben. Wir wollen einige dieser besondern Fälle abhandeln, und zwar die gewöhnlichsten und merkwürdigsten.

Durch A, B, C sollen, wie immer, die Winkel des gegebenen gradlinigen oder Kugeldreyecks, und durch a, b, c die ihnen gegenüberliegenden Seiten bezeichnet werden. Den Halbmesser der Tafeln wollen wir $= 1$ setzen, welches die Allgemeinheit der Resultate nicht vermindert. Die Winkel A, B, C werden in der Rechnung entweder in Graden oder in absoluten Längen der zugehörigen Bogen für den Halbmesser 1 ausgedrückt. Ist ein Winkel oder Bogen x sehr klein, so kann man statt sin x und cos x ihre Werthe in Reihen, nämlich $\sin x = x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} \ldots$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} \ldots$ setzen; aber alsdann muſs x in Theilen des Halbmessers ausgedrückt werden. Ist ein Bogen in Theilen des Halbmessers gegeben, so muſs man ihn um seinen Werth in Minuten zu haben, mit der Zahl von Minuten desjenigen Bogens multipliciren, dessen Länge der Länge des

Halbmessers gleich ist. Diese Zahl ist $\frac{20000}{\pi} = 6366,1977237$; ihr Logarithme ist 3,80388012297.

I. Von den gradlinigen Dreyecken, in welchen zwey Winkel sehr klein sind.

97. Man setze, die Winkel A und B wären sehr klein, und C wäre folglich sehr stumpf, so kann man $\sin A = A - \frac{1}{6} A^3$, $\sin B = B - \frac{1}{6} B^3$ und $\sin (A+B) = A + B - \frac{1}{6} (A+B)^3$ setzen. Kennt man also die Seite c, mit den anliegenden Winkeln A und B, so findet man die beiden andern aus den Formeln $a = \frac{c \sin A}{\sin (A+B)}$ $b = \frac{c \sin B}{\sin (A+B)}$, welche sich, wenn man die obigen Werthe substituirt, und wegläſst was sich aufhebt, auf

$$a = \frac{c\,A}{A+B} [1 + \tfrac{1}{6} (2\,a\,B + B^2)]$$

$$b = \frac{c\,B}{A+B} [1 + \tfrac{1}{6} (2\,a\,A + B^2)]$$

reducirt, woraus $a + b - c = \frac{1}{4} c \,.\, AB$ folgt. Diese Ausdrücke sind bis auf die Glieder mit vier Abmessungen von A und B genau.

98. Man setze zweytens, daſs zwey Seiten a und b gegeben sind, die einen Winkel $C = \pi - \tau$ einschliessen, von welchem der Theil τ sehr klein ist. Zunächst ist $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \tau = a^2 + b^2 + 2ab (1 - \frac{1}{2} \tau^2) = (a+b)^2 - ab\tau^2$, also ist

$$c = a + b - \tfrac{1}{2} \frac{a\,b\,\tau^2}{a+b}.$$

Sodann findet man den Winkel A aus der Gleichung $\sin A = \frac{a}{c} \sin C = \frac{a}{c} \sin \tau$, also ist, wenn man die Werthe von c und von $\sin \tau$ substituirt, $\sin A = \frac{a}{a+b} \left(\tau + \frac{1}{2} \frac{ab}{(a+b)^2} \tau^3 - \frac{1}{6} \tau^3 \right) = \frac{a\,\tau}{a+b} \left(1 + \frac{ab - a^2 - b^2}{(a+b)^2} \frac{\tau^3}{6} \right)$,

folglich ist $A = \sin A + \frac{1}{6} \sin A^3 = \frac{a\,\tau}{a+b} = \frac{ab\,(a-b)}{(a+b)^2}\,\frac{\tau}{6}$. Den Werth von B findet man durch Verwechslung der Buchstaben a und b. Da aber A bekannt ist, so ist es auch unmittelbar $B = \tau - A$. Ist τ in Minuten gegeben, so muſs man in die obigen Formeln, um auch A in Minuten zu finden, statt A und τ die Quotienten $\frac{A}{r}$, $\frac{\tau}{r}$ substituiren, wo r die Zahl von Minuten bedeutet, deren Länge dem Halbmesser gleich ist. Also ist

$$c = a + b - \frac{\frac{1}{2}ab}{a+b} \cdot \left(\frac{\tau}{r}\right)^2$$

$$A = \frac{a\tau}{a+b}\left(1 + \frac{\frac{1}{6}\,b\,(a-b)}{(a+b)} \cdot \left(\frac{\tau}{r}\right)^2\right).$$

99. Um ein Beyspiel von der Anwendung dieser Formeln zu geben, sey $a = 1000$ M. $b = 2400$ Meter, $C = 199° 32'$ oder $\tau = 68'$, so ist $a + b - c = \frac{1200000}{3400}\left(\frac{68}{r}\right)^2 = 0{,}037806$, woraus folgt $c = 3399{,}962194$ Meter. Daraus folgt dann durch die erste Näherung $A = \frac{a\tau}{a+b} = 20'$ und $B = \tau - A = 48'$. Die ganze Formel giebt

$A = 20'\left(1 - \frac{2400 \cdot 1400}{6\,(3400)^2}\left(\frac{68}{r}\right)^2\right) = 1999988946$, folglich $B = 48{,}00011054'$, welche Werthe bis in die letzte Decimalstelle genau sind.

II. Auflösung des dritten Falles gradliniger Dreyecke durch Reihen.

100. Aus den beiden Seiten a und b und dem eingeschlossenen Winkel C findet man den Winkel B durch die Proportion $b : a = \sin B : \sin (B + C)$, welche $a \sin B = b (\sin B \cos C + \cos B \sin C)$ und folglich $\frac{\sin B}{\cos B} = \frac{b \sin C}{a - b \cos C}$ giebt. Setzt man in diese Gleichung statt des Sinus und Co-

sinus ihre Werthe in unmöglichen Exponentialgröſsen (35) so erhält man

$$\frac{e^{B\sqrt{-1}} - e^{-B\sqrt{-1}}}{e^{B\sqrt{-1}} + e^{-B\sqrt{-1}}} = \frac{b\,(e^{C\sqrt{-1}} - e^{-C\sqrt{-1}})}{2a - b\,(e^{C\sqrt{-1}} + e^{-C\sqrt{-1}})},$$

woraus folgt

$$e^{2B\sqrt{-1}} = \frac{a - b\,e^{-C\sqrt{-1}}}{a - b\,e^{C\sqrt{-1}}}$$

Nimmt man auf beiden Seiten die Logarithmen und entwickelt das zweyte Glied nach der bekannten Formel $\log(a - x) = \log a - \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^3}{3a^3} \ldots$, so erhält man

$$2B\sqrt{-1} = \frac{b}{a}\,e^{C\sqrt{-1}} + \frac{b^2}{2a^2}\,e^{2C\sqrt{-1}} + \frac{b^3}{3a^3}\,e^{3C\sqrt{-1}} \ldots$$
$$- \frac{b}{a}\,e^{-C\sqrt{-1}} - \frac{b^2}{2a^2}\,e^{-2C\sqrt{-1}} - \frac{b^3}{2a^3}\,e^{-3C\sqrt{-1}} \ldots$$

Dividirt man dieses durch $2\sqrt{-1}$, und erinnert sich, daſs $e^{mC\sqrt{-1}} - e^{-mC\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\sin mC$ ist, so erhält man

$$B = \frac{b}{a}\sin C + \frac{b^2}{2a^2}\sin 2C + \frac{b^3}{3a^3}\sin 3C + \frac{b^5}{4a^4}\sin 4C \ldots$$

Diese Reihe, deren Gesetz sehr einfach ist, und die sich um so schneller nähert, je kleiner b im Verhältniſs zu a ist, giebt den Winkel B in Theilen des Halbmessers.

Der hier gefundene Werth muſs auch der Gleichung $\tang(B + \frac{1}{2}C) = \frac{a + b}{a - b}\tang\frac{1}{2}C$ entsprechen, welche mit $\tang\frac{1}{2}(A - B) = \frac{a - b}{a + b}\cot\frac{1}{2}C$ einerley ist, und von der Gleichung $\frac{\sin B}{\cos B} = \frac{b \sin C}{a - b \cos C}$ nur in der Gestalt abweicht.

101. Hat man den Winkel B gefunden, so erhält man den dritten Winkel $A = 2\varrho - B - C$. Die dritte Seite c hängt von der Gleichung $c^2 = a^2 - 2ab\cos C + b^2$ ab, welche, wenn man die Wurzel auszieht,

$$c = a - b\cos C + \frac{b^2}{2a}\sin C^2 + \frac{b^3}{2a^2}\sin C^2\cos C \ldots$$

giebt. Diese Reihe schreitet aber nicht regelmäſsig fort, und kann also nicht nach Belieben fortgesetzt werden.

Es läſst sich aber statt ihrer für den natürlichen Logarithmen von c eine sehr einfache Reihe finden. Die Gröſse $a^2 - 2ab \cos C + b^2$ ist nämlich, wie leicht zu sehen, gleich $\left(a - b e^{C\sqrt{-1}}\right) \left(a - b e^{-C\sqrt{-1}}\right)$, denn das Product der beiden Factoren giebt $a^2 - ab\left(e^{C\sqrt{-1}} + e^{-C\sqrt{-1}}\right) + b^2$, oder $a^2 - 2ab \cos C + b^2$. Also ist $c^2 = \left(a - b e^{C\sqrt{-1}}\right)$ $\left(a - b e^{-C\sqrt{-1}}\right)$. Nimmt man auf beiden Seiten die Logarithmen, so erhält man

$$2 \log c = \log a - \frac{b}{a} e^{C\sqrt{-1}} - \frac{b^2}{2a^2} e^{2C\sqrt{-1}} - \frac{b^3}{2a^3} e^{3C\sqrt{-1}} \ldots.$$
$$+ \log a - \frac{b}{a} e^{-C\sqrt{-1}} - \frac{b2}{2a^2} e^{-2C\sqrt{-1}} - \frac{b^3}{3a^3} e^{-3C\sqrt{-1}} \ldots$$

Reducirt man dieses durch die Formel $e^{mC\sqrt{-1}} + e^{-m\sqrt{-1}} = 2 \cos mC$, so erhält man

$$\log c = \log a - \frac{b}{a} \cos C - \frac{b^4}{2a^2} \cos 2C - \frac{b^3}{3a^3} \cos 3C \ldots.$$

welche Reihe nicht weniger elegant ist, als die obige für den Werth von B. Ihre Glieder müssen, wenn man die Tafellogarithmen anwenden will, mit dem Modul 0,43429448 multiplicirt werden.

III. Auflösung des dritten Falles bey Kugeldreyecken mittelst Reihen.

102. In dem vorigen Paragraph ist gezeigt worden, daſs der aus der Gleichung $\tan x = \frac{m+n}{m-n} \tan \frac{1}{2} C$ genommene Werth von x durch die Reihe

$$x = \tfrac{1}{2} C + \frac{n}{m} \sin C + \frac{n^2}{2m^2} \sin 2C + \frac{n^3}{3m^3} \sin 3C \ldots.$$

ausgedrückt werden kann. Nun ist in dem Kugeldreyecke, von welchem zwey Seiten a und b nebst dem eingeschlos-

senen Winkel C gegeben sind, vermöge der Neperschen Gleichungen (86),

$$\cot \frac{A-B}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b)}{\sin \frac{1}{2}(a-b)} \tang \tfrac{1}{2} C$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b + \cos \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b}{\sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b - \cos \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b} \tang \tfrac{1}{2} C$$

$$\cot \frac{A+B}{2} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}(a-b)} \tang \tfrac{1}{2} C$$

$$= \frac{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b - \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b}{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b + \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b} \tang \tfrac{1}{2} C$$

also erhält man vermöge der vorigen Formel, wenn man $b > a$ setzt,

$$\frac{A-B}{2} = \rho - \tfrac{1}{2}C - \frac{\tang \frac{1}{2} b}{\tang \frac{1}{2} a} \sin C - \frac{\tang \frac{1}{2} b^2}{2 \tang \frac{1}{2} a^2} \sin 2C - \frac{\tang \frac{1}{2} b^3}{3 \tang \frac{1}{2} a^3} \sin 3C \ldots$$

$$\frac{A+B}{2} = \rho - \tfrac{1}{2}C + \frac{\tang \frac{1}{2} b}{\cos \frac{1}{2} a} \sin C - \frac{\tang \frac{1}{2} b^2}{2 \cot \frac{1}{2} a^2} \sin 2C - \frac{\tang \frac{1}{2} b^3}{3 \cot \frac{1}{2} a^3} \sin 3C \ldots$$

Das Gesetz dieser Reihen ist sehr einfach, und sie nähern sich um so schneller, je kleiner b ist. Die erste nähert sich immer, wenn man $b < a$ setzt, die zweyte auch, wenn $\tang \frac{1}{2} b < \cot \frac{1}{2} a$, oder $a + b < 2\rho$. Sie würde divergiren und unrichtig *) seyn, wenn $a + b > 2\rho$ wäre. Dieser Fall läſst sich aber immer vermeiden. Denn die Auflösung (Fig. 11.) des Dreyecks BCA, in welchem $CA + CB > 2\rho$ ist, reducirt sich immer auf die Auflösung des Dreyecks A′CB′, in welchem $CA' + CB' < 2\rho$. Uebrigens nähert sich die zweyte Reihe grade am schnellsten, wenn a und b beide sehr klein sind; dann ist die dritte Seite c auch sehr klein, weil immer $c < a + b$, und das Kugeldreyeck ist nur wenig von einem gradlinigen verschieden. In diesem Falle ist der Ausdruck des Ueberschuſses der drey Winkel über zwey rechte folgender:

$$A + B + C - 2\rho = \tfrac{1}{2} \tang \tfrac{1}{2} a \tang \tfrac{1}{2} b \sin C - \tfrac{2}{2} \tang \tfrac{1}{2} a^2 \tang \tfrac{1}{2} b^2 \sin 2C$$
$$+ \tfrac{2}{3} \tang \tfrac{1}{2} a^3 \tang \tfrac{1}{2} b^3 \sin 3C \ldots$$

*) Genauer wohl: *unmittelbar nicht brauchbar*; denn Unrichtiges kann nie aus richtigen Rechnungen folgen.

A. d. Uebers.

103. Um die dritte Seite des Dreyecks zu finden, dient die Gleichung $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$. Aus derselben lassen sich leicht die beiden folgenden finden

$$\sin\tfrac{1}{2}c^2 = \sin\tfrac{1}{2}a^2 \cos\tfrac{1}{2}b^2 - 2\sin\tfrac{1}{2}a \cos\tfrac{1}{2}b \cos\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}b \cos C + \cos\tfrac{1}{2}a^2 \sin\tfrac{1}{2}b^2$$

$$\cos\tfrac{1}{2}c^2 = \cos\tfrac{1}{2}a^2 \cos\tfrac{1}{2}b^2 + 2\cos\tfrac{1}{2}a \cos\tfrac{1}{2}b \sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}b \cos C + \sin\tfrac{1}{2}a^2 \sin\tfrac{1}{2}b^2.$$

Aus der Gestalt dieser Ausdrücke ist leicht zu sehen, daſs $\sin\frac{1}{2}c$ als die dritte Seite eines gradlinigen Dreyecks angesehen werden kann, in welchem die andern beiden bekannten Seiten $\sin\frac{1}{2}a \cos\frac{1}{2}b$ und $\cos\frac{1}{2}a \sin b$ den Winkel C einschlieſsen, und eben so $\cos\frac{1}{2}c$ als die dritte Seite eines gradlinigen Dreyecks, dessen beiden andern Seiten $\cos\frac{1}{2}a \cos\frac{1}{2}b$ und $\sin\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}b$ den Winkel $2\rho - C$ einschlieſsen. Also ist zufolge der für gradlinige Dreyecke gefundenen Formeln (101).

$$\log\sin\tfrac{1}{2}c = \log(\sin\tfrac{1}{2}a \cos\tfrac{1}{2}b) - \frac{\tan\frac{1}{2}b}{\tan\frac{1}{2}a}\cos C - \frac{\tan\frac{1}{2}b^2}{2\tan\frac{1}{2}a^2}\cos 2C \ldots$$

$$\log\cos c = \log(\cos\tfrac{1}{2}a \cos\tfrac{1}{2}b) + \frac{\tan\frac{1}{2}b}{\cot\frac{1}{2}a}\cos C - \frac{\tan\frac{1}{2}b^2}{2\tan\frac{1}{2}a^2}\cos 2C \ldots$$

Auf diese Weise läſst sich die Auflösung des gegebenen Kugeldreyecks auf die Auflösung eines gradlinigen rechtwinkligen Dreyecks bringen; denn jedes gradlinige Dreyeck kann wiederum mittelst gradliniger rechtwinkliger Dreyecke aufgelöset werden.

Man findet also daſs $\sin\frac{1}{2}c$ die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreyecks ist, dessen Seiten $\sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C$ und $\sin\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C$ sind. Eben so ist $\cos\frac{1}{2}c$ die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreyecks, dessen Seiten $\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C$ und $\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C$ sind.

Nennt man ferner den in dem ersten Dreyecke der Seite $\sin\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C$ gegenüberliegenden Winkel, M, den in dem zweyten Dreyecke, der Seite $\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C$ gegenüberliegenden Winkel, N; so ist zufolge der Neperschen Gleichungen, $\frac{1}{2}(A-B) = M$ und $\frac{1}{2}(A+B) = N$, oder $= 2\rho - N$: nämlich $\frac{1}{2}(A+B) = N$, wenn $a+b < 2\rho$ und $\frac{1}{2}(A+B) = 2\rho - N$, wenn $a+b > 2\rho$ ist. Also lassen sich in jedem Kugeldreyecke, von welchem zwey Sei-

ten a und b nebst dem eingeschlossenen Winkel C gegeben sind, die Gröſsen $\frac{1}{2}$ c, $\frac{1}{2}$ (A + B), $\frac{1}{2}$ (A — B) unmittelbar durch die Auflösung eines gradlinigen rechtwinkligen Dreyecks finden, von welchem die beiden Seiten um den rechten Winkel gegeben sind.

Daraus folgt auch, daſs sich, nachdem der Winkel M, oder $\frac{1}{2}$ (A — B) mittelst der Formel $\tan M = \frac{\sin \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2}(a + b)} \cot \frac{1}{2} C$ berechnet worden, die dritte Seite mittelst der Formel

$$\sin \tfrac{1}{2} c = \frac{\sin \frac{1}{2}(a - b) \cos \frac{1}{2} C}{\sin M} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a + b) \sin \frac{1}{2} C}{\cos M}$$

finden läſst.

Anmerkung. Die Formeln dieses Paragraphs lassen sich auf die Auflösung des fünften Falles von Kugeldreyecken anwenden, weil dieser Fall mittelst des Polardreyecks, auf den dritten Fall gebracht werden kann.

IV. Auflösung eines Kugeldreyecks, in welchem zwey Seiten wenig von rechten Winkeln abweichen.

104. Die beiden, wenig von rechten Winkeln verschiedenen Seiten, sollen a und b heiſsen; der Winkel C soll aus den drey Seiten a, b und c gefunden werden.

Wären die beiden Seiten a und b genau $= \rho$, so wäre $C = c$; also weicht C wenig von c ab, wenn a und b rechten Winkeln nahe kommen. Es sey $a = \rho + \alpha$, $b = \rho + \beta$, $C = c + x$. Setzt man diese Werthe in die Gleichung $\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}$, so findet man $\cos(c + x) = \frac{\cos c + \sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta}$. Weil aber α und β sehr klein sind, so kann man, wenn man blos die Glieder wegläſst, welche α und β in der vierten Potenz enthalten,

$\sin\alpha \sin\beta = \alpha\beta$, $\cos\alpha \cos\beta = 1 - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\beta^2}{2}$ setzen, welches

$$\cos(c + x) = \frac{\cos c - \alpha\beta}{1 - \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\beta^2} = (1 + \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \tfrac{1}{2}\beta^2)\cos c - \alpha\beta \text{ giebt.}$$

Läſst man das Quadrat von x weg, so ist cos $(c+x) = \cos c - x \sin c$, also

$$x = \frac{\alpha\beta - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\cos c}{\sin c},$$

und weil x in Rücksicht auf α und β vom zweyten Grade ist, so sind in diesen Ausdrücken nur die Glieder vom vierten Grade weggelassen worden. Es sey $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = p$, $\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = q$ oder $\alpha = p+q$, $\beta = p-q$, so ist noch kürzer:

$$x = p^2 \cdot \frac{1-\cos c}{\sin c} - q^2 \cdot \frac{1-\cos c}{\sin c} = p^2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c - q^2 \cot \tfrac{1}{2} c.$$

Dieser Ausdruck bezieht sich auf Theile des Halbmessers. Sind in der Ausübung p und q in Secunden gegeben, und es soll x in Secunden ausgedrückt werden, so muſs man

$$x = \frac{p^2}{r} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c - \frac{q^2}{r} \cot \tfrac{1}{2} c$$

setzen, wo r die Zahl der Secunden eines Bogens ist, dessen Länge der Länge des Halbmessers gleich, und von welcher Zahl der Logarithme = 5,8038801 ist. Ist x gefunden, so hat man auch den gesuchten Winkel $C = c + x$.

Die so eben gefundene Formel kommt bey geodätischen Operationen, und zwar bey der Reduction der Winkel auf den Horizont vor. Sie ist kürzer, und erfordert weniger ausgedehnte Tafeln, als die Formel für den ersten Fall von Kugeldreyecken, von welchem wir in No. 93 ein Beyspiel gegeben haben. Wären indessen die Elevations- und Depressionswinkel gröſser als 2 bis 3 Grade, so würde es besser seyn, sich der allgemeinen Methode zu bedienen.

V. Auflösung von Kugeldreyecken, deren Seiten im Verhältniſs zum Kugelhalbmesser sehr klein sind.

105. Wenn die Seiten a, b, c gegen den Kugelhalbmesser sehr klein sind, so ist das gegebene Dreyeck von einem gradlinigen wenig verschieden. Betrachtet man es wirklich als ein solches, so erhält man eine erste Annäherung. Man

läſst aber dann den Ueberschuſs der Summe der Winkel über zwey Rechte weg. Um sich der Wahrheit mehr zu nähern, muſs man noch diesen Ueberschuſs, wie folgt, in Rechnung bringen.

Der Halbmesser der Kugel in welcher das Dreyeck liegt, sey r. Stellt man sich ein ähnliches Dreyeck auf einer andern Kugel beschrieben vor, deren Halbmesser $= 1$ ist, so sind die Seiten dieses Dreyecks $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$ und es ist $\cos A =$

$$\frac{\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}}.$$

Da nun a, b, c gegen r sehr klein sind, so ist, sehr nahe, $\cos\frac{a}{r} = 1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{a^4}{2.3.4\,r^4}$, $\cos\frac{b}{r} = 1 - \frac{b^2}{2r^2} + \frac{b^4}{2.3.4\,r^4}$, $\cos\frac{c}{r} = 1 - \frac{c^2}{2r^2} + \frac{c^4}{2.3.4.r^4}$, $\sin\frac{b}{r} = \frac{b}{r} - \frac{b^3}{2.3.r^3}$, $\sin\frac{c}{r} = \frac{c}{r} - \frac{c^3}{2.3.r^3}$.

Substituirt man diese Werthe in obige Gleichung und läſst die Glieder mit mehr als vier Abmessungen weg, so erhält man

$$\cos A = \frac{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{r^2} + \frac{a^4 - b^4 + c^4}{24r^4} - \frac{b^2 c^2}{4r^4}}{\frac{bc}{r^2}\left(1 - \frac{b^2}{6r^2} - \frac{c^2}{6r^2}\right)}.$$

Multiplicirt man diesen Bruch oben und unten mit $1 + \frac{b^2 + c^2}{6r^2}$ und reducirt, so erhält man

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2 b^2 - 2a^2 c^2 - 2b^2 c^2}{24\,b\,c\,r^2}.$$

Nun sey in dem gradlinigen Dreyecke, dessen Seiten an Länge den Bogen a, b, c gleich sind, A′ der Winkel, welcher der Seite a gegenüber liegt, so ist $\cos A' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ und $4b^2 c^2 \sin A'^2 = 2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - a^4 - b^4 - c^4$, also ist

$$\cos A = \cos A' - \frac{bc}{6r^2}\sin A'^2.$$

Es sey $A = A' + x$, so ist, wenn man das Quadrat von x

wegläſst, cos A = cos A′ — x sin A′, woraus folgt, daſs $x = \frac{bc}{6r^2}$ sin A′. Weil x gegen $\frac{a}{r}$ und $\frac{c}{r}$ von der zweyten Ordnung ist, so ist dieses Resultat bis in die vierte Ordnung genau. Also ist

$$A = A' + \frac{bc}{6r^2} \sin A'.$$

Aber $\frac{1}{2}$ bc sin A′ ist der Inhalt eines gradlinigen Dreyecks, dessen Seiten a, b, c sind, welches Dreyeck sehr wenig von dem gegebenen Kugeldreyeck abweicht. Heiſst also dieser Inhalt α, so ist $A = A' + \frac{\alpha}{3r^2}$ oder $A' = A - \frac{\alpha}{3r^2}$. Eben so würde $B' = B - \frac{\alpha}{3r^2}$, $C' = C - \frac{\alpha}{3r^2}$ seyn. Also ist $A' + B' + C'$ oder $2\rho = A + B + C - \frac{\alpha}{r^2}$ folglich kann $\frac{\alpha}{r^2}$, als der Ueberschuſs der Summe der drey Winkel des gegebenen Kugeldreyecks über zwey Rechte angesehen werden. Daraus folgt nachstehender merkwürdige Lehrsatz, durch welchen sich die Auflösung sehr kleiner Kugeldreyecke auf die Auflösung gradliniger Dreyecke bringen läſst.

Wenn ein Kugeldreyeck gegeben ist dessen Seiten gegen den Halbmesser sehr klein sind, und man zieht von seinen Winkeln ein Drittheil des Ueberschuſses der Summe der drey Winkel über zwey Rechte ab, so können die auf diese Weise verkleinerten Winkel für die Winkel eines gradlinigen Dreyecks genommen werden, dessen Seiten so lang sind als die Seiten des gegebenen Kugeldreyecks. Oder anders

Ein wenig gekrümmtes Kugeldreyeck, dessen Winkel A, B, C und dessen, diesen Winkeln gegenüberliegende Seiten a, b, c sind, ist einem gradlinigen Dreyeck gleich zu setzen,, dessen Seiten die nämliche Länge a, b, c haben, dessen diesen Seiten gegenüberliegende Winkel aber $A - \frac{1}{3}\varepsilon$, $B - \frac{1}{3}\varepsilon$, $C - \frac{1}{3}\varepsilon$ *sind, wo* ε *den Ueberschuſs der Summe*

der Winkel des Kugeldreyecks über zwey Rechte bezeichnet *).

106. Der Ueberschuſs $\frac{\alpha}{r^2} = \varepsilon$, welcher der Fläche des Dreyecks proportional ist, läſst sich immer unmittelbar aus den gegebenen Stücken des als gradlinig angenommenen Kugeldreyecks berechnen. Sind nämlich die Seiten b und c nebst dem eingeschlossenen Winkel A gegeben, so ist $\alpha = \frac{1}{2}$ b c sin A. Sind eine Seite a mit den beiden anlie-

*) Dieser Satz kann auch ohne Rechnung unmittelbar aus dem 23sten Satze im 7ten Buche, welcher den Inhalt eines Kugeldreyecks aus dessen Winkeln giebt, gefunden werden. Denn zufolge jenes Satzes verhält sich die Fläche des Kugeldreyecks α zur halben Kugelfläche $2r^2\pi$, wie der Ueberschuſs der Summe der Länge der Seiten des Dreyecks $r(A + B + C)$, über den halben Umfang πr, zum ganzen Umfang $2\pi r$. Also ist $\frac{\alpha}{2r^2\pi} = \frac{r(A + B + C - \pi)}{2\pi r}$ und folglich $A+B+C - \pi = \frac{\alpha}{r^2}$, oder weil $\pi = 2\varrho$ ist, $2\varrho = A + B + C - \frac{\alpha}{r^2}$, welches der obige Satz ist. Bis hieher ist der Satz nicht blos annäherungsweise, sondern genau richtig. Die Annäherung erfolgt nun erstlich dadurch, daſs man den Inhalt des Kugeldreyecks dem Inhalte eines gradlinigen Dreyecks gleich setzt, dessen Seiten so lang sind wie die Bogenseiten des Kugeldreyecks, zweytens dadurch, daſs man willkürlich den Ueberschuſs der Summe der Winkel des Kugeldreyecks über zwey rechte, auf die 3 Winkel des Dreyecks *gleich* vertheilt; denn daſs man eben $A' = A - \frac{1}{3}\varepsilon$, $B' = B - \frac{1}{3}\varepsilon$, $C' = C - \frac{1}{3}\varepsilon$ findet, erfolgt auch nur durch willkürliche Weglassungen, weil man sonst für Winkel, die ungleichen Seiten gegenüberliegen, nicht das Nämliche finden könnte. Es scheint auch in der That genauer zu seyn, wenn man den Ueberschuſs ε nicht auf die Winkel *gleich* vertheilt, sondern im Verhältniſs der gegenüberliegenden Seiten.

A. d. Uebers.

genden Winkeln B und C gegeben, so ist der Inhalt $\alpha = \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\sin B \sin C}{\sin (B + C)}$. Hierauf ist $\varepsilon = \frac{\alpha}{r^2} \cdot R$, wenn R die Zahl der Secunden eines Bogens bedeutet, dessen Länge der Länge des Halbmessers gleich ist. Auf diese Weise findet man ε in Secunden.

Um diese Formeln auf ein in der Oberfläche der Erde liegendes, als sphärisch angenommenes Dreyeck anzuwenden, muſs man setzen, daſs die Seiten a, b, c sowohl, als der Halbmesser der Erde r, in Meter ausgedrückt sind *). Weil nun der vierte Theil des Meridians $\frac{1}{2} \pi r = 10000000$ Meter ist, so ist log r = 6,8038801. Der Halbmesser R, in Secunden ausgedrückt, hat zum Logarithmen 5,8038801. Rechnet man also zum Logarithmus der in Quadratmeter ausgedrückten Fläche α, den constanten Logarithmus 2,196119, und zieht von der Summe die Zahl 10 ab, so hat man den Logarithmen des in Secunden ausgedrückten Ueberschuſses ε.

Kennt man auf diese Weise ε, so zieht man $\frac{1}{3} \varepsilon$ von jedem Winkel des gegebenen Kugeldreyecks ab. Alsdann hat man, in dem von den Seiten a, b, c eingeschlossenen gradlinigen Dreyecke, die Winkel $A' = A' - \frac{1}{3} \varepsilon$, $B' = B - \frac{1}{3} \varepsilon$, $C' = C - \frac{1}{3} \varepsilon$, und folglich Alles was zur Bestimmung seiner Theile, mithin auch zur Bestimmung des Kugeldreyecks nöthig ist.

*) Bey geodätischen Operationen sind gewöhnlich die Scheitelpuncte der Dreyecke vom Mittelpuncte der Erde ungleich weit entfernt. Durch gehörige Reduction lassen sich statt der beobachteten Dreyecke diejenigen finden, welche zwischen den Projectionen der Stationen auf eine und dieselbe, gegen die Richtung der Sehnen senkrechte Kugelfläche, liegen. A. d. Verf.

107. *Beyspiel.* Es sey der Winkel C nebst den beiden Seiten a und b gegeben, nämlich:

$$C = 123^\circ\ 19'\ 99{,}23''$$
$$\log a = 4{,}589150^\circ$$
$$\log b = 4{,}5219271,$$

so hat die Gröſse $\frac{1}{2}$ ab sin C, welche den Inhalt des Dreyecks ausdrückt, 8,78055 zum Logarithmen: dazu 2,19612, giebt $\log \varepsilon = 0{,}97667$, folglich $\varepsilon = 9{,}48''$ und $\frac{1}{3}\varepsilon = 3{,}16''$. Man hat also nunmehr ein gradliniges Dreyeck aufzulösen, in welchem die Seiten a und b den Winkel $C = 123^\circ\ 19'\ 96{,}07''$ einschlieſsen. Zu dieser Auflösung wollen wir uns der Methode des 56sten Art. bedienen:

$a =$	$4{,}5891503$	$\text{tang}\,(\varphi - \frac{1}{2}\rho) =$	$8{,}8878392$
$b =$	$4{,}5219271$	$\cot \frac{1}{2} C' =$	$9{,}8381110$
$\text{tang}\,\varphi =$	$0{,}0672232$	$\text{tang}\,\frac{1}{2}(A' - B') =$	$8{,}7259502$
$\varphi =$	$54^\circ\ 90'\ 74{,}72''$	$\frac{1}{2}(A' - B') =$	$3^\circ\ 38'\ 39{,}27''$
		$\frac{1}{2}(A' + B'') =$	$38^\circ\ 40'\ 1{,}97''$
$\frac{1}{2} C' =$	$61^\circ\ 59'\ 98{,}03''$	$A' =$	$41^\circ\ 78'\ 41{,}24''$
$\rho - \frac{1}{2} C' =$	$38^\circ\ 40'\ 1{,}97''$	$B' =$	$35^\circ\ 1'\ 62{,}70''$

Nun ist noch die dritte Seite c zu finden, welches durch die Gleichung $c = a \frac{\sin C'}{\sin A'}$ geschieht:

a —	$4{,}5891503$		
$\sin A'$ —	$9{,}7854893$		
Unterschied	$4{,}8036610$	— — — —	$4{,}8036610$
$\sin C'$ —	$9{,}9705008$	$\sin B'$ —	$9{,}7182661$
$\log c =$	$4{,}7741618$	$\log b =$	$4{,}5219271$

Also sind die gesuchten Elemente des Kugeldreyecks

$$A = 41^\circ\ 78'\ 44{,}40''$$
$$B = 35^\circ\ 1'\ 65{,}86''$$
$$\log c = 4{,}7741618, \text{ oder } c = 59451{,}256 \text{ Meter.}$$

Fig. 16. *Anmerkung.* Durch die Methode dieses Paragraphs lassen sich auch Dreyecke auflösen, in welchen zwey Seiten wenig von 2ρ abweichen, und die dritte Seite

sehr klein ist. Denn verlängert man die gröſsern Seiten A'C, A'B, so entsteht ein Kugeldreyeck BCA, in welchem alle drey Seiten sehr klein sind.

VI. Von Kugeldreyecken, in welchen zwey Winkel sehr spitz sind.

Fig. 17. 108. ABC sey das gegebene Kugeldreyeck, in welchem A und B zwey sehr spitze Winkel sind; LMN sey das zugehörige Polardreyeck, so daſs $MN = 2\rho - A$, und $LN = 2\rho - B$. Verlängert man die Bogen NM und NL, bis sie sich in K schneiden, so ist $KM = A$, $KL = B$; also sind alle Seiten des Dreyecks LKM sehr klein, und das Dreyeck ist in dem Falle des vorigen Paragraphs. A', B', C' sollen die drey Winkel, und a', b', c' die drey Seiten des Dreyecks LKM seyn, so ist

$$A' = MLK = a \qquad a' = KM = A$$
$$B' = LMK = b \qquad b' = LK = B$$
$$C' = LKM = 2\rho - c \qquad c' = LM = 2\rho - C.$$

Sind also drey Stücke des Dreyecks ABC bekannt, so geben sie drey Stücke vom Dreyecke LKM, und folglich auch drey Stücke von dem gradlinigen Dreyecke, auf welches sich das Dreyeck LKM bringen läſst. Ist nun das letztere aufgelöset, so ist es auch das Dreyeck LKM, und durch dieses, das gegebene Dreyeck ABC.

109. Es sey z. B. $A = 3°$, $B = 2°$ und die anliegende Seite $c = 150°$, so sind die gegebenen Stücke des Dreyecks LKM, oder vielmehr des Dreyecks $A'B'C'$, $a' = 3°$, $b' = 2°$, und der eingeschlossene Winkel $C' = 50°$. Aus diesen gegebenen Stücken findet man den sphärischen Ueberschuſs $\varepsilon = \frac{\frac{1}{2} a' \, b' \sin C'}{R} = 333{,}21''$. Ein Drittheil desselben von C' abgezogen giebt $49° \; 98' \; 88{,}93''$. Es muſs also ein rechtwinkliges Dreyeck aufgelöset werden, in welchem die beiden Seiten $a' = 30000''$, $b' = 20000''$ und der

eingeschlossene Winkel $C'' = 49° 98' 88,93''$ sind. Man findet für die beiden andern Winkel $A'' = 103° 64' 86,33''$, $B'' = 46° 36' 24,75''$, und die dritte Seite $c' = 21244,36''$. Rechnet man also $\frac{1}{3}\,\varepsilon$ zu den beiden Winkeln A'' und B'' des rechtwinkligen Dreyecks hinzu, um die Winkel A' und B' des Kugeldreyecks zu haben, so ist die Auflösung folgende:

$$A' = a = 103° 65' 97,40''$$
$$B' = b = 46° 37' 35,82''$$
$$C' = 2\rho - c' = 197° 87' 55,64''$$

VII. Von dem regelmäfsigen Siebenzehnecke.

110. Wir wollen die gegenwärtigen Anwendungen trigonometrischer Rechnungen mit der Aufgabe beschliefsen, ein regelmäfsiges Siebenzehneck durch blofse Auflösung von Gleichungen des zweyten Grades in den Kreis zu beschreiben, und zwar nach Anleitung des beim 6ten Satze des 4ten Buchs erwähnten vortrefflichen Werks von Gaufs.

Es sey der Bogen $\frac{2\rho}{17} = \varphi$, so behaupte ich zuerst, dafs

$$\cos\varphi + \cos 3\varphi + \cos 5\varphi + \cos 7\varphi + \cos 9\varphi + \cos 11\varphi + \cos 13\varphi + \cos 15\varphi = \tfrac{1}{2}$$

ist. Denn das erste Glied heifse P; man multiplicire sämmtliche Glieder mit $2\cos\varphi$, und verwandle jedes Product zweyer Cosinus vermittelst der Formel

$$2\cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$$

in Cosinus einfacher Bogen, so erhält man:

$$2P\cos\varphi = 1 + 2\cos 2\varphi + 2\cos 4\varphi + 2\cos 6\varphi \;....\; + 2\cos 14\varphi + \cos 15\varphi.$$

Weil nun $17\varphi = 2\rho$, so ist $\cos 2\varphi = \cos(2\rho - 15\varphi) = \cos 15\varphi$, $\cos 4\varphi = \cos(2\rho - 13\varphi) = -\cos 13\varphi$, und so weiter, bis zu $\cos 16\varphi = -\cos\varphi$. Also ist

$$2P\cos\varphi = 1 - 2\cos 15\varphi - 2\cos 13\varphi - 2\cos 11\varphi \;....\; - 2\cos 3\varphi - \cos\varphi,$$

oder $2\,P \cos \varphi = 1 + \cos \varphi - 2\,P$, oder $2\,P\,(1 + \cos \varphi) = 1 + \cos \varphi$. Folglich ist $P = \frac{1}{2}$.

Nun theile man die Glieder von P in zwey Theile, nämlich:

$$x = \cos 3\,\varphi + \cos 5\,\varphi + \cos 7\,\varphi + \cos 11\,\varphi$$
$$y = \cos \varphi + \cos 9\,\varphi + \cos 13\,\varphi + \cos 15\,\varphi$$

so ist $x + y = \frac{1}{2}$. Dann multiplicire man die vier Glieder von x mit den vier Gliedern von y, und verwandle die Producte der Cosinus in Cosinus einfacher Rogen, so erhält man, nach gehöriger Reduction,

$$xy = 2\,(\cos 2\,\varphi + \cos 4\,\varphi + \cos 6\,\varphi \ldots + \cos 16\,\varphi),$$

oder $xy = -2\,(\cos 15\,\varphi + \cos 13\,\varphi + \cos 11\,\varphi \ldots + \cos \varphi)$; also $xy = -1$.

Aus diesen beiden Gleichungen findet man

$$x = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\sqrt{17} \text{ und } y = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\sqrt{17}.$$

Theilt man nun die Summe x und y von neuem in zwey Theile, nämlich

$x = s + t$	$y = u + z$
$s = \cos 3\,\varphi + \cos 5\,\varphi$	$u = \cos + \varphi \cos 13\,\varphi$
$t = \cos 7\,\varphi + \cos 11\,\varphi$	$z = \cos 9\,\varphi + \cos 15\,\varphi$,

so findet man auf dieselbe Weise

$$st = -\tfrac{1}{4}, \qquad uz = -\tfrac{1}{4}$$

so daſs sich die vier Gröſsen s, t, u, z mittelst neuer Gleichungen des zweyten Grades finden lassen.

Ist endlich $\cos \varphi + \cos 13\,\varphi = u$ und $\cos \varphi \cos 13\,\varphi = \frac{1}{2}(\cos 12\,\varphi + \cos 14\,\varphi) = -\frac{1}{2}(\cos 3\,\varphi + \cos 5\,\varphi) = -\frac{1}{2}\,s$ gefunden, so erhält man durch eine vierte Gleichung vom zweyten Grade den Werth von $\cos \varphi$, und daraus die Seite des gegebenen Vielecks, welche $2 \sin \varphi$ oder $2\sqrt{(1 - \cos \varphi^2)}$ ist.

Die Zerfällung dieser verschiedenen Gleichungen beruht auf feinen Sätzen der unbestimmten Analysis, deren Entwickelung man in dem Werke von Gauſs selbst, oder in der zweyten Ausgabe meines Versuchs über die Theorie der

Zahlen *) nachlesen muſs. Man findet daselbst den vollständigen Beweis folgendes schönen und allgemeinen Satzes:

«Wenn n eine Primzahl, und n — 1 ein Product aus »den Primzahlen 2, 3, 5 . . . wie $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma \ldots$ ist, so »läſst sich die Theilung des Kreisumfanges in n gleiche »Theile immer auf die Auflösung von α Gleichungen des »zweiten, β Gleichungen des dritten, γ Gleichungen des »fünften Grades u. s. w. reduciren.«

*) Essai sur la theorie des nombres par Legendre. Paris 1808.
A. d. Uebers.

Ende.

Staatl. Bibliothek Passau

Legendre, Adrien Marie,

Die Elemente der Geometrie und der ebenen und sphärischen Trigonometrie

Berlin 1822

Passau, Staatliche Bibliothek -- S nv/OS 65
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11346061-5